BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

39289 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

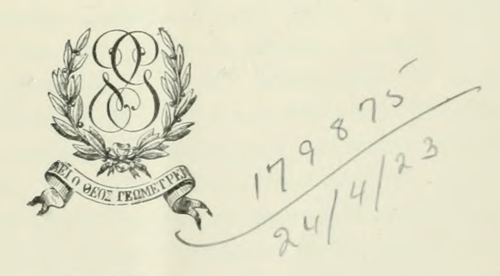
PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXI. — ANNÉE 1907.

(XLIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

F. POCKELS. — Lehrbuch der Krystalloptik, 1906.

Depuis que Fresnel a fait connaître sa théorie des phénomènes lumineux, bien des auteurs se sont proposé de décrire et d'expliquer les propriétés optiques des corps cristallisés, les uns désirant répandre de nouvelles découvertes sur ce sujet, les autres voulant vulgariser une méthode d'exposition, qui leur semblait préférable. Mais, suivant la tournure de leur esprit, ils ont adopté deux méthodes différentes : tantôt ils ont cherché à mettre en évidence le phénomène physique, à en faire comprendre la nature, n'hésitant pas pour atteindre ce but à donner de simples explications plutôt que de véritables démonstrations; les autres, au contraire, tenant avant tout à la rigueur des démonstrations, ont fait passer le côté physique au second plan et, partant d'équations générales, ils en ont déduit successivement les différentes propositions. Dans l'Ouvrage qu'il publie aujourd'hui, M. Pockels participe des deux écoles, mais il montre une préférence marquée pour la première méthode, et si, dans certains Chapitres, il ne l'adopte pas, il est facile d'en trouver la raison. Parmi les propriétés op-

tiques des cristaux, il en est qui ont donné lieu à de nombreuses recherches, qui sont définitivement connues et dont les théories se sont peu à peu perfectionnées et simplifiées ; d'autres, au contraire, n'ont été étudiées que par un petit nombre de physiciens ou de cristallographes ; elles ont été rarement décrites, et les premières théories données n'ont été que peu modifiées : M. Pockels n'a pu nous donner qu'un résumé des travaux originaux.

L'Ouvrage est divisé en quatre Parties, consacrées la première à l'étude des corps transparents et ne possédant pas le pouvoir rotatoire, la deuxième et la troisième respectivement à l'étude des corps chez lesquels le pouvoir rotatoire ou le pouvoir absorbant s'ajoute à la biréfringence. La quatrième, beaucoup moins développée, traite des modifications que les agents extérieurs font subir aux propriétés optiques.

Après avoir, dans une courte Introduction, étudié les mouvements de vibration rectilignes et elliptiques, ainsi que leurs combinaisons, l'auteur aborde la question de la double réfraction, successivement dans les cristaux uniaxes et les biaxes. On pourrait se demander la raison de cette distinction préalable, qui entraîne forcément des redites, mais on comprend bien vite à la lecture que l'auteur a voulu suivre dans son exposition l'ordre chronologique des découvertes.

Après avoir donné la construction du rayon réfracté par un corps isotrope, Huygens détermina les lois de la double réfraction dans le spath et *devina* que dans ce corps la surface d'onde se composait d'une sphère et d'un ellipsoïde de révolution. Mais, quand Fresnel s'est trouvé en présence des résultats de Biot, établissant l'existence de cristaux à deux axes, il ne pouvait songer à généraliser directement les conclusions de Huygens au sujet de la surface d'onde. Heureusement Fresnel remarque que la surface des vitesses normales des uniaxes peut se déduire par une règle très simple de la considération d'un ellipsoïde de révolution ; la généralisation était par suite tout indiquée : la surface des vitesses normales des biaxes devait se déduire par la même règle d'un ellipsoïde quelconque ; cette surface des vitesses une fois connue, la surface d'onde s'obtient facilement. M. Pockels étudie les propriétés de ces surfaces, leurs relations avec les ellipsoïdes de Fresnel, et en déduit toutes les propriétés connues des cristaux.

de la façon la plus simple et la plus élégante : des considérations géométriques interviennent seules et l'on se représente facilement la position respective des différents éléments, la normale à l'onde, le rayon lumineux, la vibration, etc.

Il en est tout autrement du Chapitre suivant, consacré aux théories, et qui, sans inconvénient, aurait pu être reporté à la fin de la première Partie. N'indiquant que les principes des théories mécaniques, l'auteur s'étend davantage sur la théorie électromagnétique. Il montre que les résultats en sont trop généraux et que, pour en faire l'application, il faut se restreindre au cas où la perméabilité magnétique du corps est égale à l'unité. Il était nécessaire, en effet, d'insister sur ce point, car certains auteurs, à la suite de mesures inexactes sur le quartz et la tourmaline, ont cru pouvoir s'élever contre la théorie de Fresnel, n'hésitant pas à s'appuyer sur la théorie électromagnétique pour donner une confirmation théorique de leurs résultats.

Comme applications des généralités exposées dans les deux premiers Chapitres, l'auteur étudie ensuite la réflexion à la surface des corps biréfringents, ainsi que la réfraction à travers ces mêmes corps : il traite le problème si intéressant :

Étant donné un rayon incident, construire le rayon réfléchi et le rayon réfracté.

Il en donne une solution très simple, la solution de Mallard d'ailleurs, basée sur la considération de la surface des indices. Il étudie avec beaucoup de soins et de détails le phénomène si curieux qui se produit, par suite de la réflexion totale, quand la face limite du corps coïncide avec le plan des axes optiques. Après avoir élucidé la question de la réfraction à travers un prisme, il se trouve en possession de tous les éléments nécessaires pour expliquer les méthodes employées à la détermination des indices de réfraction.

Deux Chapitres sont consacrés à l'étude des phénomènes de la polarisation chromatique en lumière parallèle et convergente. La question est traitée avec beaucoup de simplicité, grâce à la considération de la surface de Bertin et de surfaces annexes, les isogyres, lieux des normales aux ondes, dont les directions de vibration font un angle donné avec une direction fixe. Je dois dire

cependant que la méthode basée sur la considération des ellipses sphériques, indiquée par M. Becke, me paraît plus immédiate et plus parlante. En tous cas, il eût été préférable que M. Pockels étudiât d'une façon plus approfondie la forme des lignes neutres, car certainement il y a de notables différences entre les résultats expérimentaux et les conclusions théoriques que l'on a formulées jusqu'ici.

Après avoir déterminé les propriétés des lames minces superposées, suivant la méthode de Mallard, l'auteur en fait l'application d'une part à la détermination du signe optique d'un cristal, et de l'autre au calcul des constantes optiques des mélanges isomorphes. La solution du premier problème révèle que l'auteur est physicien et non cristallographe : il ne considère en effet que le cas de gros cristaux, susceptibles d'être taillés dans une direction déterminée. Le second problème a beaucoup perdu de son intérêt : il est établi aujourd'hui que, si les propriétés des cristaux mixtes sont fonctions de celles des corps mélangés, ce ne sont pas cependant des fonctions immédiates, et le calcul ne peut nous fournir que des solutions approchées, demandant à être vérifiées expérimentalement.

Dans la deuxième Partie de son livre, M. Pockels s'occupe des cristaux jouissant du pouvoir rotatoire. Après avoir décrit rapidement les faits qui caractérisent ce phénomène, il expose la théorie de Gouy, admettant la superposition du pouvoir rotatoire à la double réfraction. La considération de deux ellipses privilégiées, qui se propagent sans déformation, avec des vitesses différentes, permet de résoudre facilement le problème. Mais, tandis que Gouy n'avait à s'occuper que des cristaux cubiques et des uniaxes, il faut maintenant tenir compte des biaxes. Dans les cristaux chez lesquels le pouvoir rotatoire existe seul, les cristaux cubiques, la rotation spécifique paraît être indépendante de la direction suivie par le rayon lumineux; aussi M. Gouy a-t-il cru pouvoir étendre ce résultat aux uniaxes; mais cette généralisation ne peut plus être admise pour les biaxes, et M. Pockels représente le pouvoir rotatoire spécifique par une fonction du second degré des cosinus directeurs du rayon.

En portant sur chaque direction une longueur proportionnelle à la racine carrée de l'inverse du pouvoir rotatoire, on obtient un

ensemble de deux hyperboloïdes conjugués, constituant ce que M. Chipart appelle *la surface de giration*. Cette surface présente des caractères particuliers suivant la symétrie du cristal : il ne peut en effet y avoir de pouvoir rotatoire si le cristal possède un centre; la présence d'un plan de symétrie entraîne des rotations égales et de signes contraires pour les deux axes optiques, etc. Il est par suite facile de montrer que le pouvoir rotatoire peut se rencontrer dans quinze groupes de cristaux. Après avoir recherché les modifications qu'éprouvent la surface d'onde, la surface des vitesses normales, etc. par suite de l'existence du pouvoir rotatoire, M. Pockels étudie les phénomènes présentés en lumière convergente par les cristaux actifs.

C'est en suivant la même méthode que l'auteur explique les propriétés optiques des cristaux absorbant partiellement la lumière : il admet que le pouvoir absorbant se superpose à la double réfraction, et l'introduction de l'absorption se fait d'ailleurs simplement. Comme l'a montré M. Poincaré, les composantes du mouvement vibratoire peuvent être représentées par la partie réelle d'une exponentielle, multiplié par l'amplitude. Or l'expérience permet d'établir que les variations de l'amplitude, causées par l'absorption, peuvent être également représentées par une exponentielle : on se trouve donc en présence, pour représenter le mouvement vibratoire, d'un produit de deux exponentielles. Il en résulte que pour déduire la surface des indices des cristaux absorbants de celle des cristaux transparents, il suffit d'y remplacer la vitesse de propagation par $q:(1+ik)$, q étant la nouvelle vitesse de propagation, et k l'indice d'absorption. On obtient ainsi une équation de forme imaginaire, dont le terme réel et le coefficient de i, égalés à 0, donnent les équations de deux surfaces représentant les variations de q et de k. Ces surfaces ont les mêmes axes de symétrie dans les cristaux orthorhombiques et les cristaux à symétrie supérieure. Mais il n'en est plus de même dans les cristaux monocliniques et les tricliniques, par conséquent dans ceux-ci il n'y a pas d'axes de symétrie optiques : l'absorption maxima et la minima ne se produisent pas suivant les axes de symétrie de la double réfraction. Dans de tels cristaux une vibration incidente donne naissance à deux vibrations elliptiques, de même sens de rotation, contrairement à ce qui a lieu dans les cristaux doués du pouvoir rotatoire.

De ces généralités, M. Pockels passe aux cas particuliers, qui se peuvent étudier grâce aux simplifications des équations, c'est-à-dire le cas où l'absorption est faible, celui où la biréfringence est peu élevée; puis il examine l'effet produit par la superposition de l'absorption à la double réfraction dans les phénomènes vus en lumière convergente.

La quatrième Partie de l'Ouvrage, de beaucoup la plus réduite, est consacrée aux changements produits, par les actions extérieures, sur les phénomènes optiques : influence de la chaleur, des déformations mécaniques, des champs électriques et magnétiques. Cette partie, très écourtée, ne se prête à aucune remarque intéressante; on y retrouve les équations de Green avec la réduction habituelle des coefficients sous l'influence de la symétrie.

Le peu de développement donné à ce Chapitre si intéressant de la cristallographie ne saurait surprendre : M. Pockels, en effet, s'est cantonné absolument dans les questions d'ordre théorique; seuls les faits servant de base à ces théories sont énoncés; il n'est fait aucune allusion aux expériences, aux méthodes de détermination. On n'en saurait faire un reproche à M. Pockels, qui n'a voulu traiter qu'une partie de l'optique cristalline; mais il faut bien reconnaître que le titre de son Ouvrage est un peu trompeur, et que ce premier Volume en appelle un second devant contenir les méthodes d'observation et les résultats expérimentaux.

En résumé, à part quelques paragraphes intercalés plutôt par crainte de paraître incomplet, l'Ouvrage de M. Pockels ne mérite que des éloges : les théories de l'optique cristalline y sont exposées de la façon la plus simple et la plus élégante; elles sont mises à la portée des débutants, munis de notions mathématiques relativement élémentaires, et désirant acquérir, sur ce sujet, des connaissances approfondies. F. W.

FASSBINDER (Ch.). — Théorie et pratique des approximations numériques. 1 vol. in 8°; VI-81 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Ce petit Livre rendra des services aux étudiants, aujourd'hui qu'on est disposé à attribuer, dans l'enseignement, aux calculs numériques, l'importance qu'il convient. L'auteur a tiré bon parti

de l'excellente Note de M. Guyou [1] sur les approximations numériques et a indiqué des procédés vraiment pratiques pour la disposition et la sûreté des calculs, procédés avec lesquels on peut se familiariser par les nombreux exemples, développés ou non, qu'indique l'auteur. Celui-ci insiste, comme il convient, sur ce qui est vraiment important; peut-être a-t-il donné un peu trop de détails sur des méthodes telles que celle des *chiffres exacts*, que le lecteur, s'il a bien compris la méthode fondamentale, peut bien trouver de lui-même. Par contre, je trouve que, malgré le caractère très élémentaire qu'il a voulu donner à son Livre, il a eu grandement raison d'indiquer en terminant les services que peut rendre la formule des accroissements finis. J. T.

MAILLET (Ed.). — INTRODUCTION A LA THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS ET DES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS. 1 vol. in-8°; v-274 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

On saura gré à M. Maillet d'avoir réuni, sous une forme brève et didactique, les résultats de recherches, déjà nombreuses, qui touchent à la fois à l'Arithmétique et à l'Analyse, et dont l'intérêt et l'importance avaient frappé tous les mathématiciens. M. Maillet a tenu, d'une part, à ce que son Livre fût facilement accessible, d'autre part, à ce qu'il fût suggestif. Il a donc donné les explications nécessaires à la pleine intelligence de ses recherches lors même que ces explications étaient élémentaires ou se trouvaient dans des Mémoires qu'il aurait pu se borner à citer : le lecteur prendra d'autant plus d'intérêt à ces explications qu'il en sentira mieux la portée, qui peut-être lui avait échappé jusque-là, et le bénéfice qu'il en tirera n'est assurément pas négligeable. Très fréquemment l'auteur indique des sujets d'étude, soit que ces sujets aient déjà été traités, mais se présentent naturellement dans l'ordre d'idées qu'il développe, soit qu'il s'agisse de questions dont la réponse n'est pas encore connue et dont plusieurs peuvent vraisemblablement être abordées par les méthodes avec lesquelles M. Mail-

(1) Gauthier-Villars, Paris, 2e édition, 1901.

let souhaite de familiariser le lecteur. Afin que celui-ci puisse se mettre au courant du sujet, M. Maillet lui indique les Livres ou Mémoires qu'il doit lire : cette bibliographie est rassurante par sa brièveté ; mais cela ne veut pas dire qu'il suffit d'un petit effort pour être maître du sujet. Espérons que les facilités que l'auteur a voulu donner à tous ceux qui pourraient être tentés de s'essayer dans une science qu'il cultive avec tant de passion et de succès lui amèneront des disciples et des imitateurs.

L'importance de la proposition par laquelle Liouville a montré, le premier, l'existence de nombres transcendants, apparaît clairement dans le Livre de M. Maillet, où les *nombres de Liouville* jouent un rôle essentiel.

Un *nombre de Liouville* est un nombre transcendant ξ qui est limite d'une suite

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n}, \quad \ldots$$

de fractions rationnelles dont les dénominateurs sont des nombres naturels vérifiant les conditions

$$q_{n+1} > q_n, \qquad \lim_{n=\infty} q_n = \infty,$$

dont les numérateurs sont de la forme $f + gi$, f et g étant des nombres naturels, ou nuls, telles enfin qu'on puisse, à chaque nombre positif α, faire correspondre une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ait

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < q_n^{-\alpha}.$$

Cette définition rappelée, je ne puis mieux faire, pour faire connaître les matières traitées par M. Maillet, que de citer l'analyse qu'il donne lui-même de ces matières. Les numéros correspondent aux Chapitres.

« I. Je rappelle d'abord quelques résultats de la théorie des fractions continues arithmétiques, dont je fais grand usage, en esquissant une classification par ordre de ces fonctions, d'après la rapidité de croissance des quotients incomplets.

» II. J'établis, d'après Liouville, un théorème fondamental qui donne une condition suffisante pour qu'un nombre, considéré

comme limite d'une suite de fractions rationnelles ordinaires, soit transcendant; j'appelle *nombres transcendants de Liouville* les nombres qui satisfont à cette condition. J'étends ce théorème au cas où les fractions sont des polynomes formés avec un nombre algébrique et à coefficients rationnels.

» III. On peut trouver des catégories étendues de nombres de Liouville (je les appelle *nombres correspondants*) qui, par addition, soustraction, multiplication et division, ne donnent que des nombres rationnels ou transcendants de Liouville de même catégorie. Les nombres transcendants N de Liouville peuvent être caractérisés par une propriété remarquable dont ils sont seuls à jouir parmi les nombres irrationnels : il y a une infinité de réduites de N^p (p entier quelconque) qui sont puissances $p^{\text{ièmes}}$ de réduites de N. Ceci me permet de définir, dans chaque catégorie, les nombres qui sont des puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ exactes (μ entier) d'un nombre de la même catégorie. Toutes les irrationnelles $\frac{p\mathrm{I}+q}{p'\mathrm{I}+q'}$ (p, q, p', q' entiers, $pq - p'q' \neq 0$) sont de même ordre que l'irrationnelle I.

» IV. Je montre ensuite que l'on peut considérer de manières extrêmement variées tout nombre réel rationnel, algébrique ou transcendant comme racine de fonctions $f(x)$, où $f(x)$ est une série ou une fraction continue à coefficients rationnels.

» Ainsi, il y a une infinité de familles de ces séries, par exemple de fonctions entières de même ordre, telles que les racines des séries de la famille donnent tous les nombres possibles, réels ou imaginaires. Inversement, tout nombre réel est, d'une infinité de façons, représentable par des séries ou des fractions continues $f(x)$ pour x rationnel.

» V. J'étudie encore ce que j'appelle les *fonctions génératrices $f(x)$ de nombres transcendants;* je détermine des catégories étendues de pareilles fonctions, à coefficients rationnels, pour lesquelles $f(x)$ est transcendant dès que x est rationnel ou algébrique ($x \neq 0$) et même des catégories de fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_h, \ldots$, telles que toute fonction analogue à

$$\Phi(x) = f(f_1(f_2(\ldots f_h(x)\ldots)))$$

est transcendante dès que x est rationnel > 0.

» VI. J'indique, en me basant sur la théorie des fractions continues arithmétiques, un moyen de distinguer certaines catégories de nombres. J'en conclus ainsi que les fractions continues quasi-périodiques à quotients incomplets limités et le nombre e, qui sont des nombres transcendants, ne sont pas des nombres de Liouville.

» VII. Je m'occupe des fractions décimales et des fractions continues quasi-périodiques : ce sont des nombres transcendants, au moins sous certaines conditions. Si I est une fraction continue quasi-périodique, il en est de même, dans des cas étendus, de pq^{-1}I et I^p (p, q entiers).

» VIII. Je signale des familles de séries à coefficients rationnels telles que leurs racines, comme celles des équations algébriques à coefficients entiers, ne peuvent présenter, dans la partie décimale de leur développement, des suites de zéros d'étendue trop rapidement croissante au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la virgule. Une propriété corrélative a lieu pour les quotients incomplets du développement en fraction continue : ceux-ci ne peuvent croître trop vite.

» IX. Je donne une démonstration connue de la transcendance des nombres e et π, et je traite la question de l'impossibilité de la quadrature du cercle, en expliquant dans quel sens il faut l'entendre.

» X. Dans les Chapitres X à XII, j'envisage l'extension aux séries à coefficients rationnels de plusieurs propriétés des polynomes à coefficients rationnels. Certaines se conservent toujours, d'autres ne restent vraies que pour des types particuliers de séries, dont je forme quelques-unes. On arrive toutefois à des analogies plus profondes et plus habituelles quand on considère, non plus les séries à coefficients rationnels, mais les séries dont les coefficients sont formés rationnellement avec les nombres de certains ensembles, par exemple avec des nombres de Liouville correspondants.

» XI. Je passe aux fonctions symétriques des racines des équations à coefficients rationnels, ce qui me conduit à proposer de définir comme entiers transcendants, sous réserves de certaines vérifications ultérieures, des catégories de nombres transcendants : ainsi π et L 2 seraient des entiers transcendants.

» XII. Je termine en montrant certaines difficultés de l'extension aux fonctions entières à coefficients rationnels de la notion connue de la réductibilité pour les polynomes à coefficients rationnels; incidemment, j'établis un résultat très général relatif à la densité des fonctions entières dites d'*ordre zéro* (applicable à toutes celles d'indice $\geqq 2$). »

Le Livre de M. Maillet se termine par quatre Notes : la dernière contient les indications bibliographiques, où, comme il est naturel ici, les travaux de l'auteur tiennent une large place. La seconde contient un complément aux Chapitres VI et VII. La première et la troisième se rapportent à des modes de classification des fonctions entières analogues aux procédés de classification des fractions continues arithmétiques et à diverses analogies entre les fonctions transcendantes et les nombres transcendants.

J. T.

KISTLER (H.). — Ueber Funktionen von mehreren komplexen Veranderlichen. Inaugural-Dissertation. 1 vol. in-8°, 44 pages. Bâle, Basler Berichthaus, 1905.

Considérons n variables complexes, que je désignerai sous le nom de *coordonnées*, et regardons comme un point tout système de valeurs attribuées à ces n coordonnées. Puisque les variables sont complexes, on est dans un espace à $2n$ dimensions. Une formation (*Gebilde*) analytique du $\nu^{\text{ième}}$ échelon (*Stufe*) est l'ensemble des points dont les n coordonnées s'expriment au moyen de ν variables complexes par des séries entières et leurs prolongements.

Ceci posé, considérons m surfaces, dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro des fonctions uniformes des n coordonnées, fonctions qui, aux environs de chaque point, se comportent comme des fonctions rationnelles. Un problème fondamental consiste à décomposer l'intersection complète de ces surfaces (l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient les m équations) en formations analytiques. Ce problème a été traité par M. Jor-

dan [1] et par M. Blumenthal [2]. C'est en appliquant les méthodes de Kronecker que M. Hugo Kistler reprend la question et montre, en particulier, que la décomposition de l'intersection en un nombre fini de formations analytiques est possible.

Il traite ensuite le problème suivant :

Deux formations analytiques d'échelons μ et ν étant données, trouver leur intersection.

Il montre, en supposant $\mu + \nu > n$ que cette intersection est au moins de la dimension $2(\mu + \nu - n)$: la démonstration est faite par induction, en partant d'un cas particulier établi par M. Blumenthal.

Le dernier Chapitre se rapporte à une question d'une autre nature, qui se relie d'ailleurs aux précédentes. Si l'on considère une fonction analytique uniforme de n variables complexes, qui, dans un domaine (D) à $2n$ dimensions, se comporte autour de chaque point comme une fonction rationnelle, il y a lieu de considérer deux sortes de singularités non essentielles, les pôles de première espèce, pour lesquels le dénominateur de la fraction rationnelle qui représente la fonction aux environs de ce point s'annule seul et les pôles de seconde espèce pour lesquels le numérateur et le dénominateur s'annulent. Ces pôles de deuxième espèce appartiennent à une multiplicité analytique de la $2(n-2)^{\text{ième}}$ dimension. M. Hugo Kistler établit la proposition suivante :

Si une fonction analytique uniforme de n variables complexes se comporte, en général, dans un domaine (D) comme une fonction rationnelle, et si l'on ne sait rien d'ailleurs sur la façon dont elle se comporte dans une multiplicité analytique à $2(n-2)$ dimensions, on peut affirmer que, là encore, elle se comporte comme une fraction rationnelle.

Cette proposition est une conséquence directe des théorèmes établis par M. Poincaré et par M. Cousin sur la représentation des fonctions méromorphes par le quotient de fonctions holomorphes.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, Cah. XLVIII, 1880.

(2) *Mathematische Annalen*, t. LVII, 1903.

Enfin, M. Kistler montre le rôle de cette proposition dans le problème de l'inversion des fonctions abéliennes. J. T.

MÉLANGES.

SUR DEUX MÉMOIRES DE POISSON RELATIFS A LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ ;

Par M. Gaston DARBOUX.

I.

Les deux *Mémoires sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs* que Poisson a publiés, en 1811, dans le recueil de la première Classe de l'Institut, ont, dès leur publication, excité l'admiration à la fois des physiciens et des géomètres. Si nous en croyons Arago, Poisson voyait, dans l'accord de sa théorie et de ses calculs avec le résultat des expériences antérieures de Coulomb, la démonstration de la vérité de l'hypothèse sur laquelle il s'était appuyé, c'est-à-dire de l'existence de deux fluides distincts, dont l'action simultanée produirait tous les phénomènes électriques. L'expérience nous a rendus aujourd'hui plus prudents, ou moins hardis, et nous savons que la vérité d'une hypothèse ne ressort pas nécessairement de l'accord du Calcul et de l'Observation, dans la théorie de quelques phénomènes, en nombre plus ou moins grand. Quoi qu'il en soit, on doit reconnaître que les travaux de Poisson sur l'électricité sont de ceux où il a déployé le plus de profondeur et d'invention. En se proposant de déterminer le potentiel de deux sphères conductrices électrisées qui agissent l'une sur l'autre, Poisson a été conduit à une équation de la nature de celles que nous appelons aujourd'hui *équations fonctionnelles;* il a su la résoudre avec beaucoup de sagacité, et a obtenu ainsi la solution complète du problème qu'il s'était proposé.

C'est sans doute ce caractère propre et original de la solution imaginée par Poisson qui lui a assuré la faveur et l'étude persévérante des géomètres. Bien qu'aujourd'hui la méthode des images de Lord Kelvin puisse donner une solution particulièrement simple du beau problème résolu par Poisson, la méthode de l'inventeur n'est pas négligée. Joseph Bertrand l'expose dans ses belles *Leçons sur la théorie mathématique de l'Électricité professées au Collège de France*, publiées en 1890. G. Kirchhoff la développait d'une manière complète dans son enseignement (¹): je pense donc qu'il ne sera pas inutile de la reprendre à nouveau, en lui ajoutant un complément essentiel, par lequel elle acquiert toute la simplicité que l'on peut désirer.

On sait que Poisson, voulant déterminer la distribution de l'électricité sur les deux sphères, admet que cette distribution est symétrique autour de la ligne des centres des deux sphères. Partant de cette hypothèse, il montre que les potentiels des deux sphères sont développables suivant des séries, dont les coefficients seront entièrement connus, si seulement on peut déterminer les valeurs des potentiels pour tous les points de la ligne des centres des deux sphères. Or, ces valeurs des potentiels, qui deviennent ainsi des fonctions d'une seule variable, sont liées par des relations que Poisson met en évidence et qui le conduisent précisément à cette équation fonctionnelle dont la solution constitue le but principal et le réel intérêt de ses deux Mémoires. Dans ce qui va suivre, nous allons montrer que l'hypothèse de Poisson sur la symétrie de la distribution électrique est tout à fait inutile; et nous donnerons une méthode directe qui reposera, elle aussi, sur la résolution d'une équation fonctionnelle, mais qui conduira directement à la valeur du potentiel pour un point quelconque de l'espace, et non plus seulement pour les points de la ligne des centres des deux sphères.

II.

Considérons (*fig.* 1) une sphère de centre O et une couche électrique distribuée d'une manière quelconque sur la surface.

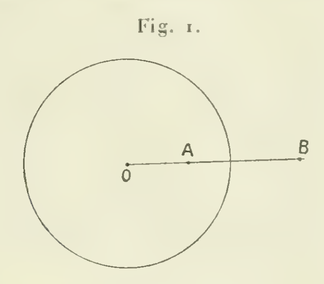
(¹) Voir les *Vorlesungen über Electricität und Magnetismus*, publiées en 1891 par M. Max Planck.

Soient A et B deux points conjugués par rapport à la sphère. Pour un point quelconque M de cette surface, on a

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{R}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{R}.$$

Si donc on désigne par V_A, V_B les potentiels de l'action que la

Fig. 1.



couche exerce sur A et B, potentiels définis par des intégrales, telles que les suivantes :

$$V_A = \int\int \frac{\mu\, dS}{\overline{AM}}, \qquad V_B = \int\int \frac{\mu\, dS}{\overline{BM}},$$

on aura

$$(1) \qquad V_A = \frac{R}{\overline{OA}} V_B = \frac{\overline{OB}}{R} V_B.$$

Telle est la relation fondamentale et bien connue dont nous ferons usage dans la suite.

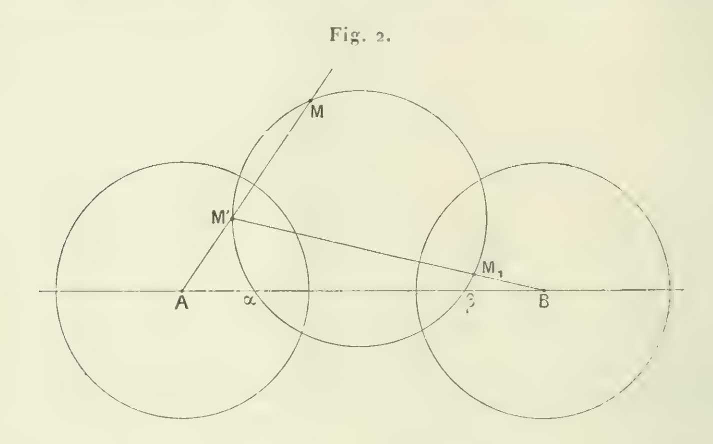
Cela posé, considérons deux sphères électrisées de centres A et B (*fig.* 2) extérieures l'une à l'autre. Désignons par a et b respectivement les rayons des deux sphères, par c la distance des centres, et soient α, β les deux points réels qui sont conjugués à la fois par rapport aux deux sphères (A) et (B), et par lesquels passent, comme on sait, toutes les sphères qui sont en même temps orthogonales à (A) et à (B).

Étant pris un point quelconque M dans l'espace extérieur aux deux sphères, désignons par M' son conjugué par rapport à (A) et par M_1 le conjugué de M' par rapport à (B). M' et M_1 sont évidemment sur le cercle qui passe par les points M, α, β. Si nous désignons par I_A, I_B les inversions qui admettent pour sphères principales (A) et (B), M' se déduira de M par l'inversion I_A;

M_1 se déduira de M' par l'inversion I_B et il se déduira de M par la substitution $I_A I_B$, qui est le produit des deux inversions I_A et I_B.

Si nous désignons par V_M, V'_M respectivement les potentiels de (A) et de (B), nous devons exprimer que la somme de ces potentiels est constante pour les points situés à l'intérieur des deux

Fig. 2.



sphères. Nous devons donc avoir deux équations telles que les suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} V_{M'} + V'_{M'} = h, \\ V_{M_1} + V'_{M_1} = k, \end{cases}$$

h et k étant des constantes qui dépendront de la charge primitivement attribuée aux deux sphères.

Or, d'après l'équation fondamentale (1), on a

$$V_{M'} = V_M \frac{\overline{AM}}{a}, \qquad V'_{M_1} = V'_{M'} \frac{b}{\overline{BM_1}}.$$

Donc, les équations précédentes deviendront

$$(3)\qquad V_M \frac{\overline{AM}}{a} + V'_{M'} = h, \qquad V_{M_1} + V'_{M'} \frac{b}{\overline{BM_1}} = k.$$

Et en éliminant $V'_{M'}$ on sera conduit à l'équation

$$(4)\qquad V_{M_1} \overline{BM_1} - V_M \frac{b}{a} \overline{AM} = k \cdot \overline{BM_1} - hb.$$

Telle est l'équation fonctionnelle à laquelle devra satisfaire le potentiel de (A) *à l'extérieur de cette sphère.*

On peut la transformer comme il suit.

III.

D'après les propriétés élémentaires de l'inversion, on a

$$(5) \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{\alpha M}} = \frac{\overline{A\beta}}{\overline{\beta M'}}, \qquad \frac{\overline{\alpha M_1}}{\overline{\beta M'}} = \frac{\overline{BM_1}}{\overline{B\beta}};$$

d'où l'on déduit, en éliminant $\overline{\beta M'}$,

$$(6) \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{BM_1}} = \frac{\overline{A\beta}}{\overline{B\beta}} \frac{\overline{\alpha M}}{\overline{\alpha M_1}}.$$

Donc, si l'on remarque que l'on a, par définition,

$$(7) \qquad a^2 = \overline{A\alpha}\cdot\overline{A\beta}, \qquad b^2 = \overline{B\alpha}.\overline{B\beta}$$

et si l'on pose

$$(8) \qquad q^2 = \frac{\overline{A\alpha}}{\overline{A\beta}} \frac{\overline{B\beta}}{\overline{B\alpha}},$$

on aura

$$\frac{b}{a} \frac{\overline{AM}}{\overline{BM_1}} = \frac{1}{q} \frac{\overline{\alpha M}}{\overline{\alpha M_1}};$$

l'équation à résoudre se présentera donc sous la forme

$$(9) \qquad V_M \overline{\alpha M} - q V_{M_1} \overline{\alpha M_1} = \frac{ha}{\overline{A\beta}} \overline{\beta M'} - kq.\overline{\alpha M_1}$$

où l'on a utilisé la seconde des relations (5).

Le point M_1 étant, comme le point M, extérieur à (A), appliquons-lui les mêmes substitutions qu'au point primitif : d'abord l'inversion I_A qui donnera un point M'_1, puis à M'_1 l'inversion I_B qui donnera M_2; et ainsi de suite indéfiniment. Nous aurons de nouveaux points formant deux suites indéfinies M, M_1, M_2, ... et M', M'_1, M'_2, ... Et tous ces points seront sur le cercle primitif $\alpha\beta M$. La construction met en évidence (et nous le prouverons analytiquement plus loin) que les points M_i tendent vers le point-

limite β et, de même, que les points M'_i tendent vers α. La figure montre même que la convergence sera assez rapide.

Ces points étant admis, appliquons l'équation (9) aux groupes de points ainsi obtenus successivement. Nous aurons des équations telles que les suivantes :

$$V_{M_1}\,\overline{\alpha M_1} - qV_{M_2}\overline{\alpha M_2} = \frac{h\alpha}{A\beta}\,\overline{\beta M'_1} - kq\,\overline{\alpha M_2},$$

. . . .

$$V_{M_{i-1}}\overline{\alpha M_{i-1}} - qV_{M_i}\overline{\alpha M_i} = \frac{ha}{A\beta}\,\overline{\beta M'_{i-1}} - kq\,\overline{\alpha M_i}.$$

Ajoutant toutes ces équations à la première (9) après les avoir multipliées respectivement par $q, q^2, \ldots, q^{i-1}$, il vient

$$V_M\overline{\alpha M} - q^iV_{M_i}\overline{\alpha M_i} = \frac{ha}{A\beta}\left[\overline{\beta M'} + q\,\overline{\beta M'_1} + \ldots + q^{i-1}\,\overline{\beta M'_{i-1}}\right]$$
$$- k\left[q\,\overline{\alpha M_1} + q^2\overline{\alpha M_2} + \ldots + q^i\overline{\alpha M_i}\right].$$

Nous avons déjà remarqué que les points M_i tendent vers le point β, pour lequel le potentiel V_M *ne peut manquer d'être fini et continu.* D'autre part, la quantité q est essentiellement plus petite que 1. Donc, le terme $q^iV_{M_i}\overline{\alpha M_i}$ tend vers zéro, et l'on obtient la solution du problème sous la forme très simple

$$(10)\qquad V_M = \frac{ha}{A\beta\,\alpha M}\left[\overline{\beta M'} + q\,\overline{\beta M'_1} + q^2\,\overline{\beta M'_2} + \ldots\right]$$
$$- \frac{k}{\alpha M}\left[q\,\overline{\alpha M_1} + q^2\,\overline{\alpha M_2} + q^3\,\overline{\alpha M_3} + \ldots\right].$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier que les deux séries entre parenthèses, dont le terme général tend vers $q^i\overline{\alpha\beta}$, convergent comme des progressions arithmétiques dont la raison serait égale à q.

IV.

Une fois obtenue la solution, il ne reste plus qu'à la transformer et à la développer; et, pour cela, il faut établir les relations entre les points M_i, M'_i. A cet effet, aux coordonnées ordinaires x, y d'un point du plan, nous allons substituer les coordonnées *symétriques*

imaginaires

$$z = x + iy, \qquad z_0 = x - iy.$$

L'inversion étant définie par une formule de la forme suivante

$$z = \frac{A z'_0 + B}{C z'_0 + D},$$

il est facile de voir que, si l'on prend pour axe des x la ligne des centres, et si l'on désigne par α, β les abscisses des points α et β, l'inversion I_A sera définie par une formule telle que la suivante

$$(I_A) \qquad \frac{(z-\alpha)(z'_0-\alpha)}{(z-\beta)(z_0-\beta)} = s^2.$$

Cette formule fait, en effet, correspondre le point α au point β, et réciproquement. Pour avoir s^2, il suffit de remarquer que, dans l'inversion, le point A doit correspondre au point situé à l'infini : cela donne la relation

$$(11) \qquad s^2 = \frac{\overline{A\alpha}}{\overline{A\beta}}$$

qui fera connaître s^2. On remarquera que s^2 est inférieure à l'unité.

De même, l'inversion I_B sera définie par la formule

$$(I_B) \qquad \frac{(z'_0-\beta)(z_1-\beta)}{(z_0-\alpha)(z_1-\alpha)} = t^2$$

où l'on aura

$$(12) \qquad t^2 = \frac{\overline{B\beta}}{\overline{B\alpha}};$$

t^2 sera aussi plus petite que l'unité. Enfin, la substitution $I_A I_B$ sera définie par la formule

$$(I_A I_B) \qquad \frac{z_1-\beta}{z_1-\alpha} = q^2 \frac{z-\beta}{z-\alpha},$$

obtenue en multipliant les deux précédentes (I_A), (I_B). Remarquons l'identité

$$q = st$$

qui relie les trois fractions q, s, t.

La dernière relation, mise sous forme canonique, nous permet de déduire, de l'affixe de M, celle de M_i. Elle nous la donnera immé-

diatement sous la forme

$$(13)\qquad \frac{z_i-\beta}{z_i-\alpha} = q^{2i}\frac{z-\beta}{z-\alpha}$$

qui montre, comme nous l'avons annoncé, que le point M_i tend vers le point β.

Posons

$$(14)\qquad \overline{\alpha\beta} = D.$$

On déduira de la formule précédente

$$\frac{z_i-\beta}{(z-\beta)q^i} = \frac{z_i-\alpha}{(z-\alpha)q^{-i}} = \frac{D}{(z-\alpha)q^{-i}-(z-\beta)q^i};$$

et par conséquent

$$(13\,bis)\qquad \frac{\overline{\alpha M_i}}{\overline{\alpha M}} = \frac{Dq^{-i}}{\mathfrak{M}[(z-\alpha)q^{-i}-(z-\beta)q^i]},$$

le signe $\mathfrak{M}$ indiquant le module de la quantité qui lui est soumise.

Or, si V désigne l'angle $\widehat{\alpha M\beta}$, on a évidemment

$$\mathfrak{M}[(z-\alpha)q^{-i}-(z-\beta)q^i] = \sqrt{\overline{\alpha M}^2 q^{-2i} + \overline{\beta M}^2 q^{2i} - 2\,\alpha M.\beta M\cos V}.$$

La seconde série qui figure dans la formule (10) aura donc pour expression définitive

$$(15)\qquad -k\sum_1^\infty q^i\frac{\overline{\alpha M_i}}{\overline{\alpha M}} = -\sum_1^\infty \frac{Dk}{\sqrt{\overline{\alpha M}^2 q^{-2i} + \overline{\beta M}^2 q^{2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}}.$$

Faisons un calcul analogue pour la première série. On a, entre M_i, M'_i, la relation établie par la formule I_A, c'est-à-dire

$$(16)\qquad \frac{(z_i-\alpha)(z'_{0i}-\alpha)}{(z_i-\beta)(z_{0i}-\beta)} = s^2,$$

qui nous donne

$$(17)\qquad \frac{z'_{0i}-\beta}{z_{0i}-\alpha} = \frac{1}{s^2}\frac{z_i-\alpha}{z_i-\beta} = \frac{1}{s^2q^{2i}}\frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

De là encore on déduit

$$\frac{z_{0i}-\beta}{(z-\alpha)s^{-1}q^{-i}} = \frac{z_{0i}-\alpha}{(z-\beta)sq^i} = \frac{D}{(z-\beta)sq^i-(z-\alpha)s^{-1}q^{-i}},$$

et par conséquent

$$\frac{\overline{\beta M_i}}{\overline{\alpha M}} = \frac{D s^{-1} q^{-i}}{\mathfrak{M}[(z-\beta) s q^i - (z-\alpha) s^{-1} q^{-i}]}$$
$$= \frac{D s^{-1} q^{-i}}{\sqrt{\overline{\beta M}^2 s^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}}.$$

Donc, si nous tenons compte de la formule

$$a = \sqrt{\overline{A\alpha}.\overline{A\beta}} = \overline{A\beta}\, s,$$

la première série de la formule (10) deviendra

$$\frac{ha}{\overline{A\beta}} \sum_0^\infty q^i \frac{\overline{\beta M_i}}{\overline{\alpha M}} = \sum_0^\infty \frac{h D}{\sqrt{\overline{\beta M}^2 s^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}}.$$

On aura donc, pour le potentiel V_M, l'expression définitive

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} V_M = {} & h \sum_0^\infty \frac{D}{\sqrt{\overline{\beta M}^2 s^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}} \\ & - k \sum_1^\infty \frac{D}{\sqrt{\overline{\beta M}^2 q^{2i} - \overline{\alpha M}^2 q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}} \end{aligned}\right.$$

à laquelle on pourra joindre, en échangeant les deux sphères, l'expression suivante pour le potentiel de la sphère (B)

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} V'_M = {} & k \sum_0^\infty \frac{D}{\sqrt{\overline{\alpha M}^2 t^2 q^{2i} + \overline{\beta M}^2 t^{-2} q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}} \\ & - h \sum_1^\infty \frac{D}{\sqrt{\overline{\alpha M}^2 q^{2i} + \overline{\beta M}^2 q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}}. \end{aligned}\right.$$

V.

Il est aisé de vérifier que ces deux expressions vérifient les relations (3). Il est aisé aussi de vérifier que ce sont effectivement des potentiels, car la formule (13 *bis*)

$$\frac{\overline{\alpha M_i}}{\overline{\alpha M}} = \frac{D q^{-i}}{\mathfrak{M}[(z-\alpha) q^{-i} - (z-\beta) q^i]}$$

nous donne, en introduisant le point A_i dont l'affixe est défini par l'équation

$$(A_i) \qquad \frac{z-\alpha}{z-\beta} = q^{2i}$$

la relation

$$(20) \qquad \frac{\overline{\alpha M_i}}{\overline{\alpha M}} = \frac{D}{(1-q^{2i})} \frac{1}{\overline{A_i M}},$$

et, de même, si nous introduisons le point A'_i défini par l'équation

$$(A'_i) \qquad \frac{z-\alpha}{z-\beta} = s^2 q^{2i},$$

nous obtenons la relation

$$\frac{\overline{\beta M_i}}{\overline{\alpha M}} = \frac{D s^{-1} q^{-i}}{\mathcal{M}[(z-\beta)sq^i - (z-\alpha)s^{-1}q^{-i}]} = \frac{D}{1-s^2q^{2i}} \frac{1}{\overline{A'_i M}},$$

de sorte que nous arrivons pour V_M à l'expression

$$(21) \qquad V_M = hD \sum_0^\infty \frac{sq^i}{1-s^2q^{2i}} \frac{1}{\overline{A'_i M}} - kD \sum_1^\infty \frac{q^i}{1-q^{2i}} \frac{1}{\overline{A_i M}},$$

qui définit évidemment un potentiel.

Si l'on définissait de même les points B'_i, B_i par les relations

$$(B_i) \qquad \frac{z-\beta}{z-\alpha} = q^{2i},$$

$$(B'_i) \qquad \frac{z-\beta}{z-\alpha} = t^2 q^{2i},$$

on aurait également

$$(22) \qquad V'_M = kD \sum_0^\infty \frac{tq^i}{1-t^2q^{2i}} \frac{1}{\overline{B'_i M}} - hD \sum_1^\infty \frac{q^i}{1-q^{2i}} \frac{1}{\overline{B_i M}}.$$

Les points A_i, A'_i, B_i, B'_i sont ceux que donnerait la méthode des *images* appliquée aux centres des deux sphères. Le point A'_0, par exemple, coïncide avec A, le point B'_0 avec B. Des inversions successives par rapport à (B) et à (A) font dériver de A successivement B_1, A'_1, B_2, A'_2, etc. Des inversions successives par rapport à A et à B font dériver de B successivement A_1, puis B'_1, A_2, B'_2, etc.

VI.

Les expressions que nous avons obtenues par notre première méthode sont très appropriées au calcul numérique.

Remarquons que l'on a

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\overline{\alpha M}}{\sqrt{\overline{\beta M}^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}} \\ &\quad = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \left(\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}}\right)^{\mu} q^{i(2\mu+1)} P_{\mu}(\cos V) \end{aligned}\right.$$

et

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\overline{\alpha M}}{\sqrt{\overline{\beta M}^2 s^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}} \\ &\quad = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \left(\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}}\right)^{\mu} s^{2\mu+1} q^{i(2\mu+1)} P_{\mu}(\cos V), \end{aligned}\right.$$

$P_{\mu}(\cos V)$ désignant le polynome de Legendre de degré μ. Les séries qui figurent dans le second membre sont convergentes pour tous les termes de l'expression (18). Car, les équations des deux sphères (A) et (B) étant respectivement

$$\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}} = \frac{1}{s}, \qquad \frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}} = t,$$

on voit que, dans l'espace extérieur aux deux sphères, le rapport $\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}}$ sera toujours compris entre $\frac{1}{s}$ et t.

Or, dans les formules précédentes, ce rapport est toujours multiplié par s^2 ou par q^2 au moins. Donc, les séries seront toujours convergentes, et leur convergence deviendra extrêmement rapide quand i croîtra.

Si l'on applique ces relations à tous les termes des formules (18), sauf au premier, on aura

$$(25)\quad V_M - \frac{ha}{\overline{AM}} = \frac{D}{\overline{\alpha M}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} q^{2\mu+1} \left(\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}}\right)^{\mu} P_{\mu}(\cos V)\, \frac{hs^{2\mu+1} - k}{1 - q^{2\mu+1}}.$$

On trouverait de même

$$(26)\qquad V'_M - \frac{kb}{\mathrm{BM}} = \frac{D}{\beta M}\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} q^{2\mu+1}\left(\frac{\alpha M}{\beta M}\right)^{\mu} P_\mu(\cos V)\,\frac{kt^{2\mu+1}-h}{1-q^{2\mu+1}}.$$

On peut aussi n'employer les formules (23) et (24) que pour obtenir une évaluation très approchée du reste que l'on néglige, quand on borne les séries à leurs premiers termes. On aurait, par exemple,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} V = {}& h\sum_{0}^{i-1}\frac{D}{\sqrt{\overline{\beta M}^2 s^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}} \\ & - k\sum_{1}^{i-1}\frac{D}{\sqrt{\overline{\beta M}^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 q^{-2i} - 2\,\overline{\alpha M}.\overline{\beta M}\cos V}} \\ & + \frac{D}{\alpha M}\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\left(\frac{\beta M}{\alpha M}\right)^{\mu} P_\mu(\cos V)\, q^{i(2\mu+1)}\,\frac{hs^{2\mu+1}-k}{1-q^{2\mu+1}}. \end{aligned}\right.$$

VII.

Il ne nous reste plus, pour terminer, qu'à indiquer comment on calculera s, t, q, D, α, β en fonction des rayons a, b des deux sphères et de la distance des centres c. Posons

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} & a+b+c = 2P, \qquad c-b-a = 2A, \\ & c-a-b = 2C, \qquad c+a-b = 2B; \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(29)\qquad s = \frac{\sqrt{PB}-\sqrt{AC}}{\sqrt{PB}+\sqrt{AC}}, \qquad t = \frac{\sqrt{PA}-\sqrt{BC}}{\sqrt{PA}+\sqrt{BC}}, \qquad q = \frac{\sqrt{AB}-\sqrt{PC}}{\sqrt{AB}+\sqrt{PC}},$$

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{A\alpha} &= as = \frac{1}{c}(\sqrt{PB}-\sqrt{CA})^2, \\ \overline{A\beta} &= \frac{a}{s} = \frac{1}{c}(\sqrt{PB}+\sqrt{CA})^2, \\ \overline{B\alpha} &= \frac{b}{t} = \frac{1}{c}(\sqrt{PA}+\sqrt{CB})^2, \\ \overline{B\beta} &= bt = \frac{1}{c}(\sqrt{PA}-\sqrt{CB})^2, \end{aligned}\right.$$

$$D = \frac{4}{c}\sqrt{ABCP}.$$

SUR LA FORMULE D'EULER SAVARY ET SA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. G. KOENIGS.

1. La démonstration de la formule d'Euler Savary, concernant les centres de courbure des profils conjugués au cours du mouvement d'une figure plane, exige des précautions spéciales tenant à la question des signes. La construction géométrique de cette formule, construction qui rentre dans un cas particulier du théorème de Bobillier, a l'avantage d'être affranchie de ces difficultés parce qu'elle est d'ordre purement descriptif. Si donc on peut établir directement la construction en question, on aura en fait évité tous les embarras dus à la question des signes.

C'est cette méthode que je pratique depuis plusieurs années dans mon enseignement et qui m'a fourni une démonstration tout à la fois simple et précise.

2. Je suppose connue l'existence du centre instantané O de rotation. Je suppose aussi connue cette propriété qui résulte si aisément de la composition des vitesses, que la normale commune à deux profils conjugués (C), (C'), en leur point de contact M, va passer au centre instantané O. Comme cas particulier de profils conjugués, nous aurons les deux profils primitifs (A) et (A') lieux du centre instantané dans la figure plane mobile S et dans le plan fixe S', profils qui roulent l'un sur l'autre sans glisser.

3. J'envisage alors un cas particulier, celui d'une équerre TPN, c'est-à-dire de deux droites rectangulaires PT, PN dont le point de rencontre P décrit une courbe (E) tandis que PT reste tangente à cette courbe et PN normale. D'après une propriété du centre instantané, la normale PN contient constamment ce centre et elle est ainsi le lieu de ce centre dans la figure mobile TPN. Le lieu du même centre dans le plan fixe sera donc l'enveloppe de PN, c'est-à-dire la développée de la courbe (E) et le centre instantané, point de contact de PN avec la développée, ne sera autre que le centre de courbure.

Si l'on se reporte maintenant au mouvement inverse, on voit que ce mouvement consiste dans le glissement de la courbe (E) sur la droite PT, à laquelle elle reste tangente au point P. Dans ce mouvement inverse, le centre instantané sera le même que dans le mouvement direct, ce sera encore le centre de courbure de la courbe (E).

4. Nous avons actuellement tout ce qui nous est nécessaire pour notre démonstration.

Soient (C), (C′) deux profils conjugués dans le roulement sans glissement l'un sur l'autre des deux profils primitifs (A), (A′). Les profils (A) et (A′) se touchent au centre instantané O et y ont la même tangente OT et la même normale ON. On sait de plus que le centre instantané se meut avec la même vitesse V sur les deux courbes. Prenons aussi le point M où se touchent actuellement les profils (C), (C′). La normale MU commune à ces profils passe au point O; nous appellerons MV leur tangente commune.

Imaginons alors un observateur solidaire de l'équerre TON, il verra les deux courbes (A), (A′) glisser sur le point O en restant tangentes à OT et la vitesse de glissement, la même pour les deux courbes, sera égale à — V.

Nous allons considérer le mouvement de l'équerre VMU par rapport à l'équerre TON.

Le mouvement de VMU par rapport à TON peut être regardé comme résultant du mouvement de VMU par rapport à la figure S dont (A) est solidaire et du mouvement de S par rapport à TON. Dans le mouvement de VMU par rapport à S, M décrit la courbe (C) et MV reste tangente à cette courbe. Le centre instantané est donc pour ce mouvement le centre de courbure γ de la courbe (C). Dans le mouvement de S par rapport à TON, (A) glisse sur O en restant tangente à OT, le centre instantané est donc le centre de courbure α de la courbe (A).

En conséquence, dans le mouvement résultant, à savoir celui de VMU par rapport à TON, le centre instantané est un point ξ de la droite $\gamma\alpha$.

Mais le mouvement de VMU par rapport à TON pourrait aussi être regardé comme résultant du mouvement de VMU par rapport à la figure S′ solidaire de (A′) et du mouvement de S′ par rapport

à TON; on verra de même que ci-dessus que les centres instantanés dans ces deux mouvements sont d'une part γ' centre de courbure de (C') et d'autre part α' centre de courbure de (A'). Le point ξ est donc aussi sur la droite $\gamma'\alpha'$.

En somme, le point ξ est à l'intersection des droites $\alpha\gamma$ et $\alpha'\gamma'$.

Mais, au cours du mouvement de VMU par rapport à TON, la droite MU passe au point fixe O. La normale en O à MU doit donc aller passer au point ξ.

Nous obtenons donc le théorème essentiel et fondamental :

Dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, si l'on appelle α, α' les centres de courbure des profils primitifs à un instant donné, γ, γ' les centres de courbure de deux profils conjugués relatifs à leur point de contact actuel M, O *le centre instantané, les droites $\gamma\alpha$, $\gamma'\alpha'$ se coupent sur la perpendiculaire élevée au point* O *à la normale commune aux profils conjugués.*

Si l'on prend un sens direct sur OT, puis un sens direct sur ON (faisant par exemple avec OT l'angle $+90°$); si l'on appelle θ un angle dont il faut faire tourner OT pour l'amener sur OM et, r, r' les nombres qui mesurent $\overline{O\gamma}$, $\overline{O\gamma'}$ sur l'axe ainsi obtenu; enfin si R, R' sont les nombres qui mesurent sur l'axe ON les rayons de courbure $O\alpha$, $O\alpha'$, on trouve que les équations de $\gamma\alpha$, $\gamma'\alpha'$ par rapport aux axes OT, ON sont

$$\frac{y}{R}\cos\theta - \left(\frac{\sin\theta}{R} - \frac{1}{r}\right)x = \cos\theta, \qquad \frac{y}{R'}\cos\theta - \left(\frac{\sin\theta}{R'} - \frac{1}{r'}\right)x = \cos\theta.$$

Par soustraction on obtient l'équation de la droite $O\xi$,

$$\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)y\cos\theta - \left[\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\sin\theta - \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\right]x = 0,$$

et, si l'on exprime l'orthogonalité avec la droite OP,

$$x\sin\theta - y\cos\theta = 0,$$

on trouve la condition classique

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\frac{1}{\sin\theta},$$

sans plus de difficultés pour les signes.

5. La même démonstration s'applique au cas d'une figure sphérique mobile sur sa propre sphère.

Soient (A), (A′) deux courbes sphériques qui roulent l'une sur l'autre sans glisser; O leur point de contact, α et α' les centres de courbure sphériques des courbes (A), (A′) relatifs au point O; (C) et (C′) deux profils conjugués se touchant en M et γ, γ' leurs centres de courbure sphériques; on démontrerait que les grands cercles $\gamma\alpha$, $\gamma'\alpha'$ se coupent en deux points ξ, ξ_1 qui appartiennent au grand cercle mené en N normalement au grand cercle passant par O et par M.

On rend intuitif ainsi ce résultat que, si l'on projette la figure sphérique du centre de la sphère sur le plan tangent au point O, les projections des points α, α', γ, γ' sont les centres de courbures des profils primitifs et des profils conjugués afférents au mouvement d'une certaine figure plane mobile.

J'ajoute pour terminer que c'est en employant le même mode de raisonnement qu'en 1903, j'ai étendu le théorème de Bobillier au cas du mouvement de Ribaucour, et obtenu à cet égard une proposition que j'ai énoncé aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVI, 1903, p. 354.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MOLLER (M.).— Die abgekurzte Decimalbruchrechnung. 37 pages in-8°. Vienne, A. Hölder, 1906.

M. Möller traite de la multiplication abrégée; en supposant qu'on veuille s'arranger de manière que chaque produit partiel, dans cette opération, soit approché à une demi-unité près, il étudie minutieusement l'influence des chiffres négligés au multiplicande pour chacun des multiplicateurs 1, 2, ..., 9, et cela par plusieurs méthodes différentes. De nombreux Tableaux illustrent ses explications. J. T.

SIMON (M.). — Ueber die Entwicklung der Elementar-Geometrie im xix Jahrundert. (Tome Ier des *Erganzungsbände* du *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*). Un vol. in-8°, 278 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

Voici un Livre qui intéressera sûrement tous ceux qui enseignent la Géométrie élémentaire, mais d'autres encore. Il faut admirer la patience et l'intelligence avec lesquelles M. Simon a recueilli tous ces documents, recherché et feuilleté tous ces livres, réuni une foule de renseignements qu'on ne saurait où trouver ailleurs.

Après quelques considérations générales, l'auteur parle successivement des travaux historiques, de la méthodique, des livres classiques et des recueils de problèmes. Il passe ensuite aux travaux se rapportant à des questions particulières : ils sont classés sous les rubriques suivantes : axiome des parallèles, cercle, aires, triangle, polygones, configurations générales dans le plan, relations générales et particulières dans l'espace, trigonométrie.

Il est à peine utile de faire remarquer que ces rubriques géné-

rales comportent beaucoup de sujets divers ; d'autant que M. Simon, faisant rentrer dans son cadre les travaux historiques qui ont été faits au XIXe siècle, trouve là l'occasion naturelle de donner au moins des indications sur l'histoire de chaque question importante. Prenons, par exemple, le Chapitre relatif au cercle.

On trouvera d'abord, à propos de la quadrature, un court résumé historique qui commence au papyrus de Rhind, puis une suite de constructions approchées, dont quelques-unes, fort curieuses par leur simplicité et leur exactitude, fournissent au moins d'amusants exemples de calcul numérique ; d'autres constructions ou formules se rapportent à des rectifications d'arcs ; puis viennent les diverses méthodes élémentaires pour le calcul de π, et les lunules quarrables.

L'auteur passe aux polygones réguliers : voici une suite de théorèmes généraux, des constructions générales approchées, une liste de travaux sur les constructions exactes, des constructions approchées pour des polygones particuliers, pour la division d'un angle, les courbes et les instruments qui servent à la trisection, une suite de propositions diverses, l'inversion, les inverseurs, les problèmes de contact, le problème du triangle inscrit dont les sommets passent par des points donnés, et d'autres problèmes analogues, etc. Inutile de dire que, sur tous ces sujets, on trouvera tous les renseignements bibliographiques désirables.

Par cette simple énumération relative à un seul Chapitre, le lecteur jugera des services que peut rendre le Livre de M. Simon. Le *Namenregister*, qui termine l'Ouvrage, comporte vingt-quatre pages imprimées sur deux colonnes. Dans le Livre de M. Simon, cette richesse est tout à fait à sa place, et la Table, dans laquelle on trouve les numéros des pages où chaque nom est cité, rend les recherches extrêmement commodes. Cette abondance même, parce qu'il est évidemment impossible de la faire passer dans l'enseignement, détournera peut-être quelques professeurs de l'habitude, qui se répand de plus en plus, d'accoler un nom propre à chaque théorème. A quoi bon nommer les théorèmes? Ne suffit-il pas de les connaître dans leur enchaînement logique et dans leur enchaînement historique, lorsque cela en vaut la peine, lorsqu'on sait l'époque où une idée nouvelle s'est introduite et comment elle s'est introduite? Sans compter les fausses attributions. Par exemple, je

viens d'apprendre, par le Livre de M. Simon, que M. J. Mackay a montré que la *droite de Simson* devrait s'appeler *droite de Wallace*. Assurément, les recherches historiques ne seront jamais ni trop minutieuses, ni trop précises, parce que, seule, cette précision minutieuse donne de la solidité à l'histoire des idées. Les résultats partiels de ces recherches érudites ne doivent pas pénétrer au hasard dans l'enseignement élémentaire, pour l'encombrer de noms inutiles, qu'on risque de retenir sans rien connaître sur ceux qu'ils désignaient, sur l'ensemble de leur œuvre et sur l'époque où ils vivaient, rien, pas même les propriétés « dont ils ont l'honneur de porter le nom ». Mais ces observations n'ont rien à faire avec le Livre de M. Simon, qui ne peut manquer de recevoir le meilleur accueil auprès de tous ceux qui aiment la Géométrie et qui souhaitent d'en approfondir l'histoire. J. T.

DURÈGE (H.). — ELEMENTE DER THEORIE DER FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE. In fünfter Auflage neu bearbeitet von *Ludwig Maurer*. Un vol. in-8°, x-397 p., 41 fig. Leipzig, Teubner, 1906.

Dire que la Science progresse, c'est dire que les meilleurs livres vieillissent : dès que cela est devenu possible, il est nécessaire de simplifier les éléments, d'y faire pénétrer plus d'idées et de plus générales. Faut-il rajeunir les anciens livres d'enseignement, qui ont été bons, qui le restent en partie? Faut-il en écrire de nouveaux? La première méthode est respectueuse et conservatrice du passé; elle implique chez ceux qui la suivent une modestie et un désintéressement dont d'excellents mathématiciens allemands ont donné l'exemple; peut-être aussi les éditeurs, que l'on ne saurait blâmer, y trouvent-ils leur compte.

Mais cette méthode va contre le précepte de ne point coudre du neuf avec du vieux, dont l'autorité n'est pas discutable, et, de fait, on voit peu à peu, ou tout d'un coup, un texte nouveau se substituer au texte ancien; le nom de l'ancien auteur n'est plus qu'un hommage, ou qu'une étiquette. Peut-être M. Maurer, qui

nous donne ainsi une cinquième édition du livre de Durège, est-il de ceux qui ont le mieux respecté l'œuvre de leur prédécesseur, puisqu'il nous dit qu'il en a gardé l'esprit et qu'il a reproduit la Préface, intégralement.

A la vérité, cette Préface méritait d'être conservée; Durège y expose, de la façon la plus simple, avec des exemples aussi clairs et aussi modestes qu'il est possible, ses idées sur la généralisation de la notion de nombre, sur l'introduction successive, à partir du nombre entier, des nombres négatifs, fractionnaires, irrationnels, imaginaires. Ces idées sont devenues classiques depuis que Hankel les a résumées sous un nom; mais le *principe de permanence* est nettement exposé dans cette Préface de Durège.

Quant au livre de M. Maurer, il est assurément de ceux qui peuvent rendre les meilleurs services aux étudiants; il ne suppose chez le lecteur que des connaissances très élémentaires; il pourrait être lu très facilement, chez nous, par un élève sortant de la classe de mathématiques spéciales; il conduit ce lecteur, par un chemin aisé, à travers des exemples instructifs et parfaitement choisis, qui lui seront très utiles s'il veut continuer ses études mathématiques, jusqu'à une connaissance véritable de la théorie des fonctions d'une variable complexe, dans ce qu'elle a de plus essentiel. Et ce n'est pas seulement une *vue de pays* que le lecteur aura gagné; parvenu au bout du livre, il sera en mesure de tirer parti de ses connaissances, et de les appliquer; il en apercevra devant lui les prolongements infinis, et je serais étonné s'il n'était point tenté de les poursuivre.

L'exposition est dominée par la pensée de Riemann, ou plutôt de Cauchy, car l'étude des surfaces à plusieurs feuillets et des résultats qui sont propres à Riemann tient peu de place, moins de place que dans le livre de Durège; mais la doctrine de Weierstrass y est aussi exposée, et la tendance à présenter les choses sous une forme arithmétique, à ne pas se contenter toujours de l'intuition géométrique, est manifeste. Bien entendu, dans un livre aussi court, l'auteur n'a pas eu la prétention de s'assujettir jusqu'au bout aux exigences, parfois fastidieuses, d'une exposition purement arithmétique, mais il a tenu à en expliquer les principes essentiels, et l'on doit reconnaître que c'est là ce qui importe dans l'enseignement et dans un livre, dont le but avoué est de mettre le

lecteur au courant des méthodes si puissantes que fournit la représentation géométrique.

Suivant une habitude très répandue en Allemagne, qui facilite d'ailleurs la lecture, et qui est peut-être nécessitée par la grande liberté des maîtres et la diversité des enseignements élémentaires, M. Maurer reprend les choses au début, introduit les nombres irrationnels (au sens de Dedekind), rappelle les notions et propositions fondamentales du calcul différentiel et intégral, définit les nombres complexes et explique leur représentation sur le plan ou la sphère. Après ces deux Chapitres d'introduction, il entre au cœur du sujet : la fonction entière fournit un premier exemple d'une fonction analytique ; celle-ci est définie, dans une certaine portion du plan, comme ayant une dérivée continue ; de cette définition sortent la représentation conforme d'une part et, d'autre part, les propositions fondamentales de Cauchy, sur les intégrales prises entre des limites imaginaires et les résidus. Que M. Maurer, parmi les exemples et les applications, ait donné la détermination des sommes arithmétiques de Gauss, c'est la marque des tendances élevées de son livre, dont les apparences sont si modestes.

L'auteur passe ensuite aux séries et produits infinis. On remarquera la façon simple et vraiment naturelle, au point de vue où il s'est placé, dont il déduit du théorème de Cauchy, sur l'intégrale

$$\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

le caractère analytique des fonctions représentées par des séries ou des produits uniformément convergents de fonctions analytiques. C'est, bien entendu, de ce même théorème que sont tirées les séries de Taylor et de Laurent.

Un Chapitre est consacré aux fonctions uniformes, aux fonctions transcendantes élémentaires directes et inverses ; un autre, aux fonctions doublement périodiques, qui contient, outre la démonstration des propositions fondamentales sur ces fonctions, la définition et la représentation des fonctions $\wp$, σ, ζ de Weierstrass et de la fonction H de Jacobi.

L'auteur arrive aux fonctions à détermination multiple : on remarquera le parti qu'il tire de l'*étoile* de M. Mittag-Leffler pour la

définition des surfaces de Riemann, puis l'application du principe de symétrie (Schwarz) à la représentation conforme d'un rectangle sur le demi-plan.

Un Chapitre sur les fonctions algébriques contient, outre les propositions indispensables pour la définition de ces fonctions, la détermination des cycles, les explications essentielles concernant la surface de Riemann correspondante, avec un exemple numérique traité en détail.

Enfin, le neuvième et dernier Chapitre, qui n'est pas le moins intéressant et le moins instructif du livre, se rapporte aux fonctions définies par une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients rationnels. En se bornant à ce cas particulier, l'auteur a pu éviter l'appareil de formules qu'exige la théorie générale, tout en faisant ressortir clairement les idées fondamentales concernant la nature des solutions, le groupe de l'équation, etc. L'auteur insiste comme il convient sur la classe d'équations auxquelles le nom de Fuchs est attaché et sur la série hypergéométrique; il conduit le lecteur jusqu'aux fonctions automorphes, dont il dit juste ce qu'il faut pour faire entrevoir au lecteur la richesse d'une théorie qu'il ne voulait pas développer. J. T.

GUTZMER (A.). — Geschichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung von ihrer Begründung bis zur Gegenwart dargestellt. 1 vol. in-8°, 67 p., Leipzig, Teubner; 1904.

M. Gutzmer retrace en quelques pages intéressantes la naissance, la vie, les travaux de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* et publie divers documents relatifs à cette importante association.

Elle a été fondée définitivement en 1890; son activité a été tout de suite considérable; il suffit (pour ne rappeler que ceux-là) de citer les rapports de M. Franz Meyer sur la théorie des invariants, de MM. Brill et Nöther sur le développement de la théorie des fonctions algébriques, de M. D. Hilbert sur la théorie des corps algébriques, de M. Czuber sur la théorie des probabilités.

de M. Schœnfliess sur la théorie des ensembles, de M. Burckhardt sur les développements suivant les fonctions oscillantes, etc.; tous ces beaux rapports ont paru, avec de nombreux et importants Mémoires, dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*. On peut dire qu'ils préparaient l'Encyclopédie mathématique : au reste, la part que l'association a prise dans la création et la réalisation de cette Encyclopédie est prépondérante.

Elle a tenu aussi un rôle considérable dans les différents congrès de mathématiciens qui se sont réunis depuis sa fondation à l'occasion des expositions universelles et qui, maintenant, sont périodiquement organisés.

Elle s'est occupée très activement de la création d'une série de modèles mathématiques et mécaniques qui ne peuvent avoir, en se répandant et en se multipliant, que la meilleure influence sur l'enseignement et le progrès de la Science.

Elle se préoccupe de l'enseignement mathématique à ses divers degrés, de la formation des maîtres ; elle a pris part à ce mouvement de réformes dont le *Bulletin* a eu, à plusieurs reprises, l'occasion d'entretenir ses lecteurs. Signalons l'existence d'une commission chargée d'étudier, au point de vue statistique, les oscillations du nombre d'étudiants en mathématiques. Signalons encore le projet d'une bibliothèque mathématique centrale, les projets relatifs à la publication de tables.

On trouvera dans le livre de M. Gutzmer une liste chronologique des réunions annuelles tenues à Heidelberg, Brême, Halle, Munich, Vienne, Lübeck, Francfort, Brunswick, Dusseldorf, Munich, Aix, Hambourg, Karlsbad, Kassel, avec un court résumé de ce qui s'y est passé de plus essentiel, puis une suite de documents ; une liste nécrologique, la liste des membres vivants en 1904, dont le nombre dépassait 600.

Enfin le Volume se termine par une Table générale des douze premiers Tomes du *Jahresbericht*, dressée par M. E. Wölffing.

J. T.

EBNER (F.). — Leitfaden der technisch-wichtigen Kurven. 1 vol. in-8°, VIII-197 pages, 93 figures. Leipzig, Teubner, 1906.

La trajectoire d'un point d'une bielle, ou, si l'on veut, d'un point invariablement lié à une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent des cercles fixes, présente des propriétés géométriques très intéressantes, dont les plus belles ont été découvertes par M. S. Roberts. En raison même de l'importance de cette courbe pour la Mécanique appliquée, M. Ebner a jugé avec raison qu'il serait utile d'exposer systématiquement ces propriétés, et qu'une étude un peu approfondie de cette courbe pourrait fournir d'excellents exercices de Géométrie analytique pour les étudiants qui recherchent la carrière d'ingénieur. Il est assurément désirable de fournir à ces étudiants des exemples dont ils comprennent immédiatement qu'ils ont une portée pratique et pourront leur être utiles plus tard. Les calculs qu'entraîne l'étude analytique de cette courbe du sixième degré sont un peu longs et difficiles : ils pourraient rebuter des lecteurs novices qui ne seraient pas guidés ; le livre de M. Ebner leur fournira le guide dont ils ont besoin. Les figures, en particulier, sont faites avec un grand soin et montrent clairement les diverses formes auxquelles on peut avoir affaire.

L'auteur commence naturellement par le cas simple où les deux cercles se réduisent à deux droites; il traite ensuite le cas d'une droite et d'un cercle, puis le cas général, en insistant avec les détails qui conviennent sur les mécanismes qui servent dans la pratique, sur la courbe de Watt en particulier. Celle-ci lui donne l'occasion de dire quelques mots des inverseurs.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à d'autres courbes qui intéressent aussi les industriels, à savoir les courbes (*Potenzcurven*) dont l'équation est $y = ax^n$ et celles (*zyklische Kurven*) qui peuvent être définies par des équations de la forme

$$x = a\cos\alpha t + b\cos\beta t,$$
$$y = a\sin\alpha t + b\sin\beta t.$$

DUHEM (P.). — LES ORIGINES DE LA STATIQUE, t. II. 1 vol. in-8°, 364 pages. Paris, Hermann ; 1906.

Ce second Volume des *Origines de la Statique* sera lu avec le même intérêt que le premier. Les mêmes conclusions philosophiques sur la vie et l'organisation de la Science en ressortent : il n'y a point, dans l'histoire de la Science, de générations spontanées : les doctrines scientifiques se continuent, se perpétuent, se dépouillent lentement de ce qu'elles contiennent d'erreur, se dégagent peu à peu de la confusion primitive, tendent vers la vérité, y parviennent enfin après de longs détours et de nombreux retours en arrière. M. Duhem excelle à rendre cette continuité, à retrouver chez d'autres que les prétendus inventeurs le germe des inventions et souvent les inventions même, à montrer aussi, mêlées à des vérités nouvelles, de vieilles erreurs qui survivent longtemps après le moment où elles auraient dû disparaître. Les contradictions qu'une science en formation porte en elle-même peuvent vivre longtemps ensemble, avant d'éclater aux yeux. M. Duhem met aussi très nettement en évidence le rôle, dans l'organisation des idées les plus essentielles, de l'erreur proprement dite, des explications fallacieuses, de la confusion des mots, et montre éloquemment la lente et mystérieuse attraction vers la vérité. Si même il estimait d'abord que M. Duhem est disposé à exagérer la continuité dans l'évolution de la Science ; s'il estimait que des découvertes, des créations indépendantes, des rencontres dans le vrai ont pu se produire là où M. Duhem voit filiation ou plagiat, le lecteur se rendra d'ordinaire à l'évidence des preuves, à la force des présomptions qu'apporte le rapprochement des textes ; il s'émerveillera de la patience et de l'ingéniosité que l'auteur a mises à découvrir ces communications insoupçonnées, à dévoiler les fraudes, à faire parler les silences fâcheux. M. Duhem aime la vérité avec trop de passion pour se soucier de la laideur des hommes, de ceux même à qui va l'admiration universelle, à qui elle va justement, de son propre aveu. On le soupçonnerait parfois d'avoir plaisir à démasquer cette laideur. Lorsqu'il excuse le silence sur les sources, parce qu'il s'agit de vérités tombées dans le patrimoine commun, on peut l'en

croire. Peut-être néglige-t-il trop une explication, qui est loin d'ailleurs d'être toujours une excuse, et qui se tire de la nature même des vérités mathématiques.

Ceux qui les ont vraiment comprises se les sont *appropriées* par là même ; ils les possèdent ; ils ne les regardent plus comme extérieures à eux ; elles sont un accroissement de leur raison. Il leur faut vouloir sortir d'eux-mêmes, pour penser à l'origine de ces vérités. Qu'il y ait, à le faire, un devoir strict, c'est ce qui n'est pas douteux ; mais c'est seulement dans les temps modernes que ce devoir est apparu avec toute sa clarté. Nous ne valons peut-être pas mieux que nos ancêtres ; au moins, connaissons-nous mieux quelques-unes de nos obligations. Il serait possible de citer d'autres exemples.

Le premier Volume des *Origines de la Statique* nous racontait l'histoire du levier et du plan incliné, de la notion de travail, mise définitivement en évidence par Descartes. Le second Volume contient trois Chapitres et une Conclusion.

Le premier Chapitre est intitulé : Les propriétés mécaniques du centre de gravité, d'Albert de Saxe à Evangelista Torricelli ; il comprend deux périodes distinctes séparées par la révolution copernicienne.

M. Duhem montre combien, chez les anciens, la notion de centre de gravité était vague et confuse : ni Archimède, ni Pappus ne paraissent avoir une notion précise des conditions d'existence du centre de gravité, bien qu'ils sachent déterminer les centres de gravité de certaines figures géométriques.

Peu à peu s'ébauche la doctrine suivante, admise sans contestation pendant des siècles :

« Il est en tout grave un point où sa pesanteur est comme concentrée ; c'est le centre de gravité ; en tout grave, la pesanteur est un désir d'unir ce centre de gravité au centre de l'Univers. Si son centre de gravité coïncide avec le centre de l'Univers, le grave est en repos. Si le centre de gravité est hors du centre de l'Univers, le premier point tend à joindre le second et, s'il n'en est empêché, il se dirige vers lui en ligne droite. La Terre est un grave semblable aux autres; elle joint donc son centre de gravité au centre de l'Univers ; et c'est ainsi que la Terre demeure immobile au centre du Monde. »

Cette doctrine a son germe dans Aristote, son plein épanouissement dans Albert de Saxe ([1]) (*Albertus de Saxonia*), qui enseigna à l'Université de Paris, de 1350 à 1361, la philosophie scolastique, et dont la doctrine a eu dans la suite un très long retentissement. Albert de Saxe hésite et varie sur la réponse à cette question : est-ce le centre de gravité de la partie solide, ou de l'ensemble formé par l'eau et cette partie solide qui coïncide avec le centre de l'Univers ? Ce centre d'ailleurs doit se déplacer, parce que le Soleil échauffe tantôt un hémisphère, tantôt un autre, par suite aussi de la continuelle érosion de la surface terrestre.

C'est cette attraction vers le centre de l'Univers qui explique aussi la forme ronde de la Terre. M. Duhem nous retrace l'intéressante histoire de cette explication, depuis Aristote, auquel remontent bon nombre des arguments en faveur de la rotondité de la Terre qu'on développe encore dans toutes les écoles, jusqu'à Albert de Saxe qui enseigne, d'une façon précise, le moyen expérimental de s'assurer de la forme sphérique. Celui-ci mettait en pratique le procédé pédagogique qui consiste à étonner les auditeurs. Il leur disait : « Si l'on creuse un puits au fil à plomb, ce puits sera plus large à l'orifice qu'au fond.... Lorsqu'un homme se promène à la surface de la terre, sa tête va plus vite que ses pieds.... » Il y a, dans le livre de M. Duhem, une grande page de citations de ce genre. Elles méritaient que l'auteur s'y arrêtât à cause de la grande et longue influence qu'a eue l'enseignement du philosophe du quatorzième siècle, influence qu'il suit d'abord jusqu'à Léonard de Vinci : elle est manifeste chez ce dernier, mais l'apport réel de Léonard de Vinci à la constitution de la Statique, déjà mis en évidence dans le premier Volume de M. Duhem, apparaît ici considérable, puisqu'il connaît le rôle de ce qu'on a appelé plus tard le polygone de *sustentation* et qu'on trouve chez lui le germe de l'importante proposition connue sous le nom de principe de Torricelli, d'après laquelle un système de corps pesants est en équilibre quand le centre de gravité de ce système est le plus bas possible ; cette proposition, M. Duhem en retrouve la formule, de moins en moins confuse, dans l'*Opus novum* et dans le *De subtilitate* de Cardan, dans la *Paraphrasis* de Guidobaldo del Monte, dans les

([1]) M. Duhem l'identifie avec *Albertutius*.

Exercitationes de Baldi, dans le *Sinopsis* de Mersenne, enfin dans le *Traité della Scienza mecanica* et dans les derniers écrits de Galilée, où elle ne laisse plus rien à désirer. A la fin de l'année 1639, Galilée est en pleine possession des deux théorèmes suivants :

« Un ensemble quelconque de poids ne peut jamais se mettre de lui-même en mouvement, si ce mouvement ne produit un abaissement de son centre de gravité. »

« Lorsqu'un tel ensemble de poids descend en chute libre et sans vitesse initiale, son centre de gravité décrit une verticale. »

Mais revenons à la doctrine d'Albert de Saxe et au « centre de l'Univers ». Il semble qu'elle ait dû disparaître avec le système de Copernic, il n'en est rien ; elle s'accommode au besoin de ce système. « Partisans et adversaires du système de Copernic s'entendent désormais pour présenter la doctrine d'Albert de Saxe à peu près sous la même forme : cette forme, entrevue par Albert de Saxe lui-même, est celle qu'ont proposée Copernic et Benedetti. Une seule divergence sépare les deux Écoles. Pour les partisans du système géocentrique, le point où tendent les graves, où se placent le centre de gravité de la Terre et le centre de la surface des mers, est le centre même de l'Univers ; pour les disciples de Copernic, ce point est un point particulier à l'astre que nous nommons Terre, et en chaque astre il existe un point analogue ; au point de vue de la Mécanique céleste, la différence est grave ; elle est sans importance pour la Statique. » Et, en effet, longtemps encore, M. Duhem retrouvera cette doctrine acceptée comme un dogme, longtemps après que Képler aura écrit :

« .... Un point mathématique, que ce soit le centre du Monde, ou que ce soit un autre point, ne saurait mouvoir effectivement les graves ; il ne saurait non plus être l'objet vers lequel ils tendent. Que les physiciens prouvent donc que telle force peut appartenir à un point, qui n'est pas un corps, et qui n'est conçu que d'une manière toute relative !

» Il est impossible que la forme substantielle de la pierre, mettant en mouvement le corps de cette pierre, cherche un point mathématique, le centre du Monde, par exemple, sans souci du corps dans lequel se trouve ce point. Que les physiciens démontrent donc que les choses naturelles ont de la sympathie pour ce qui n'existe pas !

» Voici la *vraie doctrine de la gravité:* la gravité est une affection corporelle mutuelle entre corps parents, qui tend à les unir et à les conjoindre; la faculté magnétique est une propriété du même ordre ; c'est la Terre qui attire la pierre, bien plutôt que la pierre ne tend vers la Terre. Même si nous placions le centre de la Terre au centre du Monde, ce n'est pas vers le centre du Monde que les graves se porteraient, mais vers le centre du corps rond auquel ils sont apparentés, c'est-à-dire vers le centre de la Terre.... »

C'est au commencement de son second Chapitre, consacré aux géostaticiens, que M. Duhem cite cette page ; d'après lui, les critiques de Képler, malgré leur profondeur et leur éloquence, contribuèrent moins à ruiner la doctrine d'Albert de Saxe que les erreurs auxquelles cette doctrine conduisit les meilleurs géomètres. Il retrace, de la façon la plus intéressante, le débat entre Fermat d'une part et Pascal, Roberval, Descartes de l'autre. On se plaira à voir comment l'auteur arrive à retrouver l'état d'esprit d'un Fermat, et à expliquer les erreurs, qui nous semblent monstrueuses, où est tombé ce géomètre, d'un génie si rare et si pénétrant. De cette discussion mémorable ressort une conséquence essentielle : « L'idée d'un centre de gravité invariablement lié à chaque corps solide n'a de sens qu'autant que les verticales sont traitées comme parallèles entre elles ; c'est donc une absurdité que de vouloir attribuer à ce point une tendance à s'unir au centre de la Terre; la seule considération du centre de la Terre suffit à rendre illégitime la considération du centre de gravité. » M. Duhem donne des raisons qui permettent de croire que Torricelli connaissait cette discussion, et les contradictions auxquelles on aboutit lorsqu'on traite du centre de gravité sans admettre le parallélisme des verticales et cela expliquerait pourquoi Torricelli a pris soin de formuler, avec tant de précision, cette dernière hypothèse. « Par là il a profondément transformé le principe de Statique qu'il tenait de Galilée ; il a fait disparaître toute trace de la doctrine erronée à laquelle ce principe devait sa naissance. Comme mainte proposition de Physique, c'est en reniant ses origines que la loi de Torricelli est devenue une irréprochable vérité. »

Le dernier Chapitre est intitulé : « La coordination des lois de

la Statique. » M. Duhem nous décrit en particulier ce qui reste du grand Traité de Mécanique que Roberval semble avoir entièrement composé et dont nous n'avons que des ébauches, des fragments et une réduction très élémentaire, destinée surtout aux artisans ; il montre ensuite comment la notion de travail, précisée par Descartes pour la pesanteur, est étendue par Wallis, dans son grand Traité, aux forces quelconques, et comment se prépare ainsi l'énoncé définitif, par Jean Bernoulli, de ce principe des déplacements virtuels qui semble devoir, d'ici longtemps, dominer la Mécanique tout entière. C'est dans une lettre à Varignon, comme on sait, que Jean Bernoulli énonce ce principe : c'est à ce progrès essentiel que M. Duhem limite la période des origines :

Il est fort curieux de voir Varignon, dont le mérite n'est pas douteux, regarder encore, alors que Newton publie ses Principes, les forces comme proportionnelles aux vitesses ; les textes que cite M. Duhem ne laissent guère de doutes : combien vivace a été la doctrine d'Aristote !

Je n'ai pu que toucher un petit nombre des points traités par M. Duhem et m'efforcer de faire ressortir un peu l'esprit de son livre. L'érudition qu'il y a déployée est considérable. Je me bornerai, pour en donner quelque idée, à dire que la Table des auteurs cités ne tient pas moins de 9 pages, imprimées sur 2 colonnes.

J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Sitzungsberichte der berliner mathematischen Gesellschaft. Herausgeg. vom Vorstande der Gesellschaft. 4 Jahrg. Gr. in-8°, III-80 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 2 m. 80 pf.

VALLÉE-POUSSIN (Ch. J. DE LA). — *Cours d'Analyse infinitésimale.* T. II. In-8°. Löwen, Uystpruyst. 12 fr.

Annales de l'Observatoire de Bordeaux; publiées par *G. Rayet.* T. XII. In-4°, 498 p. et portrait. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Ball (L. de). — *Refraktionstafeln.* (Mit deutschem u. französ. Text.) In-8°, xiv-18 p. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m. 40 pf.

Bonola (R.). — *La Geometria non-euclidea.* In-8°, Bologna, Zanichelli. 5 l.

Laisant (Ch.-A.). — *Initiation mathématique.* In-8°, Genève, Georg et Cº. 2 fr.

Lebesgue (Henri). — *Leçons sur les séries trigonométriques*, professées au Collège de France. In-8°, vii-128 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

Lehrbuch der Navigation. Herausgeg. vom Reichs-Marine-Amt. 2. Aufl. 2. Bde. Gr. in-8°. Berlin, Mittler und Sohn. 16 m. 60 pf. Relié, 19 m.

1. Terrestrische Navigation u. Anleitg. zu gelegentlichen Vermessungen. xviii-448 p. avec 4 pl. et 162 fig. — 2. Astronomische Navigation u. Lehre von den Gezeiten. xviii-448 p. avec 2 pl. et 179 fig.

Lesser (Osk.). — *Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima.* Gr. in-8°, vii-121 p. avec 30 fig. Berlin, Salle. 1 m. 60 pf.

Pesloüan (L. de). — *N.-H. Abel; sa vie et son œuvre.* In-8°, xiii-169 p. avec portrait. Paris, Gauthier-Villars. Cartonné, 5 fr.

Pincherle (S.). — *Lezioni di algebra complementare dettate nella r. Univ. di Bologna. Analisi algebrica.* In-8°. Bologna, Zanichelli. 10 l.

Werkmeister (P.). — *Graphische Tachymetertafel für alte Kreisteilung. Entworfen f. Entferngn. von 5 bis 500 m. u. für Höhenunterschiede von* 0, 1. *bis* 70 *m.* Gr. in-4°, 15 p. sur carton. Stuttgart, Wittwer. Avec échelle en celluloïd. 4 m. 60 pf.

Wright (T.-W.). — *Adjustment of observations.* 2ᵉ édit. In-8°. London, Constable. 12 sh. 6 d.

Zindler (Konr.). — *Liniengeometrie mit Anwendungen.* (*Sammlung Schubert* LI.) T. II. In-8°, vii-252 p. avec 24 fig. Leipzig, Göschen. Relié, 8 m.

Ahrens (Rich.). — *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate u. ihre spezielle Anwendung auf die Geodäsie* In-8°, iv-102 p. avec 13 fig. Leipzig, Göschen. 2 m.

D'Angelo (J.). — *Le tachéomètre et ses applications aux levers de plans et aux tracés de chemins de fer.* In-8°. Liége, Béranger. 10 fr.

Ball (Sir R.-S.). — *Great Astronomers.* New edit. In-8°. 384 p. avec illustr. London, Pitman. 2 sh. 6 d.

Clebsch (Alfr.). — *Vorlesungen über Geometrie, mit besond. Benutzg. der Vorträge* von C., bearb. u. herausgeg. von Ferd. Lindemann. 2. Aufl. 1. Bd. 1. Tl. 1. Lfg. Gr. in-8°. 480 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 16 m.

Neumann's (Frz.). — *Gesammelte Werke*. 2. Bd. Herausgeg. v. seinen Schulern. Mit 1 Bildnis. In-8°, xvi-620 p. Leipzig, Teubner. 36 m.

Newcomb (S.). — *Compendium of spherical Astronomy; with its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars*. In-8°, 492 p. London. Macmillan. 12 sh. 6 d.

Otto (Frdr.-Aug.). — *Die polynomischen Lehrsätze. Neues Verfahren zur Berechng. von Potenzen u. Wurzeln u. zur Bildung u. Lösg. von Gleichungen*. In-8°, iii-16 p. Essen, Otto. 1 m.

Schuster (O.). — *On the periodicities of Sunspots*. In-4°, London, Dulau. 1 sh. 6 d.

Wilczynski (E.-J.). — *Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces*. viii-298 p. (*Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen* XVIII. Bd.) Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. Relié, 10 m.

Kruger (L.). — *Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometr. Netze*. iii-34 p. (*Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Instituts*. Neue Folge. Nr. 25. In-8°. Leipzig, Teubner.) 2 m. 80 pf.

Caldarera (F.). — *Corso di meccanica razionale*. Vol. III. In-8°, Palermo, Tip. Matematica. 11 l.

Lorentz (H.-A.). — *Abhandlungen über theoretische Physik*. (In 2 Bdn.) 1. Bd. 1. Lfg. In-8°, 298 p. avec 8 fig. Leipzig, Teubner. 10 m.

Laplanche (G.-C. de). — *Unités électriques et Unités mécaniques et leurs relations*. 2e édit. In-16, 135 p. Paris, Vuibert et Nony.

Baker (W.-M.). — *Algebraic Geometry. A new treatise on analytical conic sections*. In-8°, 358 p. London, Bell. 6 sh.

Barnes (E.-W.). — *Asymptotic exposition of integral functions defined in Taylors series*. In-4°. London, Dulau. 2 sh.

Fayet. — *Recherches concernant les excentricités des comètes* (thèse). In-4°, 114 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LAURENT (H.), ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — La Géométrie analytique générale. 1 vol. gr. in-8°, VII-151 pages. Paris, librairie scientifique A. Hermann, 1906. Prix : 6fr.

Cet Ouvrage est à la fois philosophique et mathématique, et il a pour auteur un vrai mathématicien. Pour en faire comprendre l'esprit, dès l'abord, rien ne me semble préférable à la reproduction de quelques extraits de la Préface.

« La question précise que je me propose de traiter, dit M. H. Laurent, est la suivante : *Quelles sont les hypothèses irréductibles qu'il faut faire pour retrouver les propositions de la géométrie d'Euclide?* »

Établissant ensuite une distinction capitale entre la notion d'*hypothèse* et la notion d'*axiome*, « je me suis demandé, ajoute-t-il, s'il ne serait pas possible d'édifier une science abstraite et logique, n'ayant d'autre rapport avec la Géométrie que les noms des objets sur lesquels on spécule, ces objets n'ayant qu'une existence aussi abstraite que les nombres ».

Partant de là, l'auteur s'attache à définir avec précision les éléments : un point, dans un espace à n dimensions, est l'ensemble de n quantités, appelées *coordonnées* de ce point. Si les n coordonnées, variables, dépendent de p paramètres distincts, le point décrit une variété à p dimensions; pour $p = n - 1$, cette variété est une surface.

Si l'on se borne dès lors au cas où $n = 3$, et si l'on invoque les propriétés classiques des substitutions orthogonales, on arrive à montrer que la géométrie euclidienne repose sur les deux postulatums (ou sur les deux hypothèses) qui suivent :

1° Par tout point de l'espace, on peut faire passer trois surfaces coordonnées, en sorte que tout point est déterminé par trois nombres.

2° Tout déplacement sans changement de forme est une substitution orthogonale.

En modifiant la définition du déplacement sans changement de forme, on obtient d'autres géométries, celles de Riemann et de Lobatschewsky en particulier.

Suivant le mode adopté pour numéroter les points de l'espace, définis par leurs coordonnées, les mots *plan, droite, distance, angle*, par exemple, s'appliquent à des choses très différentes. Il s'ensuit qu'il y a une infinité de géométries euclidiennes, et qu'on ne saurait définir *a priori* ni le plan, ni la droite. De là résulte, suivant l'auteur (et il a bien raison à notre avis), la nécessité de réformer d'une façon fondamentale l'enseignement classique de la Géométrie en ce qui concerne le Ier Livre et le Ve.

Donnons maintenant une idée générale de la composition du Livre, par la simple énumération des titres des dix Chapitres qu'il contient :

Introduction. Les éléments. Mesure de l'étendue des variétés. Incursion dans le domaine concret. Les contacts. Surfaces algébriques. Les espaces homogènes. Surfaces du 2e degré. Quelques lieux géométriques; théorèmes. Géométries non euclidiennes.

Il est facile de deviner, à cette simple lecture, l'étendue du champ de généralisation ouvert à un esprit logique et inventif comme celui de M. Laurent, dans la voie où il s'est engagé. Nous nous bornerons à indiquer un très petit nombre d'exemples.

Il donne (p. 70-74) la forme explicite de la résultante d'un système de n équations.

Après avoir exposé un théorème de Poinsot relatif aux normales aux surfaces, il établit (p. 91-93) une proposition analogue, et fort intéressante, relative à un plan mobile et à une propriété du point de contact avec l'enveloppe.

On connaît le célèbre théorème de Chasles sur les points de contact des plans, parallèles à un plan donné, tangents à une surface algébrique. M. Laurent démontre élégamment ce théorème (p. 128-130), en indique de nombreuses généralisations, et montre que la proposition dont il s'agit n'est que la première d'une foule d'autres analogues.

Enfin (p. 140), on ne saurait assez attirer l'attention du lecteur sur une remarque profondément juste, que jamais nous n'avons

vue aussi nettement présentée; c'est que le principe d'homogénéité et le postulatum d'Euclide ne sont, au fond, qu'une seule et même proposition, si bien qu'en admettant le premier comme vrai, le second serait démontré. Si cette vérité avait été aussi répandue qu'elle mériterait de l'être, bien des discussions inutiles, bien des polémiques vaines auraient sans doute été épargnées.

En somme, l'Ouvrage que nous signalons, peu volumineux, extrêmement original, est très riche en aperçus nouveaux et en résultats intéressants. Il mérite de retenir l'attention de tous les professeurs consciencieux, qui prennent à tâche de procéder sans cesse à une revision des principes fondamentaux servant de base à leur enseignement. Peut-être même un petit nombre de *très bons* élèves trouveront-ils profit à la lecture de *la Géométrie analytique générale*. Mais il faut pour cela deux conditions : la première, c'est qu'ils fassent, de cette lecture, une véritable et sérieuse étude; la seconde, c'est qu'ils aient déjà une certaine préparation philosophique de l'esprit, nécessaire pour ne pas se méprendre sur les idées de l'auteur.

Pour mon compte, en parcourant les premières lignes, je me demandais avec inquiétude si j'allais me trouver en présence d'une nouvelle contribution de cette école philosophique ultra-moderne qui prétend ne se servir que de la logique pure, et, en fondant quelque chose sur rien du tout, finit par se glorifier de ce qu'elle étudie des choses qu'elle ne connaît pas, sans savoir si ce qu'elle dit est vrai.

J'ai été bientôt rassuré. Je l'ai été surtout en lisant (p. 60) qu'il serait nécessaire « de reconnaître à la Géométrie son véritable caractère, qui est celui d'une *science physique* ».

J'applaudis d'autant plus à cette déclaration que, dans ma conviction profonde, toutes les sciences sont physiques, à des degrés divers.

C.-A. LAISANT.

DUHEM (P.). — ÉTUDES SUR LÉONARD DE VINCI. CEUX QU'IL A LUS ET CEUX QUI L'ONT LU. 1re série. Un vol. in-8°; VII-355 pages. Paris, Hermann. 1906.

Ces Études, que M. Duhem a publiées pour la plupart dans le *Bulletin italien* de MM. Radet et Bouvy, sont contemporaines de ses *Origines de la Statique*, dont nous avons rendu compte récemment; elles les complètent heureusement sur quelques points. On y retrouve les mêmes préoccupations et les mêmes hommes : seulement, ici, Léonard de Vinci tient un rôle central : en lui viennent se condenser, se transformer, vivre d'une vie nouvelle et intense, la science hellène et la science du moyen âge; M. Duhem a étudié patiemment et passionnément ce qui nous reste de ses Notes; il a su, bien souvent, retrouver l'ordre de ces brouillons, les dater approximativement, reconnaître avec sûreté, grâce à quelques indications données par Léonard lui-même, l'origine de ses réflexions : il s'est émerveillé de la vigueur de ses méditations, obstinément poursuivies; il s'est indigné de l'incurie avec laquelle les manuscrits du grand artiste, du géomètre subtil, du penseur pénétrant ont été traités; il a déploré leur perte; heureusement, les voleurs en ont profité, et en ont fait profiter les autres; à travers les plagiats de Cardan, de Bernardino Baldi, de Benedetti et d'autres encore, en passant par l'honnête Mersenne, M. Duhem suit la pensée de Léonard de Vinci jusqu'à Roberval, jusqu'à Descartes, jusqu'à Pascal, jusqu'à ce qu'elle prenne une forme définitive et classique.

Une idée essentielle domine l'œuvre historique de M. Duhem; c'est la continuité dans le développement de la Science; les plus merveilleuses floraisons ont été précédées par un long travail de germination; il excelle à retrouver les germes obscurs, à retracer la filiation des idées; laissons-le parler lui-même sur un des points les plus importants de ses Études (1) :

« La lecture du *Tractatus proportionum* d'Albert de Saxe,

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXLIII, p. 947.

de ses *Quæstiones in libros de cælo et mundo* a suggéré à Léonard une part très considérable de ses opinions scientifiques et, particulièrement, de celles qui ont influé sur le développement ultérieur de la Science. Aux exemples que nous en avons donnés dans nos *Origines de la Statique*, nous en ajoutons ici deux nouveaux.

» Aristote et ses premiers commentateurs croyaient que le mouvement du projectile se maintient par l'action de l'air ébranlé; de bonne heure, on proposa d'attribuer ce mouvement à un certain *impetus* imprimé dans le mobile par l'instrument qui le projette; on ne saurait indiquer à quel moment cette notion de l'*impetus*, d'où les notions modernes de *quantité de mouvement* et de *force vive* sont issues par une filiation continue, a été imaginée; mais elle avait déjà cours au XIIIe siècle, puisque saint Thomas d'Aquin prend soin de la réfuter; toutefois la théorie de l'*impetus* ne semble pas avoir pris un développement important avant les écrits d'Albert de Saxe; en ces écrits, elle donne naissance à une véritable Dynamique qui, par évolution graduelle, est devenue notre Dynamique moderne. La théorie de l'*impetus* devint bientôt classique dans les Universités dont les maîtres subissaient l'influence des *terminalistes* de l'Université de Paris; Léonard de Vinci la connut par les écrits d'Albert de Saxe et la prit souvent pour objet de ses méditations.

» Dès l'origine de la théorie de l'*impetus*, on donnait souvent à cette qualité le nom de *gravité accidentelle;* Léonard de Vinci s'est attaché à mettre en évidence l'analogie entre la *gravité accidentelle* et la *gravité naturelle;* il a cherché, dans tout projectile, un centre de la *gravité accidentelle,* où tout l'*impetus* du corps pût être censé réuni comme le poids peut être censé réuni au centre de la gravité naturelle; il attribuait une grande importance, dans les effets de la percussion, à la position de ce centre de la gravité accidentelle.

» Le *In mechanica Aristotelis problemata exercitationes* de Bernardino Baldi est nourri d'emprunts faits aux manuscrits de Léonard de Vinci; l'érudit abbé de Guastalla puise, en particulier, dans ces manuscrits, la notion de *centre de la gravité violente;* dans le cas des mouvements de translation, les seuls qu'il étudie, il remarque avec raison que le *centre de la violence*

occupe la même position que le centre de la gravité naturelle.

» Le P. Mersenne connaissait les *Exercitationes* de Bernardino Baldi; il les cite dans ses *Questions théologiques, physiques, morales et mathématiques;* en outre, dans cet Ouvrage, il leur emprunte la théorie du *centre de la violence.* Des indices nombreux et non douteux, relevés dans les écrits de Mécanique que Roberval a composés et que la Bibliothèque nationale conserve inédits, nous assurent que Roberval avait également lu les *Exercitationes* de Baldi. Enfin nous ignorons si Descartes les connaissait, mais nous voyons, par sa correspondance, que Mersenne lui avait posé un problème relatif au centre de percussion extrait de ces mêmes *Exercitationes.*

» Sur ces entrefaites, Mersenne vint à s'occuper du problème du *funépendule,* c'est-à-dire de la détermination du pendule simple synchrone d'un pendule donné; il posa ce problème à ses deux amis, Roberval et Descartes: tous deux reconnurent qu'il se ramenait à la recherche du *centre de la violence* de Baldi, que Roberval nommait *centre de percussion* et Descartes *centre d'agitation;* mais les solutions incomplètes et discordantes qu'ils proposèrent eurent pour effet de les brouiller. Mersenne proposa également le problème du funépendule à un jésuite, le P. Honoré Fabry, qui adopta simplement la solution de Descartes. Enfin, mécontent de toutes ces solutions, Mersenne attira sur le même problème l'attention du jeune Christian Huygens, en lui envoyant l'Ouvrage du P. Fabry. Vingt-six ans plus tard, Huygens devait donner la théorie du pendule composé et des *centres d'oscillation;* il résolvait ainsi une question dont les origines se doivent chercher dans les Traités d'Albert de Saxe et dans les Notes de Léonard de Vinci... »

Ceux qu'a lus Léonard de Vinci, d'après M. Duhem, c'est cet Albert de Saxe, dont on vient de parler et dont il a été aussi longuement question dans le second Volume des *Origines de la Statique,* c'est Thémon le fils du juif, c'est aussi celui que M. Duhem a désigné sous le nom de « Précurseur du Vinci ». Pour les deux premiers, cela résulte d'un passage obscur des Notes de Léonard et de l'examen des textes. Dans ce passage, où Léonard énumère divers livres et instruments, Albert est

nommé (mais non spécifié). Thémon ne l'est pas : sous le mot « Meteura », M. Duhem a su reconnaître un livre fréquemment reproduit sous ce titre : *Quæstiones super quatuor libros meteorum compilatæ per doctissimum philosophiæ professorem Thimonem.* D'après les citations que fait M. Duhem et les rapprochements auxquels il se livre entre les passages cités du Vinci, d'Albert de Saxe et de Thémon, il ne me paraît subsister aucun doute. Ces rapprochements, pour ce qui concerne le dernier, portent sur la théorie de l'arc-en-ciel, sur la théorie des marées, sur la question « comment l'eau peut sourdre au sommet des montagnes », sur l'écoulement uniforme des cours d'eau. Les réflexions du Vinci sur ce dernier point sont extrêmement importantes.

M. Duhem montre, en effet, qu'il avait clairement conçu et explicitement exprimé le « Principe de Pascal », et qu'il en avait donné la même raison que Pascal, la raison qui se tire du principe des travaux virtuels. Or, la Mécanique exposée par Baptista Benedetti dans son *Diversarum speculationum mathematicorum et physicorum liber* semble bien avoir été pillée dans les manuscrits du Vinci : on y trouve, très nettement, le principe de la *presse hydraulique.* Mersenne avait lu Benedetti et le cite, sur un autre point, à la vérité; mais dans la page de Mersenne, sur l'Hydrostatique, que signale M. Duhem, et qui est de 1644, il est bien permis de voir une réminiscence de Benedetti d'une part, de Stevin de l'autre. Et il ne paraît pas douteux que Pascal ait connu ce que le P. Mersenne a écrit sur ce sujet. D'un autre côté, il paraît très probable à M. Duhem que le P. Benedetto Castelli a eu connaissance, ainsi que Bernardino Baldi, des recherches hydrauliques de Léonard de Vinci, et que c'est à ce dernier qu'il faut faire remonter cette proposition, « la vitesse de l'eau qui traverse une section est en raison inverse de l'aire de cette section », proposition qui se trouve explicitement dans le *Traité de la mesure des eaux courantes* du P. Castelli. Si ce dernier a eu connaissance des recherches de Léonard de Vinci sur l'Hydrostatique, il est vraisemblable que Galilée ne les a point ignorées. Or, dans le *Discorso al Serenissimo Don Cosimo II, Gran Duca di Toscana, intorno alle cose che stanno in su l'acqua, o che ni quella si muovano,* imprimé en 1612, Galilée avait appliqué le principe

des vitesses virtuelles à l'équilibre d'un liquide en deux vases communicants de différentes grosseurs; il avait montré comment une petite masse d'eau, contenue dans le vase étroit, peut faire équilibre à une grande masse, contenue dans le vase large. Ce *Discorso*, le P. Mersenne l'appelait « un subtil petit livre que je voudrais voir lu par tous ceux qui aiment l'étude ». Pascal n'est-il pas de ceux qui aimaient l'étude et qui lurent le subtil petit livre? Par cette voie encore, la pensée de Léonard n'arriva-t-elle pas jusqu'à lui, qui donna à cette pensée la forme définitive que nous continuerons d'admirer, avec M. Duhem?

Dans le premier Volume des *Origines de la Statique*, M. Duhem avait insisté sur l'importance de ce *Tractatus de ponderibus*, dont il a désigné l'auteur inconnu sous le nom de « Précurseur de Léonard de Vinci ». Il y revient dans ses Études pour préciser l'influence sur Léonard du troisième et du quatrième Livre du Traité. De cette analyse, fort intéressante, je ne signalerai ici que deux points : d'une part, il paraît définitivement à M. Duhem que Léonard a bien connu la loi de la composition des forces concourantes : si M. Duhem a cru, un moment, que Léonard avait méconnu sa propre découverte, c'est qu'il ne s'était pas aperçu alors qu'il fallait lire à rebours son manuscrit. D'autre part, l'examen attentif des Notes du Vinci prouve surabondamment que celui-ci a connu le troisième et le quatrième Livre du *Tractatus de ponderibus* et porte à croire qu'il n'en a pas connu le premier.

Cela semblerait incompréhensible si tous les manuscrits de ce *Tractatus* étaient identiques : il n'en est rien. M. Axel Anthon Björnbo a signalé un texte composé avec les neuf propositions des *Elementa* de Jordanus de Nemore, les quatre propositions du *De canonio*, et les trois derniers Livres du *Tractatus de ponderibus*.

L'étude de ce dernier Ouvrage donne, d'ailleurs, des raisons intrinsèques pour le regarder comme formé de deux parties très distinctes, dont l'une, composée précisément des trois derniers Livres, serait d'origine hellène; les lettres des figures, en particulier, sont placées dans l'ordre de l'alphabet grec. « Aucune des démonstrations exposées aux trois derniers Livres n'invoque explicitement une proposition du premier Livre. Il y a plus : les

deux notions qui jouent, au premier Livre, un rôle essentiel, la notion de gravité *secundum situm* et la notion du travail de la pesanteur, n'apparaissent aucunement aux trois derniers Livres. » Dans le premier Livre, où les lettres des figures suivent l'ordre de l'alphabet latin, n'apparaît aucune marque de la pensée hellène; l'auteur, qui est un géomètre profond, appartient manifestement à l'école de Jordanus de Nemore. C'est à l'auteur grec des trois derniers Livres que doit, d'après M. Duhem, être réservé le titre de « Précurseur de Léonard de Vinci », puisque c'est cet auteur grec qu'a connu Léonard. Mais est-il nécessaire d'avoir connu son Précurseur, et, en proposant de désigner le géomètre du moyen âge comme précurseur de Stevin ou de Descartes, M. Duhem veut-il insinuer que Stevin et Descartes ont tiré de lui leurs découvertes ?

Quoi qu'il en soit, et si même quelqu'un contestait la réalité de l'un ou de l'autre de ces canaux, parfois subtils et compliqués, qui ont, d'après l'auteur, transmis la pensée scientifique à travers l'espace et le temps, la thèse de M. Duhem semble très solide : les plus grandes découvertes ont été préparées, les plus beaux génies ont eu des précurseurs. Et, après tout, cette doctrine est consolante pour tous ceux qui travaillent, qui ont la volonté de coopérer à l'œuvre de vérité, ou qui, tout simplement, transmettent cette vérité. C'est à elle aussi que se trouvent avoir contribué « ceux qui ont lu Léonard de Vinci », tous ces plagiaires que dénonce M. Duhem, et qui furent parfois, comme Cardan ou Baldi, très intelligents ou très laborieux. Cela encore est consolant et il est enfin permis de se réjouir qu'aujourd'hui l'état des choses, sinon le progrès des mœurs, rend impossibles de pareils larcins.

J. T.

POUSSIN (RENÉ), actuaire-conseil, membre agrégé de l'Institut des Actuaires français. — TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES ASSURANCES SUR LA VIE. Un fort volume in-8 raisin de 560 pages et 10 tableaux hors texte. Librairie des Assurances, L. Dulac, imprimeur-éditeur, Paris.

Cet Ouvrage est le développement du Cours professé par l'auteur depuis plusieurs années à l'Institut des Assurances (Mairie Drouot). M. Poussin étudie les lois de mortalité ainsi que leurs divers modes de représentation (tables, courbes, fonctions de survie, taux de mortalité, etc.); il rappelle ensuite ce qu'il est indispensable de connaître sur les placements à intérêts pour conduire les calculs d'assurances; il expose, dans tous leurs détails, diverses méthodes de calcul des prix de revient et des réserves mathématiques des contrats; de nombreuses Tables numériques, des Tableaux synoptiques complètent le texte et des exemples numériques précisent le sens appliqué de toutes les formules qu'on rencontre dans l'Ouvrage. L'auteur termine la première Partie du Traité en rappelant quelques principes de comptabilité qu'il applique au cas des assurances; il reproduit des exemples de systèmes de comptes; il insiste sur la préparation des bilans et il en donne divers exemples, ainsi que des comptes de catégories, etc., pour des Compagnies Vie, des Compagnies Accidents, la Caisse nationale des retraites, la Caisse d'assurances en cas de décès, etc.

Dans une seconde Partie, M. René Poussin applique les principes exposés aux Compagnies d'assurances à primes fixes ou mutuelles, sur la vie ou contre les accidents, à la Caisse nationale des retraites et à la Caisse nationale en cas de décès ou d'accidents. Il donne également des renseignements techniques sur le fonctionnement des associations tontinières, des caisses patronales, des mutualités; il parle des retraites ouvrières, etc.

Il termine par l'exposé technique de l'organisation du contrôle des Compagnies d'assurances, tel qu'il résulte de la loi du 9 avril 1898, de celle du 17 mars 1905 et des décrets subséquents.

Une table alphabétique des matières permet de se reporter aux

diverses questions établies dans cet Ouvrage, de 560 pages, qui constitue un exposé élémentaire complet des opérations d'assurances sur la vie. J. G.

SCHUSSLER (R.). — ORTHOGONALE AXONOMETRIE. EIN LEHRBUCH ZUM SELBSTSTUDIUM. 1 vol. in-8; VII-70 p., 29 pl. Leipzig, Teubner, 1905.

L'auteur s'est proposé d'exposer l'axonométrie, sans la faire dépendre de la géométrie descriptive, et de montrer ainsi qu'elle se suffit à elle-même : qu'une pareille exposition fût praticable, c'est ce qui, d'après l'auteur, résultait clairement des Mémoires de C. Pelz ([1]) et d'A. Weiler ([2]). Mais les Mémoires de ces deux géomètres avaient un caractère plus scientifique que pratique; c'est au point de vue pratique et pédagogique qu'a voulu se placer M. Schüssler : ainsi que l'indique le sous-titre, il s'est proposé d'écrire un Livre où les étudiants pussent réellement apprendre les méthodes de l'axonométrie.

Il traite successivement du point, de la droite et du plan, des relations de position de ces éléments, de la construction des ombres pour les corps limités par des faces planes, de l'intersection des prismes et des pyramides, des perpendiculaires aux droites et aux plans, du cercle et des coniques, des surfaces cylindriques et coniques du second degré, de l'intersection de deux pareilles surfaces, de la sphère et de l'hémisphère, des surfaces de révolution.

Les 29 belles planches qui illustrent son Livre sont dessinées et gravées avec le plus grand soin; elles donnent la meilleure idée de la facilité avec laquelle se lisent les épures obtenues par les méthodes de l'axonométrie. J. T.

([1]) *Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie* (*Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wiss. in Wien*, 1880, 1881, 1884, et *Sitzungsberichte der k. böhm. Ges. d. Wiss. Prag*, 1885).

([2]) *Neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie*, Leipzig, 1899.

BLASCHKE (E.). — VORLESUNGEN ÜBER MATHEMATISCHE STATISTIK (Die Lehre von den statistischen Masszahlen).

Le cours de Statistique mathématique de M. Blaschke présente un intérêt tout particulier pour le lecteur français : comme l'auteur le dit dans sa Préface, il a voulu faire un livre d'enseignement ; or nous ne possédons rien de tel en notre langue. Quelques Chapitres de nos manuels d'assurances sur la vie traitent, il est vrai, de la construction des tables de mortalité, mais forcément de façon sommaire, et il suffit d'ouvrir le volume de M. Blaschke pour se persuader que l'étude des bases mêmes de tout calcul d'assurance exige de plus grands développements.

M. Blaschke commence par fixer les principes de la méthode statistique; elle consiste essentiellement à définir une catégorie d'individus par certains caractères distinctifs, puis à déterminer le nombre de ceux d'entre eux qui présentent la modification ou la qualité que l'on se propose d'observer ; on établit ainsi dans quelle proportion les individus de cette catégorie sont sujets à cette modification, dans quelle mesure ils possèdent cette qualité. Les caractères qui servent à définir la catégorie des individus observés, le *groupe statistique,* pour employer les termes mêmes dont se sert l'auteur, dépendent évidemment de la modification ou de la qualité dont on se propose d'observer la fréquence ; dans des statistiques de décès, ce sont, par exemple, l'âge, le sexe, les conditions sociales. M. Blaschke les nomme également les *causes* du groupe statistique et il distingue ce genre de causes de celles dont s'occupent les sciences physiques. « D'un ensemble de causes statistiques, dit-il, on ne peut tirer *a priori* aucune conséquence, pas même avoir la certitude que la présence des mêmes causes entraînera les mêmes effets. »

C'est qu'à la vérité la statistique n'existe et n'a d'intérêt que pour les phénomènes dont les causes sont ou mal déterminées ou complètement inconnues : on demande combien, parmi un groupe de personnes de 40 ans, vivront encore dans 10 ans; il est impossible d'apprécier les causes qui peuvent entraîner la mort de certaines d'entre elles dans ce laps de temps : on a recours à la

statistique, et, s'il reste impossible de désigner les têtes qui survivront, on peut au moins prévoir approximativement leur nombre en se basant sur les observations antérieurement faites.

Il s'agit donc d'enregistrer les résultats de différentes séries d'événements de causes inconnues, mais se produisant dans des conditions analogues; nous sommes ainsi ramené à la définition du groupe statistique que donne M. Blaschke ; les individus qui le constituent sont originellement à l'égard de l'événement considéré dans le même état, ce que M. Blaschke exprime en disant qu'ils possèdent les caractères distinctifs du groupe.

Mais ces caractères distinctifs dépendent eux-mêmes des causes physiques de l'événement observé ; or ces dernières sont inconnues ; on cherche à déterminer la valeur d'une probabilité et l'on ignore si les différents cas possibles sont également probables ; à quels signes reconnaître que des individus ont même chance de mourir dans l'année ?

Le statisticien se contente tout d'abord de classer les individus d'après des caractères extrêmement généraux qui se présentent immédiatement à l'esprit, tels que l'âge dans une statistique de décès, ou dont les travaux antérieurs ont montré l'influence, telle que la durée écoulée depuis la conclusion du contrat, dans les tables de mortalité d'assurés. Puis il recherche si les rapports obtenus suivent les lois que le théorème de Bernoulli assigne aux diverses valeurs trouvées expérimentalement pour une même probabilité. A la détermination *a priori* de l'égalité des chances, problème insoluble, est ainsi substituée une discussion *a posteriori* des résultats obtenus.

C'est cet ordre même que M. Blaschke adopte dans ses leçons; son Ouvrage se divise donc en deux parties ; dans la première, il expose tout ce qui touche au dénombrement des individus ; dans la seconde, il étudie les rapports de la statistique mathématique et du calcul des probabilités.

M. Blaschke distingue deux sortes de caractères distinctifs des groupes statistiques; les uns, dit-il, divisent les individus en un nombre fini, les autres en un nombre infini de groupes ; il appelle les premiers caractères discontinus, tel le sexe ; les seconds sont les caractères continus, tels sont l'âge, l'époque de la naissance. Cette classification n'a rien de rigoureux, puisque, comme il le

fait remarquer, il est des caractères, tels que l'état social, dont on ne saurait dire s'ils sont continus ou discontinus. Il vaudrait peut-être mieux définir caractères continus ceux que l'on peut mesurer au moyen d'une variable variant de façon continue. Quoi qu'il en soit, cette distinction a pour effet d'attirer l'attention sur la difficulté qu'il y a à réunir des observations assez nombreuses pour en tirer une conclusion.

M. Blaschke propose à ce sujet deux méthodes qu'il expose en prenant pour exemple l'étude de la mortalité d'une population; la première consiste à prendre pour mesure de cette mortalité le quotient du nombre de décès survenus au cours d'une année par le nombre des vivants au début de l'année; M. Blaschke montre immédiatement par des exemples combien le procédé est défectueux. L'autre consiste à admettre que la mortalité d'individus de même âge varie peu avec l'époque d'observation, autrement dit d'une génération à l'autre. Au fond l'une et l'autre reviennent à négliger un caractère distinctif : dans la première, on ne tient pas compte de l'âge, dans la seconde de l'époque de la naissance, et si la première est à rejeter complètement c'est que l'âge influe beaucoup plus sur la mortalité que l'époque de la naissance.

Toute la fin du premier Chapitre est consacrée à la représentation graphique des groupes statistiques. M. Blaschke adopte le mode de représentation de Becker et prend comme exemple la statistique d'une population, où les groupes sont définis par l'époque de la naissance et celle de l'observation.

On porte en abscisses les époques d'observations τ et en ordonnées les époques de naissance t; l'individu né à l'époque t_0 est alors, au temps τ_0, représenté par le point de coordonnées t_0, τ_0; aux différents instants de la vie correspondent les points de la droite $t_0 t'_0$; comme l'individu n'apparaît évidemment pas avant l'époque $O\tau_0 = Ot_0$, cette droite est limité d'une part à son intersection avec la première bissectrice; elle se termine d'autre part au point mortuaire correspondant à l'époque du décès.

A un groupe d'individus nés entre les époques t_0 et t_1 et ayant atteint le même âge, correspondent tous les points de la droite ab parallèle à la première bissectrice et compris entre les parallèles à l'axe des abscisses correspondant aux points t_0 et t_1.

De même, l'ensemble des individus nés entre les époques t_0

et t_1 et décédés entre les âges a_1 et a_2 est représenté par l'ensemble des points mortuaires situés à l'intérieur du parallélogramme *abcd*. D'une façon générale, les points d'intersection d'une ligne quelconque avec les parallèles à l'axe Oz représentent un groupe de vivants et les points mortuaires situés à l'intérieur d'une courbe fermée un groupe de décès.

Cette représentation graphique permet à M. Blaschke de définir avec la plus grande simplicité tous les groupes de vivants et de décès qui interviennent dans la construction des tables de mortalité et de montrer comment, par addition et soustraction, on peut passer des uns aux autres. Il l'étend d'ailleurs aux statistiques dépendant de trois caractères distinctifs, telles que celles qui portent sur la mortalité des assurés, où interviennent l'époque de l'observation, celle de la naissance et la durée écoulée depuis la conclusion du contrat. Il donne enfin de nombreux modèles de Tableaux permettant de noter de façon commode les différents nombres d'observations.

Il faut lire tout ce Chapitre pour se rendre compte de la simplicité qu'apporte, aussi bien dans l'exposition que dans le travail de recherche, l'emploi de la représentation graphique; un simple coup d'œil jeté sur une figure permet de résoudre avec certitude le problème toujours si délicat du groupement des observations.

Dans le Chapitre suivant, M. Blaschke définit les différentes quantités dont les observations des groupes statistiques permettent de déterminer la valeur; les unes sont les rapports du nombre des individus d'un groupe au nombre des individus d'un autre groupe: ce sont les probabilités statistiques, comme le taux de mortalité par exemple, quotient du nombre de décès entre les âges x et $x+1$ par le nombre de vivants à l'âge x; les autres mesurent une qualité de l'individu : telle est la vie moyenne à l'âge x, valeur probable du temps qui reste à vivre à un individu d'âge x, ou encore la vie probable à l'âge x, âge que l'individu a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'atteindre. M. Blaschke définit également la valeur normale de la qualité considérée « der dichteste Wert » ; nous reviendrons avec lui sur ce point à propos des lois statistiques. Il termine en passant en revue les principales tables de mortalité.

M. Blaschke aborde alors la seconde partie de son ouvrage, l'étude des rapports de la statistique et du calcul des probabilités.

Son premier soin est de montrer qu'en statistique il semble *a priori* que très rarement doivent se trouver réalisées les hypothèses fondamentales du calcul des probabilités, à savoir l'égalité des chances des différents cas possibles, la constance de la probabilité dans la série des épreuves, l'indépendance des arrivées de l'événement; il cite à ce sujet des nombres fort intéressants et conclut à la nécessité d'une étude *a posteriori* des nombres trouvés, sans laquelle on ne saurait jamais être en droit d'assimiler une probabilité statistique à une probabilité mathématique.

Les différentes méthodes qu'il propose à cet effet découlent du même principe.

Différentes séries d'expériences ayant donné des valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ d'une même probabilité, les poids des expériences étant $h_1, h_2, \ldots, h_n$, on prend comme valeur définitive de cette probabilité

$$p = \frac{\Sigma h_i^2 p_i}{\Sigma h_i^2},$$

puis on cherche si les erreurs apparentes

$$p_i - p = \eta_i$$

présentent les différents caractères que le théorème de Bernoulli assigne aux écarts des différentes valeurs expérimentales d'une même probabilité mathématique.

Par exemple, si n est le nombre de séries d'épreuves, le nombre μ défini par l'égalité

$$\sqrt{\frac{2 \Sigma h_i^2 \eta_i^2}{n-1}} = \mu$$

doit être voisin de l'unité.

Si μ est inférieur à l'unité, on en conclut que les écarts sont inférieurs à ceux que prévoit la théorie et l'on est amené à supposer l'influence d'une cause régulatrice; si μ est supérieure à l'unité, se trouve au contraire ainsi révélée l'influence d'une cause perturbatrice.

M. Blaschke étudie ainsi un assez grand nombre de statistiques, et les résultats numériques qu'il cite donnent un intérêt tout particulier à cette partie de l'ouvrage.

Il revient ensuite sur l'existence de ce qu'il a appelé *der dichteste Wert.*

Si l'on mesure certaines dimensions du corps humain, chez un grand nombre d'individus, on constate que les nombres trouvés se répartissent autour d'un nombre central avec une fréquence qui est mesurée par la loi de Gauss.

Cette particularité avait déjà été remarquée par Quételet, qui vit dans l'existence de cette valeur centrale un moyen de définir la dimension normale des différentes parties du corps, quoique, comme le fait remarquer Bertrand dans la Préface de son *Traité de probabilités,* un homme dont toutes les dimensions seraient ainsi normales pourrait bien au total se trouver difforme. M. Blaschke cite à ce sujet les essais assez nombreux faits par différents auteurs pour rechercher si cette propriété ne s'étend pas à d'autres genres de statistiques.

Il passe ensuite à l'étude des lois statistiques, c'est-à-dire des rapports qui lient les différentes probabilités d'un même événement aux différentes valeurs de la cause statistique de ces événements, par exemple les taux de mortalité à chaque âge à la valeur même de l'âge. Après avoir rappelé les différentes lois de mortalité connues, il montre comment Fechner, puis Pearson, ont cherché à généraliser la loi des erreurs de Gauss pour en déduire les équations de courbes représentant les lois de la statistique; il termine en montrant que l'on peut ramener les lois de Gompertz et Makeham à la loi des erreurs de Gauss; le procédé consiste à déterminer une fonction x de l'âge y

$$x = \varphi(y),$$

telle que, les valeurs de x étant réparties suivant la loi des erreurs de Gauss, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(x-x_0)} e^{-t^2} dt$$

soit égale, à une constante près, pour toute valeur de y, à la valeur de la fonction de Makeham. Il faut toutefois remarquer que ce mode de représentation n'est pas une propriété de la loi de Makeham, et peut s'appliquer à une fonction quelconque.

Je passe rapidement sur le Chapitre suivant, où M. Blaschke ap-

plique la théorie des jeux de hasard au calcul des primes d'assurances et des risques de l'assureur, pour arriver au dernier Chapitre qui traite de l'ajustement.

Les taux de mortalité bruts obtenus par l'expérience présentent des discontinuités qu'il s'agit de faire disparaître en leur substituant une suite continue de nombres plus satisfaisants dans leur ensemble. M. Blaschke n'a pas voulu se contenter d'exposer les diverses méthodes proposées dans ce but; il a essayé de les déduire de quelques principes simples. Soit t_x le nombre de décès survenus parmi l_x vivants entre les âges x et $x+1$; la probabilité *a posteriori*, pour que le taux de mortalité à l'âge x ait pour valeur y_x, est proportionnelle à W_x

$$W_x = y_x^{t_x}(1-y_x)^{l_x-t_x}.$$

Dans l'ajustement, on choisira les y_x de façon que la probabilité composée, formée par le produit des W_x correspondant aux différents âges, soit maximum.

Les taux de mortalité ajustés devront satisfaire à l'équation

$$\sum \frac{l_x}{y_x(1-y_x)}\left(\frac{t_x}{l_x}-y_x\right)\delta y_x = 0,$$

ou, en posant $\frac{t_x}{l_x} = w_x$ et en remplaçant $\frac{l_x}{y_x(1-y_x)}$ par

$$p_x = \frac{l_x}{w_x(1-w_x)},$$

à l'équation

$$(1) \qquad \Sigma p_x(w_x - y_x)\delta y_x = 0.$$

C'est l'équation de la méthode des moindres carrés.

M. Blaschke propose de généraliser l'équation précédente, en multipliant le produit des W_x par une fonction de y_x et de leurs différences; cette fonction est choisie de façon à devenir maximum pour $y_x = \mu_x$, les μ_x étant des valeurs des taux de mortalité trouvés antérieurement par quelque autre méthode; elle exprime la probabilité pour que, après l'emploi de cette première méthode, les taux de mortalité aient pour valeur y_x; à l'équation (1) on substitue ainsi l'équation

$$\Sigma p_x(w_x - y_x)\delta y_x + \delta \log \varphi = 0.$$

M. Blaschke propose plusieurs formes de la fonction φ et indique comment on pourrait conduire le calcul.

Quant à l'équation (1), il l'applique au calcul des trois constantes de la loi de Makeham

$$\log(1-y_x) = A + Bq^x.$$

D'après les explications de M. Blaschke, il semble qu'il est indispensable de calculer des valeurs initiales de A, B, q dont la méthode des moindres carrés permet ensuite de calculer des corrections; en fait, comme A et B entrent linéairement dans l'expression de la loi de Makeham, on peut se contenter de calculer une valeur initiale de q, et la méthode des moindres carrés donne ensuite directement les valeurs de A et B toutes corrigées et une correction de la valeur de q employée dans le calcul; de plus, M. Blaschke dit que les corrections que l'on trouve sont en général trop grandes pour que l'on puisse se contenter d'une seule application de la méthode, qui les suppose petites; il faut pourtant se garder de calculer des corrections inférieures à l'erreur qui affecte les constantes et dépend de la précision des expériences, autrement dit des poids; ainsi, quand on applique la méthode à la Table AF, on trouve que la seconde application donne des valeurs qu'il n'y a aucune raison de distinguer de celles que donne la première. Si le Comité des Compagnies françaises a été amené à penser qu'un second ajustement était nécessaire, c'est qu'il a employé comme valeurs des poids les nombres des vivants l_x et non $\frac{l_x(1-w_x)}{w_x}$, valeurs que propose M. Blaschke, et qui seules sont correctes.

M. Blaschke montre également comment on peut satisfaire à l'équation (1) en décomposant son premier membre en plusieurs sommes partielles que l'on annule séparément; dans chacune des régions correspondantes, on cherche à représenter la loi de mortalité par une formule parabolique; les méthodes d'ajustement dites *mécaniques*, telles que celles de Wolhouse, reviennent à prendre l'enveloppe d'une série de paraboles obtenues par ce procédé. M. Blaschke termine par une discussion détaillée des diverses méthodes d'ajustement.

On voit que dans son livre M. Blaschke passe en revue tous les

problèmes fondamentaux de la statistique; il les expose souvent de façon originale, toujours avec méthode et, ce que je n'ai pu qu'indiquer dans l'analyse qui précède, en citant des applications et des exemples numériques nombreux; son enseignement, sans jamais négliger la théorie, conserve le caractère pratique exigé par le sujet, et son Ouvrage, précieux pour le débutant, sera aussi une lecture intéressante pour l'actuaire. GALBRUN.

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE, Herausgegeben von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. T. VII, in-4°, 650 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

Les personnes qui, depuis le début, possèdent les *Œuvres de Gauss,* seront sans doute étonnées de voir l'annonce d'un Tome VII qu'elles croyaient déjà publié depuis 35 ans. Leur mécontentement et leur déception, s'ils existent réellement, cesseront bien vite dès qu'ils auront pris connaissance du nouveau Tome VII, publié par M. Brendel avec un soin et une compétence qui, sûrement, lui feront le plus grand honneur.

On sait que le VIIe Volume primitif, publié en 1871 par Schering, à la librairie F.-A. Perthes, contenait le célèbre Traité *Theoria motus,* accompagné de quelques courtes Notices empruntées aux papiers laissés par Gauss. Le nouveau Tome, que la Société Royale de Gœttingue avait toujours formé le projet de comprendre dans son édition, contient aussi la *Theoria motus,* soigneusement revue et annotée par M. Brendel; mais il renferme encore bien d'autres richesses.

La deuxième Section du Volume nous apporte de courtes additions à la *Theoria motus* et d'autres suppléments sur le mouvement elliptique.

La troisième traite du mouvement parabolique. Gauss avait formé le dessein de publier, en supplément à la *Theoria motus,* un Traité des Orbites paraboliques. S'il n'a pu réaliser complètement ce dessein, on a du moins trouvé dans ses papiers des fragments importants, des projets de tables qui sont ici reproduits.

La quatrième Section contient les premiers calculs que Gauss ait faits pour déterminer les perturbations des petites planètes; ils concernent Cérès et remontent aux années 1902 à 1905.

La cinquième Section contient l'ensemble des calculs de Gauss sur les perturbations de Pallas. Ces travaux étaient demeurés jusqu'ici très imparfaitement connus; on savait seulement que Gauss avait découvert en 1812 que les moyens mouvements de Jupiter et de Pallas étaient entre eux dans le rapport rationnel de 7 à 18, rapport maintenu invariable par l'action même de Jupiter. Aussi les astronomes attendaient-ils avec impatience la publication complète des Calculs de Gauss. Nous pouvons dire que leur attente ne sera pas déçue. Les pages 377 à 600 donnent la reconstitution complète des travaux du grand géomètre sur les perturbations de Cérès et de Pallas.

Il ne nous reste plus en terminant qu'à indiquer que tout est préparé pour la publication du Tome X. Il sera le dernier des Œuvres complètes et contiendra, avec les documents qui restent à publier, toutes les Tables générales que le lecteur pourrait désirer. J. G.

VESSIOT (E.). — LEÇONS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE professées en 1905-1906, rédigées par M. *Anzemberger*. 1 vol. in-4°, VIII-322 pages. Lyon, Imprimeries réunies, 1906.

Ces *Leçons* sont parfaitement adaptées à l'état des connaissances des étudiants qui ont suivi un cours élémentaire de Calcul différentiel et intégral, et qui veulent acquérir des connaissances solides en Géométrie; elles seront un complément pour les uns et, pour les autres, une initiation à des études plus approfondies, dont elles leur donneront le goût. L'auteur reprend d'habitude les questions à leur commencement, mais sous une forme élevée et générale, et de manière à montrer, dans les résultats les plus connus, une portée que, d'ordinaire, l'étudiant ne soupçonnait pas. L'exposition a un caractère nettement analytique; les calculs sont dirigés de la façon la plus simple et de manière à faire res-

sortir le sens géométrique et cinématique des résultats. Le lecteur s'étonnera, au bout de ces 300 pages, de la variété des connaissances géométriques et analytiques qu'il aura acquises, et de la facilité avec laquelle il les aura acquises.

Après avoir exposé les propriétés fondamentales des courbes gauches, des surfaces développables, des courbes tracées sur une surface, qui résultent des formules de Frenet-Serret, M. Vessiot introduit les deux formes quadratiques en du, dv relatives à une surface dont chaque point est déterminé par deux coordonnées u, v, montre leur rôle dans l'étude des lignes minima, des lignes asymptotiques, des lignes de courbure, des lignes géodésiques, de la courbure totale, établit enfin comment les six coefficients de ces formes, sous le bénéfice des conditions d'intégrabilité, déterminent la surface.

Il passe ensuite aux surfaces réglées, aux congruences et aux complexes de droite. Dans le Chapitre relatif aux congruences de normales, l'auteur trouve l'occasion de faire pressentir les correspondances entre les sphères et les droites; l'introduction et l'étude de la cyclide de Dupin sont présentées de manière à montrer l'analogie de cette surface avec la surface doublement réglée ; la surface canal isotrope, enveloppe d'une sphère variable qui est toujours tangente à la sphère infiniment voisine, est l'analogue d'une surface développable; c'est dans ce même Chapitre que l'auteur introduit la notion de *bande*, au sens de Sophus Lie, et, en particulier, de bande asymptotique et de bande de courbure. Enfin, l'étude des lignes de courbure des enveloppes de sphères conduit à la notion des surfaces moulures.

Jusqu'ici, une congruence de droites a été considérée comme définie par une correspondance entre une droite et un point d'une surface par lequel passe cette droite. Plus généralement, une telle congruence peut être définie comme l'ensemble des droites qui joignent les points correspondants de deux surfaces. M. Vessiot étudie en particulier le cas où les développables de la congruence coupent les surfaces suivant deux réseaux conjugués homologues.

Deux Chapitres sont consacrés aux propriétés fondamentales des complexes de droite et, en particulier, du complexe linéaire.

La notion d'élément de contact (x, y, z, p, q), de multiplicités M_2, M_1, où les cinq quantités x, y, z, p, q dépendent de deux

variables, ou d'une seule, et vérifient la condition

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

la notion de transformation de contact, sont ensuite présentées dans leur généralité. M. Vessiot s'occupe d'abord des transformations de contact dualistiques, puis de la transformation de Sophus Lie, qui fait correspondre les sphères et les droites : il la présente de manière à bien faire ressortir l'idée générale d'où elle dérive. Après avoir montré comment les transformations homographiques et dualistiques sont les seules transformations de contact qui changent les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques, il explique comment la transformation de Lie permet d'obtenir toutes les transformations de contact qui changent les lignes de courbure en lignes de courbure.

Il traite ensuite des systèmes triples orthogonaux.

Enfin, le dernier Chapitre, consacré aux congruences de sphères et de cercles, est particulièrement riche : la notion même d'une congruence de sphères conduit presque intuitivement au théorème de Malus sur la réflexion d'un système de rayons lumineux qui forment une congruence de normales; la condition de correspondance entre les lignes de courbure des deux nappes de la surface focale s'exprime par l'élégant théorème de Dupin. L'étude des congruences de droites, liées à une congruence de sphères, amène naturellement un système triple de Ribaucour, à ses systèmes cycliques, à sa transformation de contact, qui conserve les lignes de courbure.

Une soixantaine d'exercices très instructifs sont réunis à la fin des Leçons et classés d'une façon correspondante aux Chapitres.

BROGGI (U.). — TRAITÉ DES ASSURANCES SUR LA VIE AVEC DÉVELOPPEMENTS SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS. Traduit de l'italien par *S. Lattès*, avec une Préface de M. *Achard*. 1 vol. in-8°; XI-306 pages. Paris, Hermann, 1907.

M. Lattès vient de traduire le *Traité des assurances sur la vie* de M. le Prof. U. Broggi. L'Ouvrage comprend l'exposition des théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités, la théorie sta-

tistique de la mortalité, le calcul des primes et des réserves, et enfin la théorie du risque. Cette seule énumération des matières traitées dans le Volume montre la méthode adoptée par l'auteur : il envisage la théorie des assurances sur la vie comme une application du calcul des probabilités et, plus particulièrement, de l'assurance mathématique; comme il le fait remarquer lui-même, il est possible de suivre une voie toute différente, et l'on peut exposer tout ce qui se rapporte aux calculs usuels de la pratique indépendamment de toute notion de probabilité; de tels procédés ont des avantages de vulgarisation incontestables; ils permettent de faire comprendre rapidement le mécanisme de l'assurance à un lecteur peu familier avec les Mathématiques; mais ils sont impuissants à montrer comment l'hypothèse fondamentale de tout calcul de ce genre est le grand nombre des opérations engagées par l'assureur, et à établir dans quelles limites les moyennes calculées s'écartent des résultats effectivement observés. Seul le calcul des probabilités permet de résoudre ces questions, et c'est en rappelant ses principes que doit débuter tout traité des assurances vraiment scientifique, comme celui de M. Broggi.

M. Broggi commence par donner les démonstrations des théorèmes de Tchebycheff et de Bernoulli; il établit ensuite la forme de la loi des erreurs en partant de l'hypothèse de Gauss sur la moyenne arithmétique et justifie la méthode des moindres carrés.

Le Chapitre suivant est consacré à la statistique; après avoir donné des indications générales sur la construction des tables de mortalité et la représentation graphique des observations, si utiles dans la pratique, l'auteur passe en revue les principales méthodes d'ajustement. Il montre comment la méthode des moindres carrés permet de calculer les constantes de la loi de survie de Makeham, et termine par une théorie de la dispersion où il cherche une justification des hypothèses nécessaires à l'existence et l'emploi des tables de mortalité; il institue ainsi une comparaison, pour différentes séries d'observations, entre la racine carrée de la valeur probable de la somme des carrés des écarts obtenue au moyen du théorème de Bernoulli et la valeur de la même quantité donnée par l'expérience. C'est au fond le même procédé que Dormoy avait appliqué aux écarts pris en valeur absolue.

M. Broggi arrive ensuite au calcul des primes et des réserves; il

passe en revue les combinaisons fondamentales en cas de vie et en cas de décès. Le passage relatif au calcul de l'annuité viagère continue mérite de retenir l'attention; l'auteur commence par déduire une valeur approchée de cette intégrale de la formule de sommation d'Euler; puis il suppose que la loi de survie est celle de Makeham et montre que, dans ce cas, le calcul se ramène à celui d'une fonction des constantes de la loi de survie qui contient l'intégrale d'Euler et la fonction hypergéométrique; ce résultat intéressant au point de vue théorique ne semble pas toutefois devoir être employé pratiquement; car il suffit de prendre les trois premiers termes de la formule de sommation d'Euler pour avoir la valeur de l'annuité viagère continue avec une approximation bien suffisante, étant donnée l'erreur expérimentale qui affecte les données des tables de mortalité.

Dans le dernier Chapitre M. Broggi expose la théorie du risque. Il applique à un ensemble de contrats d'assurances la théorie des écarts dans les jeux de hasard.

Supposant que la mortalité réelle est conforme à celle de la Table employée, il définit *risque mathématique* la racine de la valeur probable du carré de la perte de l'assureur et montre comment ce nombre dépend du nombre d'opérations de l'assureur et de la répartition des capitaux assurés entre les différentes polices; au moyen du théorème de Tchebycheff et de celui de Bernoulli il fait voir comment, par un chargement convenable des primes pures, on peut rendre aussi voisine que possible de la certitude la probabilité pour que les fonds recueillis par l'assureur suffisent à couvrir les risques futurs.

Ces questions sont analogues à celles qu'a traitées M. Laurent dans sa théorie du plein, et il est curieux de rapprocher les méthodes suivies par les deux auteurs.

On voit par cette rapide analyse que M. Broggi ne néglige aucun des problèmes relatifs aux assurances sur la vie; de plus, de nombreuses notes renvoient à des Ouvrages traitant de questions analogues, dont l'auteur s'est quelquefois inspiré, et constituent une bibliographie précieuse. La traduction de M. Lattès sera donc d'une utilité incontestable pour les actuaires français.

GALBRUN.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS INTEGRALES;

PAR M. A. MYLLER.

1. M. H. Bateman a étudié, dans un article publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1906), les solutions $\Phi(s)$ de l'équation intégrale de M. Fredholm

$$f(s) = \Phi(s) + \lambda \int_0^1 k(s, t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{1}$$

qui s'annulent dans un point donné $s = x$ de l'intervalle de o à 1. En généralisant ensuite une formule trouvée à cette occasion, il arrive à des formules très intéressantes relatives aux équations intégrales.

Je me propose d'indiquer une question analogue à celle-ci, qui conduit aussi à des formules qui pourraient compléter celles de M. Bateman.

2. La question dont il s'agit est de trouver les valeurs de λ pour lesquelles l'équation (1) possède une solution Φ telle que $\frac{d^\alpha \Phi(s)}{ds^\alpha}$ s'annule dans un point donné $s = x$ de l'intervalle de o à 1.

En dérivant α fois l'équation (1) et en faisant $s = x$, nous obtenons

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lambda \int_0^1 \frac{d^\alpha k(x, t)}{dx^\alpha}\,\Phi(t)\,dt,$$

d'où

$$f(s) = \lambda \int_0^1 \frac{f(s)}{\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}}\,\frac{d^\alpha k(x, t)}{dx^\alpha}\,\Phi(t)\,dt.$$

En introduisant cette valeur de $f(s)$ dans l'équation (1), on a

$$\Phi(s) = -\lambda \int_0^1 \left[k(s,t) - \frac{f(s)}{\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}} \frac{d^\alpha k(x,t)}{dx^\alpha} \right] \Phi(t)\, dt.$$

Les valeurs de λ sont ainsi les valeurs singulières de λ pour l'équation intégrale

$$(2) \qquad \chi(s) = \psi(s) + \lambda \int_0^1 \Delta^\alpha k^{(1)}(s,t)\, \psi(t)\, dt,$$

où

$$\Delta^\alpha k^{(1)}(s,t) = k(s,t) - \frac{f(s)}{\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}} \frac{d^\alpha k(x,t)}{dx^\alpha}.$$

On sait que la solution de l'équation (1) est donnée par la formule

$$\Phi(s) = f(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt,$$

où la fonction $K(s,t)$ satisfait à la relation

$$(3) \qquad k(s,t) = K(s,t) + \lambda \int_0^1 k(s,r)\, K(r,t)\, dr.$$

Nous voulons montrer que, dans le cas de l'équation (2), la fonction remplaçant K est

$$\Delta^\alpha K^{(1)}(s,t) = K(s,t) - \frac{\Phi(s)}{\frac{d^\alpha \Phi(x)}{dx^\alpha}} \frac{d^\alpha K(x,t)}{dx^\alpha}.$$

Pour cela, on n'a qu'à vérifier la relation

$$\Delta^\alpha k^{(1)}(s,t) = \Delta^\alpha K^{(1)}(s,t) + \lambda \int_0^1 \Delta^\alpha k^{(1)}(s,r)\, \Delta^\alpha K(r,t)\, dr,$$

ce qu'on fait immédiatement en remplaçant dans cette formule $\Delta^\alpha k$ et $\Delta^\alpha K$ par leurs valeurs, et en réduisant à l'aide des relations (1) et (3).

3. Si l'on écrit

$$f(s) = k(s, r).$$

on a

$$\Phi(s) = \mathrm{K}(s, r),$$

$$\Delta^\alpha k^{(1)}(s, t) = \frac{\dfrac{d^\alpha}{dr^\alpha}\begin{vmatrix} k(s, t) & k(s, r) \\ k(r, t) & k(r, r) \end{vmatrix}}{\dfrac{d^\alpha}{dr^\alpha} k(r, r)},$$

$$\Delta^\alpha \mathrm{K}^{(1)}(s, t) = \frac{\dfrac{d^\alpha}{dr^\alpha}\begin{vmatrix} \mathrm{K}(s, t) & \mathrm{K}(s, r) \\ \mathrm{K}(r, t) & \mathrm{K}(r, r) \end{vmatrix}}{\dfrac{d^\alpha}{dr^\alpha} \mathrm{K}(x, r)}.$$

La généralisation immédiate de ces résultats est de considérer, au lieu de ces fonctions, les fonctions plus générales

$$(4)\quad \Delta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} k^{(n)}(s, t) = \frac{\dfrac{d^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}}{ds_1^{\alpha_1} ds_2^{\alpha_2}\ldots ds_n^{\alpha_n} dt_1^{\beta_1} dt_2^{\beta_2}\ldots dt_n^{\beta_n}}\begin{vmatrix} k(s, t) & k(s, t_1) & \ldots & k(s, t_n) \\ k(s_1, t) & k(s_1, t_1) & \ldots & k(s_1, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k(s_n, t) & k(s_n, t_1) & \ldots & k(s_n, t_n) \end{vmatrix}}{\dfrac{d^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}}{ds_1^{\alpha_1} ds_2^{\alpha_2}\ldots ds_n^{\alpha_n} dt_1^{\beta_1} dt_2^{\beta_2}\ldots dt_n^{\beta_n}}\begin{vmatrix} k(s_1, t_1) & k(s_1, t_2) & \ldots & k(s_1, t_n) \\ k(s_2, t_1) & k(s_2, t_2) & \ldots & k(s_2, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k(s_n, t_1) & k(s_n, t_2) & \ldots & k(s_n, t_n) \end{vmatrix}}$$

et

$$(5)\qquad \Delta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \mathrm{K}^{(n)}(s, t),$$

qui diffère de la précédente par le changement de k en K.

On démontrera sans peine que l'on a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} k^{(n)}(s_0, t_0) - \Delta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \mathrm{K}^{(n)}(s_0, t_0) \\ &\quad = \lambda \int_0^1 \Delta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} k^{(n)}(s_0, r)\, \Delta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \mathrm{K}^{(n)}(r, t_0)\, dr. \end{aligned}\right.$$

SUR LA DÉRIVÉE DES POTENTIELS DE SIMPLE ET DE DOUBLE COUCHE;

Par M. T. LALESCO.

1. Soit

$$V_p = \int_c \mu(s) \log \frac{1}{r_{ps}} ds$$

le potentiel plan d'une simple couche étendue sur le contour c et dont la densité $\mu(s)$ est une fonction continue de l'arc s; r_{ps} désigne la distance entre le point p et le point variable s du contour.

Si nous prenons sa dérivée suivant une direction λ déterminée, nous obtenons

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{dV_p}{d_\lambda p} &= \int_c \mu(s) \frac{d}{d_\lambda p} \log \frac{1}{r_{ps}} ds = -\int_c \mu(s) \frac{d}{d_\lambda s} \log \frac{1}{r_{ps}} ds \\ &= -\int_c \mu(s) \cos(n, \lambda) \frac{d}{d_n s} \log \frac{1}{r_{ps}} ds - \int_c \mu(s) \cos(s, \lambda)\, d \log \frac{1}{r_{ps}}, \end{aligned} \right.$$

où $\frac{df}{d_\lambda t}$ désigne la dérivée de f par rapport au point t, suivant la direction λ, et n la direction de la normale intérieure du contour c au point s.

Le premier terme du second membre de (1) est un potentiel de double couche de densité $\mu(s)\cos(n, \lambda)$; quant au second, si la fonction $\mu(s)$ est dérivable et si la courbe c admet partout *un rayon de courbure déterminé,* une intégration par partie nous montre que c'est un potentiel de simple couche de densité

$$\frac{d}{ds}[\mu(s)\cos(s, \lambda)].$$

Dans ce cas donc, la dérivée du potentiel de simple couche, suivant une direction déterminée λ, présente sur le contour une discontinuité finie absolument comme un potentiel de double couche de densité $\mu(s)\cos(n, \lambda)$, et c'est d'ailleurs la seule discontinuité à distance finie (1).

---

(1) Cette démonstration très simple a été donnée par M. G. Darboux dans son Cours 1906-1907.

Dans cette Note, je veux démontrer que le même résultat subsiste si la densité $\mu(s)$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable, mais *satisfait seulement à la condition de Lipschitz*

$$|\mu(s)-\mu(s_0)| < a\,|s-s_0|, \tag{2}$$

s et s_0 étant deux points quelconques du contour et a une constante finie.

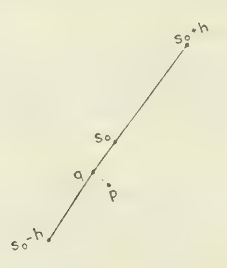
Dans ce cas, le second terme n'est plus un potentiel de simple couche; mais nous allons démontrer que c'est encore une fonction continue sur le contour c.

En effet, si nous nous approchons d'un point s_0 du contour, la partie de l'intégrale qui peut devenir discontinue est

$$N = \int_{s_0-h}^{s_0+h} \mu(s)\cos(s,\lambda)\,d\log\frac{1}{r_{ps}},$$

h étant une constante aussi petite que nous le voulons.

Soit q le pied de la normale au contour c et passant par p;



pour p suffisamment voisin, q tombera entre s_0-h et s_0+h. Si nous posons

$$\mu(s) = \mu(s_q) + (s-s_q)\varphi(s),$$

nous aurons, d'après (2), pour toute valeur de s

$$|\varphi(s)| < a$$

et

$$N = \mu(s_q)\int_{s_0-h}^{s_0+h}\cos(s,\lambda)\,d\log\frac{1}{r_{ps}} + \int_{s_0-h}^{s_0+h}\varphi(s)\cos(s,\lambda)(s-s_q)\,d\log\frac{1}{r_{ps}}.$$

Le premier terme de N est une fonction continue dans le voisinage de s_0, car la fonction $\cos(s,\lambda)$ est dérivable en s, d'après

l'hypothèse faite sur le contour; d'autre part, puisque la quantité $(s - s_q)\, d \log \frac{1}{r_{ps}}$ garde un signe constant tout le long du chemin d'intégration, le module du second membre est plus petit que

$$a \int_{s_0-h}^{s_0+h} (s - s_q)\, d \log \frac{1}{r_{ps}}.$$

Or cette intégrale est infiniment petite avec h, ce qui établit la continuité de N dans le voisinage de s_0.

2. Un raisonnement analogue montre que la dérivée dans une direction déterminée λ d'un potentiel de double couche de densité $\nu(s)$, présente la discontinuité d'un potentiel de double couche de densité $\cos(s, \lambda) \frac{d\nu(s)}{ds}$ sur le contour, si la dérivée de $\nu(s)$ y satisfait à la condition de Lipschitz.

En particulier la dérivée normale d'un tel potentiel est une fonction continue sur le contour puisque $\cos(s, n) = 0$; donc la possibilité d'exprimer par un potentiel de double couche la fonction harmonique qui résout le problème de Dirichlet se trouve ainsi être démontrée, par la théorie de Fredholm, pour un contour dont le rayon de courbure satisfait à la condition de Lipschitz.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Guillemin (A.). — *Tableaux logarithmiques équivalents à des Tables de logarithmes à 6 et à 9 décimales.* In-8°, 32 p. Paris, F. Alcan.

Berliner astronomisches Jahrbuch, f. 1908 *m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten* (1) *bis* (553) *f.* 1906. Herausgeg. von J. Bauschinger. Gr. in-8°, x-620 p. Berlin, Dümmler. 12 m.

Klein (F.). — *Ueber lineare Differentialgleichungen der 2 Ordng. Vorlesung.* Ausgearb. von *E. Ritter.* Göttingen, 1904. In-8°, iv-524 p autogr. avec fig. Leipzig, Teubner. 8 m. 50 pf.

Lutzeler (Egon). — *Der Mond als Gestirn und Welt u. sein Einfluss auf unsere Erde.* Gr. in-8°, xv-300 p. avec 80 fig. et 17 planches. Cologne, Bachem. 4 m. 50 pf.; relié, 6 m.

Oettingen (A. von). — *Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte.* viii-118 p. avec 85 fig. Leipzig, Engelmann. 5 m.

G. Muller u. P. Kempf. — *Photometrische Durchmusterung des nördlichen Himmels enth. alle Sterne der BD. bis zur Grösse* 7,5. IV. Tl. Zone + 60° bis 90° Deklination. 270 p. (*Publikationen der astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam.* N° 51.) In-4°, Leipzig, Engelmann. 7 m.

Albrecht (Th.) u. Wanach (B.). — *Resultate des internationalen Breitendienstes.* II. Bd., v-190 p. avec 2 planches. (*Veröffentlichungen des Centralbureaus der internationalen Erdmessung.* Neue Folge. N° 13.) In-8°. Berlin, G. Reimer. 12 m.

Wirtinger (Wilh.). — *Ueber die Entwickelung einiger mathematischer Begriffe in neuerer Zeit.* In-8°, 20 p. Wien, Hölder. 60 pf.

Kistner (A.). — *Geschichte der Physik.* I. *Die Physik bis Newton.* In-8°, 117 p. avec 13 fig. Leipzig, Göschen. (Sammlung Göschen, n° 293.) Relié 80 pf.

Taylor (H.). — *System of applied Optics. Complete system of the second order, and the foundation of a complete system of the third order, with examples and their practical applications.* In-8°, 350 p. London, Macmillan. 30 sh.

Zerlegbares Modell ein. Dynamomaschine (en couleurs avec explications). Gr. in-8°, 7 p. Leipzig, Wiest Nachf. 3. m. 50 pf.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. 3. Bd. *Geometrie.* Redig. von W. Fr. Meyer. 2. Tl. 3. Heft. In-8°. Leipzig, Teubner. 5 m. 60 pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Herausgeg. von Emil Lampe. 35. Bd. Jahrg. 1904. 1. Heft. Gr. in-8°, vi-496 p. Berlin, G. Reimer. 17 m. 80 pf.

Jouffret (E.). — *Mélanges de Géométrie à quatre dimensions.* Gr. in-8°, xi-227 p. avec 49 fig. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WHITEHAD (A.-N.). — THE AXIOMS OF PROJECTIVE GEOMETRY (n° 4 des *Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics*). 1 vol. in-8°, 64 p. Cambridge, University Press, 1906.

Ce petit Livre traite des axiomes de la géométrie projective, c'est-à-dire, en gros, de cette géométrie où l'on regarde deux droites d'un plan comme se rencontrant toujours. La plus grosse difficulté, peut-être, pour ceux qui veulent étudier les diverses géométries, est de se débarrasser de l'intuition naïve, d'où la géométrie ordinaire est sortie, de s'assurer que leurs raisonnements sont purement logiques. Au premier abord la possibilité de pareils raisonnements leur semble même douteuse. Le Livre de M. Whitehad, par la netteté avec laquelle les axiomes sont séparés, par le grand soin que l'auteur met toujours à spécifier le point où ils interviennent, leur rendra, à cet égard, les meilleurs services, d'autant que M. Whitehad a pris l'excellent parti de supprimer les déductions qui peuvent être facilement suppléées par le lecteur. De cette façon, non seulement le Livre est plus court, mais il est en réalité plus clair : les difficultés apparaissent là où elles sont et ne sont pas diluées dans un verbiage inutile. Est-il besoin de dire que cette étude, en dehors de son intérêt et de sa beauté propres, constitue un excellent exercice de logique?

Ce n'est pas, bien entendu, un Traité de géométrie projective qu'il faut chercher dans le Livre de M. Whitehad, mais bien le fondement philosophique et logique d'un pareil Traité; l'auteur, après avoir énoncé les axiomes fondamentaux qui caractérisent la classe des points, la ligne droite et le plan, définit les points conjugués harmoniques par le quadrilatère, montre comment le théorème de Desargues intervient dans cette définition; il traite ensuite de la projectivité; le théorème fondamental, c'est-à-dire l'affirmation qu'une correspondance projective est entièrement déterminée quand on se donne les trois points de la seconde

droite qui doivent correspondre à trois points de la première, est rattaché au théorème de Desargues et au théorème de Pappus (c'est-à-dire au théorème de Pascal, dans le cas où la conique se réduit à deux droites). Le Chapitre suivant se rapporte à l'*ordre ;* il contient la difficile définition du segment de droite, et les nouveaux axiomes qui correspondent à la notion de *sens*. Après avoir traité de l'involution, l'auteur montre enfin comment s'introduisent les coordonnées, du point de vue où il s'est placé, et termine en montrant comment l'existence du nombre implique l'existence de la géométrie projective, en montrant nettement quels axiomes, concernant les nombres, interviennent dans la démonstration de ce théorème d'existence.

Des indications bibliographiques, renvoyant principalement aux Mémoires et aux Livres de V. Standt, Piéri, Schur, Hilbert, Vahlen, Fano, Wiener, Klein, Dedekind, Maclagan-Wedderburn, Vailati, Burali-Forti, Russel, etc., complètent cet exposé, et permettront au lecteur d'étendre ses connaissances, pour lesquelles le Livre de M. Whitehad restera une base solide.

Un autre Livre, du même auteur, sur les axiomes de la géométrie descriptive, paraîtra prochainement : on peut prévoir qu'il sera aussi bien accueilli et rendra les mêmes services que celui dont on vient de parler brièvement. J. T.

WEBER (H.) und WELLSTEIN (J.). — ENCYKLOPÄDIE DER ELEMENTAR MATHEMATIK. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Zweiter Band. ELEMENTE DER GEOMETRIE. In-8°, XII-604 pages. Leipzig, Teubner, 1905.

Au cours de l'année 1905 nous rendions compte du premier Volume de cette Encyclopédie des Mathématiques élémentaires en trois Volumes dont MM. Weber et Wellstein ont entrepris de concert la publication. Nous avons indiqué le plan et les divisions de ce premier Volume, consacré à l'Arithmétique et à l'Analyse algébrique, et dû tout entier à la plume de M. Weber.

Le second Volume que nous avons sous les yeux n'a pas, comme le premier, été écrit par un seul auteur. Il se divise en trois Livres.

Le premier, qui traite des principes de la Géométrie, est dû à M. Wellstein. Le second, qui traite de la Trigonométrie, a été écrit, pour une partie, la trigonométrie plane, par M. Weber, et pour une autre partie, la géométrie et la trigonométrie sphérique, par M. W. Jacobsthal. Enfin le troisième Livre, qui traite de la géométrie analytique et de la stéréométrie, est dû tout entier à M. Weber.

Il est évident que les 600 pages dont se compose le Volume n'auraient pas suffi à une exposition systématique de sujets si nombreux et si importants. Aussi il ne faut pas que le lecteur se laisse tromper par le titre d'*Encyclopédie* et s'attende à trouver dans le nouveau Volume un développement systématique et complet des différentes parties de la géométrie élémentaire, de la géométrie projective, des trigonométries et de la géométrie analytique. S'il avait de telles espérances, elles seraient certainement déçues par ce nouveau Volume, plus encore que par le premier. Ce que le lecteur rencontrera avec plaisir, ce sont des théories peu connues ou tombées dans l'oubli, telles que celles des triangles de Möbius et de M. Study; des aperçus ingénieux et profonds sur les fondements mêmes de la Géométrie et les diverses géométries non euclidiennes; des applications intéressantes de la théorie des groupes à la Géométrie, etc.

Un registre alphabétique facilite les recherches dans toutes ces théories, formant un ensemble intéressant qui sera consulté avec profit par les professeurs, et par tous ceux qui ne se contentent pas d'un exposé banal et superficiel des Mathématiques.

J. G.

BRIOSCHI (FRANCESCO). — OPERE MATEMATICHE PUBBLICATE PER CURA DEL COMITATO PER LE ONORANZE A FRANCESCO BRIOSCHI (G. Ascoli, V. Cerruti, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli). Tomo quarto, in-4°, X-418 pages, 1906. Milan, U. Hoepli.

Nous rendions compte, il y a deux ans, des Tomes II et III de cette belle et utile publication. Le Tome IV que nous avons sous les yeux est tout à fait digne de ses aînés. Le Comité de publication nous y donne tous les Mémoires que Brioschi a publiés dans les *Comptes*

rendus de l'Académie Royale des Lincei, de 1885 jusqu'en 1896; puis il passe aux articles qui ont été publiés dans d'autres Recueils : les *Atti* de l'Académie des Sciences physiques et mathématiques de Naples, ceux de l'Académie de Turin, le *Giornale di Matematiche,* le *Bullettino di Bibliografia* du prince Boncompagni, les *Rendiconti del Circolo matematico* de Palerme. Les éditeurs reproduisent ensuite les travaux qui ont paru dans certains Ouvrages séparés; deux Mémoires sont empruntés aux *Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini.* On a reproduit ensuite la Préface et les Appendices très importants que Brioschi avait insérés dans sa traduction du *Traité des fonctions elliptiques* de Cayley.

Après cela commence la publication des Communications si nombreuses et si intéressantes que Brioschi avait pris l'habitude d'envoyer à notre Académie. Cette publication, qui est loin d'être terminée, comprend dix-sept Notes envoyées de 1858 à 1878.

Le Volume se termine par un Index alphabétique des noms.

Nous sommes assuré que cette belle publication, vraiment digne du grand géomètre italien, sera partout accueillie avec la faveur qu'elle mérite sous tous les points de vue. J. G.

LEBEDEFF (W.). — DIE THEORIE DER INTEGRALGLEICHUNGEN IN ANWENDUNG AUF EINIGE REIHENENTWICKELUNGEN. *Inaugural-Dissertation.* in-8°, 50 pages. Gœttingue, 1906.

Nous reproduisons ci-dessous l'introduction de la dissertation inaugurale de Mlle Wera Lebedeff, introduction qui résume les travaux d'où elle est partie, et l'intéressante contribution qu'elle apporte à la belle théorie à laquelle le nom de M. Fredholm restera attaché.

Les équations intégrales linéaires qui s'introduisent en Physique mathématique ont été, dans ces derniers temps, étudiées systématiquement par Fredholm (1) et par Hilbert (2). Les résul-

(1) *Acta mathematica,* t. XXVII.
(2) *Gottinger Nachrichten,* 1904, 1905.

tats de cette étude peuvent être brièvement résumés comme il suit :

« L'équation linéaire non homogène

$$y(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt,$$

dont le noyau (*Kern*) $K(s, t)$ est une fonction symétrique en s, t, continue dans le plan des st, a toujours une solution et une seule quand le paramètre λ n'est pas racine d'une certaine équation transcendante $\delta(\lambda) = 0$. Si λ est une telle racine, il existe au moins une solution $\psi^{(h)}(s)$ de l'équation intégrale homogène

$$y(s) = \lambda^{(h)} \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt.$$

Cette fonction $\psi^{(h)}(s)$ et la valeur correspondante $\lambda^{(h)}$ du paramètre ont été désignées par Hilbert comme une fonction propre et une valeur propre appartenant au noyau $K(s, t)$.

» En exceptant le cas où $K(s, t)$ serait une somme finie de produits de deux facteurs, dont l'un dépend seulement de s et l'autre de t, il y a, en général, une infinité de fonctions propres appartenant à un même noyau, l'équation $\delta(\lambda) = 0$ ayant une infinité de racines

$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots,$$

dont l'ensemble, sous les conditions imposées au noyau, admet un point d'accumulation à l'infini. Les fonctions propres sont mutuellement orthogonales, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s)\, \psi^{(k)}(s)\, ds = 0 \text{ ou } 1,$$

suivant que h est différent de k, ou égal à k; elles peuvent être employées, suivant le procédé de Fourier, pour le développement d'une fonction arbitraire $f(s)$ en une série de la forme

$$f(s) = c_1 \psi^{(1)}(s) + c_2 \psi^{(2)}(s) + \ldots.$$

La condition à laquelle doit satisfaire la fonction $f(s)$ pour qu'un tel développement soit possible s'exprime comme il suit, sous la

forme simplifiée que l'on doit à Schmidt (1). S'il y a une fonction continue $g(s)$ telle que la fonction $f(s)$ puisse être mise sous la forme

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t)\, dt,$$

cette fonction $f(s)$ peut être développée en une série procédant suivant les fonctions propres, absolument et uniformément convergente dans l'intervalle $a \leq s \leq b$.

» La question suivante se pose alors naturellement : quels rapports ont avec cette théorie tous ces systèmes, bien connus et bien des fois étudiés, de fonctions qui sont mutuellement orthogonales et qui sont utilisées pour le développement de fonctions arbitraires ? Rentrent-ils dans la théorie précédente et quelles sont les méthodes qui les y font rentrer ?

» L'importance de cette question est claire : s'il est possible de les faire sortir d'équations intégrales, tous ces développements apparaissent d'un même point de vue, se traitent par une même méthode.

» Hilbert a appliqué la théorie des équations intégrales aux fonctions trigonométriques $\sin m\pi x$, $\cos m\pi x$, aux fonctions de Bessel $I(x\sqrt{\lambda^m})$, aux polynomes de Legendre $P^{(n)}(x)$ et aux fonctions sphériques d'ordre supérieur $P_\alpha^n(x)$. La méthode qu'il a employée pour obtenir le noyau de ces fonctions repose sur ce que lesdites fonctions sont, pour certaines valeurs $\lambda^{(h)}$ du paramètre λ, des solutions d'une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + (q - \lambda) u = 0.$$

Ces valeurs $\lambda^{(h)}$ sont les valeurs propres appartenant auxdites fonctions. La fonction transcendante $\delta(\lambda)$ est déterminée sans ambiguïté par l'équation différentielle. Le noyau cherché n'est autre chose, au fond, que la fonction de Green de l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + qu = 0,$$

c'est-à-dire une solution de cette équation, satisfaisant à certaines

(1) Erhard Schmidt, *Inaugural-Dissertation*, Gœttingue, 1905.

conditions de contour (les mêmes que pour les fonctions propres que l'on se donne), symétrique par rapport à x et à un paramètre ξ, dont la dérivée enfin admet une discontinuité pour $x = \xi$, avec un écart égal à -1.

» Mais la détermination effective d'une fonction de Green pour l'équation différentielle donnée offre maintes difficultés. Dans certains cas, il n'y a point de fonction de Green, pour les conditions de contour données ; tel est déjà le cas, par exemple, pour les polynomes de Legendre. Hilbert a bien pu traiter ce cas par une légère modification du concept, précédemment défini, de la fonction de Green ; mais cette modification ne s'applique pas à tous les cas.

» Le but du présent travail est de montrer une autre voie pour obtenir le noyau de fonctions données à l'avance, qui convient à certains cas, et précisément à des cas où la formation de la fonction de Green apparaît comme difficile.

» La méthode est rapidement appliquée, dans le premier Chapitre, à l'exemple simple des fonctions trigonométriques. Au lieu de l'équation différentielle ordinaire que vérifient les fonctions données et que traite Hilbert, c'est une équation aux dérivées partielles qui intervient, ici l'équation de la conduction linéaire de la chaleur.

» Un procédé dont l'idée se trouve dans un Mémoire d'Appell (¹) conduit aisément à l'équation intégrale.

» C'est une des fonctions Θ de Jacobi qui apparaît comme le noyau de $\sin m\pi x$, $\cos m\pi x$.

» Le second Chapitre contient l'application de cette méthode aux polynomes $P_n(x)$ étudiés par Hermite (²) et par Tschebyscheff (³). Ils sont définis par la fonction génératrice

$$e^{-2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{h^n}{n!} P_n(x),$$

ou comme dénominateurs des réduites dans le développement en

(¹) Sur l'équation $\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{dz}{dy} = 0$ (*Journal de Liouville*, 4ᵉ série, t. VIII).

(²) *Comptes rendus*, t. LVIII, 1864, p. 93, 266.

(³) *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 1859.

fraction continue de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}\,du}{x-u}.$$

Ils possèdent la propriété d'orthogonalité pour un intervalle infini dans les deux sens

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_m(x)\,dx = \begin{matrix} 0 & \quad (n \neq m), \\ 1 & \quad (n = m). \end{matrix}$$

Ils constituent la partie essentielle des polynomes à deux variables qui sont les solutions particulières de l'équation de conduction de la chaleur, et c'est ce qui rend possible l'application de la méthode du premier Chapitre : celle-ci doit toutefois être modifiée, en raison de ce que l'intervalle est infini, et fournit comme noyau des fonctions

$$\Psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{P}_n(x)$$

la fonction

$$\mathrm{K}(x, \xi) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\tau - t}}\, e^{\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(x^2+\xi^2)-\frac{2\sqrt{\tau}}{\tau-t}x\xi},$$

où τ et t sont des constantes arbitraires, sous les conditions $\tau < 0$, $t - \tau < 0$.

» On étudie sous quelle condition une fonction $f(x)$ peut se développer suivant les fonctions propres

$$\Psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{P}_n(x);$$

les théorèmes de Hilbert sur la possibilité d'un développement en fonctions propres ont été établis pour un intervalle fini, et il est alors nécessaire de les étendre au cas d'un intervalle infini. Le développement de fonctions arbitraires suivant les fonctions trigonométriques et suivant les polynomes d'Hermite conduit à la solution du problème de la conduction de la chaleur, sous des conditions initiales données, pour un fil infiniment fin, annulaire ou rectiligne.

» Dans le troisième Chapitre, on traite par la même méthode les polynomes $\mathrm{Q}_n(x)$ étudiés par Laguerre (¹) et par Tschebys-

(¹) *Œuvres*, t. I, p. 428.

cheff [1]. Ils proviennent du développement en fraction continue de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^u}{x-u}\,du$$

et ont, dans l'intervalle $-\infty \leq x \leq 0$, la propriété d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{Q}_m(x)\,dx = \begin{matrix} 0 & (m \neq n), \\ 1 & (m = n). \end{matrix}$$

Ils conduisent à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

qui appartient au type parabolique, comme l'équation de la conduction linéaire de la chaleur, et qui est liée à l'équation de la conduction de la chaleur dans un cylindre circulaire.

» Comme noyau des fonctions

$$\Psi_n(x) = e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{Q}_n(x),$$

on obtient alors la fonction

$$\mathrm{K}(x, \xi) = \frac{1}{t-\tau}\,e^{-\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(x+\xi)}\,\mathrm{J}\left(2i\frac{\sqrt{t\tau x\xi}}{\tau-t}\right),$$

où J est la fonction de Bessel d'ordre nul et où t, τ sont des constantes, arbitraires sous les conditions $t \leq \tau < 0$.

» On traite une généralisation des polynomes de Laguerre, qui consiste à introduire deux paramètres arbitraires m, n dans ces polynomes et qui conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

qui a été étudiée par Kepinski [2].

» Dans le quatrième Chapitre, on introduit quelques généralisations relatives à deux variables x, y : les développements procèdent suivant des produits de fonctions trigonométriques et

---

[1] *Mém. de Saint-Pétersbourg*, 1860.

[2] *Math. Annalen*, 1905.

suivant des agrégats de produits de polynomes d'Hermite; ils interviennent dans le problème de la conduction de la chaleur pour la surface d'un anneau creux (¹) et pour le plan indéfini (²). »

J. T.

BERNHARD (M.). — DARSTELLENDE GEOMETRIE MIT EINSCHLUSS DER SCHATTEN KONSTRUKTIONEN UND DER PERSPEKTIVE. 1 vol. in-8°, XI-278 pages, avec 331 figures dans le texte. Stuttgart, H. Enderlen, 1905.

Il nous suffira de signaler cet Ouvrage, qui est destiné par son auteur aux Écoles techniques, aux Realgymnases et aux Écoles Réales supérieures. Devant suppléer aux leçons orales ou dictées, il contient les notions essentielles sur la théorie des projections, les propriétés géométriques des coniques, des surfaces de révolution, des hélicoïdes, des épicycloïdes. La troisième et la quatrième Partie donnent la solution des problèmes les plus essentiels et les plus élémentaires de la théorie des ombres et de la perspective.

J. G.

CZUBER (E.). — VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG. Zweiter Band. Zweite, sorgfältig durchgesehene Auflage. VIII-532 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

Nous avons annoncé récemment la seconde édition du premier Volume des Leçons de calcul différentiel et intégral de M. Emanuel Czuber; la nouvelle édition du second Volume, consacré au calcul intégral, est maintenant en vente. Il est inutile de répéter aujourd'hui ce que nous avons dit de cet excellent Livre, lorsque la première édition a paru : son succès est pleinement justifié.

J. T.

(¹) E. PICARD, *Comptes rendus*, 1900.

(²) LACOUR, *Annales de Toulouse*, t. IX, 1895.

VEBLEN (O.) and LENNES (N.-J.). — INTRODUCTION TO INFINITESIMAL ANALYSIS. FUNCTIONS OF ONE REAL VARIABLE. 1 vol. in-8°, VII-224 pages. New-York, J. Wiley and Sons, 1907.

Le livre de MM. Veblen et Lennes est destiné aux étudiants qui, connaissant déjà le calcul infinitésimal, veulent en pénétrer les principes et s'habituer aux formes rigoureuses du raisonnement. C'est une préparation nécessaire à l'étude de la théorie des fonctions, et c'est vraiment à l'intérieur de cette théorie, non au seuil, que MM. Veblen et Lennes conduisent le lecteur.

Ils reprennent au début la notion de nombre et quelques propositions fondamentales de la théorie des ensembles, en particulier le théorème de M. Borel sur les segments qui recouvrent un segment fini, développent les notions de fonction et de limite, d'infiniment petit et d'infiniment grand, de dérivée et d'intégrale. Le dernier Chapitre, sur les intégrales définies impropres, mène le lecteur assez loin dans l'étude des critères d'existence.

L'exposition est précise, rigoureuse et sans pédanterie. Les auteurs ont cherché la concision et l'ont trouvée sans nuire à la clarté; on remarquera les notations commodes dont ils se sont servis pour désigner la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble, un intervalle dont font partie les bornes, dont on exclut une ou deux bornes, etc.

On est quelque peu étonné, au premier abord, de trouver dès les premières pages de ce petit Livre la démonstration de la transcendance des nombres e et π, placée avant la définition et l'étude de la fonction exponentielle : cette place s'explique évidemment par la nature des lecteurs auxquels le Livre s'adresse, lecteurs qui sont déjà familiers avec le maniement de la plupart des matières qu'ont traitées les auteurs : ceux-ci, en détachant ainsi et en plaçant au début cette démonstration, d'un caractère très spécial, ont voulu sans doute éviter une digression, dans le cours de leur exposition.

Je me permettrai une critique qui est plutôt d'ordre logique que d'ordre mathématique, et qui n'enlève rien au mérite et à l'utilité du Livre de MM. Veblen et Lennes. L'existence du nombre

irrationnel est présentée par eux comme un axiome (axiome de la continuité), qu'ils énoncent ainsi :

Si un ensemble $[r]$ de nombres rationnels est borné et n'admet pas de nombre rationnel comme borne supérieure, alors il existe un nombre B $[r]$ et un seul, tel que l'on ait $\overline{B}[r] > r'$, si r' est un nombre de $[r]$ ou un nombre rationnel moindre qu'un nombre de $[r]$, et $\overline{B}(r) < r''$, si r'' est un nombre rationnel plus grand que les éléments de $[r]$. Ce nombre $\overline{B}(r)$ est alors dit *irrationnel*.

Cet énoncé n'est légitime que si l'on sait ce que c'est qu'un nombre, en dehors du nombre rationnel. Je ne crois pas que nous ayons une telle idée. Nous n'observons pas et nous n'atteignons pas le nombre irrationnel ; ce que nous observons, c'est l'existence d'ensembles $[r]$ tels que ceux que l'on vient de décrire, et le nombre irrationnel n'est rien, en dehors d'un tel ensemble, rien qu'une manière commode de parler ou d'écrire. Affirmer son existence, en dehors de l'ensemble $[r]$, me paraît une métaphysique inutile. J. T.

JACKSON (L.-L.). — THE EDUCATIONAL SIGNIFIANCE OF SIXTEENTH CENTURY ARITHMETIC FROM THE POINT OF VIEW OF THE PRESENT TIME. 1 vol. in-8°, 232 pages, New-York. Colombia University, 1906.

Le travail de M. Jackson est intéressant au point de vue de l'histoire scientifique et de la pédagogie : il concerne l'histoire de l'enseignement de l'arithmétique de 1478 à 1600. C'est de 1478 que date le premier traité imprimé d'arithmétique ; les calculs sur l'abacus déclinent ; on reconnaît qu'il est plus commode de calculer avec les chiffres hindous ; le développement des transactions commerciales donne plus d'importance au calcul ; la façon d'opérer se perfectionne et se précise ; les opérations fondamentales sont, dès le XVI[e] siècle, ce qu'elles sont aujourd'hui, sauf pour les fractions décimales ; les problèmes que l'on traite encore aujourd'hui, les règles de trois, de mélange, de société, etc., se retrouvent dans les arithmétiques du XVI[e] siècle. L'époque est donc particulièrement riche et intéressante à étudier.

Cette étude, M. Jackson l'a poursuivie chez les différents

peuples; les sources qu'il a utilisées sont très nombreuses; on trouvera dans son livre un grand nombre de citations et même de reproductions en *fac-simile;* en sorte que le lecteur entre vraiment en contact avec cette intéressante période.

L'auteur y retrouve les courants que l'on distingue encore aujourd'hui : le courant pratique, créé par les marchands, les hommes d'affaires; il s'agit là d'apprendre à calculer, à résoudre des problèmes réels qui se posent dans la vie pratique; le courant théorique qui entraîne ceux qui ont surtout en vue la culture intellectuelle, et la préparation à des études scientifiques; le courant traditionnel qui conserve les choses parce qu'on les a déjà enseignées. Bon nombre de problèmes d'arithmétique plus ou moins amusants sont classiques dès le XVI[e] sièle.

La première partie du Livre de M. Jackson, qui est la plus grosse, ne peut manquer d'intéresser tous ceux qui sont curieux de l'histoire de la science; la seconde partie, où les réflexions philosophiques et pédagogiques abondent, et où l'auteur insiste fortement sur la nécessité d'enseigner aux enfants une arithmétique concrète, qui soit pour eux, en même temps qu'un exercice logique, une source d'informations, mérite d'autant plus d'être méditée par ceux qui enseignent l'arithmétique dans l'ancien monde qu'ils sont plus éloignés de la mentalité américaine. J. T.

MÉLANGES.

SUR LA NON-APPLICABILITÉ DE DEUX CONTINUS A n ET $n+p$ DIMENSIONS;

Par M. René BAIRE.

Introduction. — *L'impossibilité d'établir une correspondance biunivoque, réciproque et continue, entre les points de deux domaines continus à n et n + p dimensions, si* $p \geqq 1$, n'a été démontrée jusqu'ici d'une manière rigoureuse que dans des cas particuliers. M. Lüroth, qui s'en est occupé à plusieurs reprises, l'a établie récemment (*Mathematische Annalen*, 1906) dans le cas de $n \leqq 3$: c'est le résultat le plus complet obtenu jusqu'ici.

Dans le présent travail, je montre que ce théorème, dans le cas le plus général, se déduit d'un petit nombre de propositions concernant les notions d'intérieur et d'extérieur relatives aux courbes fermées dans le plan, aux surfaces fermées dans l'espace et l'hyperespace. Ces dernières propositions étant très importantes en elles-mêmes, indépendamment de l'application actuelle, et se rattachant à d'autres théories de la Géométrie de situation prise au sens général, je les étudierai dans un Mémoire spécial que je publierai ultérieurement.

La méthode que je développe a été indiquée dans une Note portant le même titre que le présent Mémoire et présentée à l'Académie des Sciences de Paris, le 11 février 1907.

1. Entre deux ensembles *fermés* de points : E, situé dans l'espace à n dimensions G_n, et F, situé dans l'espace à m dimensions G_m, il y a *application* s'il existe entre leurs points une correspondance biunivoque, réciproque et telle que, A étant un point variable de l'un quelconque des ensembles, tendant vers un point limite A_0, le point B correspondant à A dans l'autre ensemble tend vers le point B_0 qui correspond à A_0.

Deux points correspondants dans l'application sont dits *images* l'un de l'autre. Deux ensembles pris respectivement dans E et dans F, et tels que tout point de l'un a son image dans l'autre, sont dits *images* l'un de l'autre. Un ensemble *fermé* E_1 contenu dans E a pour image un ensemble F_1 contenu dans F, *qui est fermé;* car, si un point variable B de F_1 tend vers un point limite B_0, l'image A de B tend vers l'image A_0 de B_0, donc A_0 est contenu dans E_1 qui est fermé, donc B_0, image de A_0, est contenu dans F_1, image de E_1, ce qui montre que F_1 est fermé.

2. Il y a lieu d'établir, pour le cas le plus général de l'application de deux ensembles, une proposition qui est l'extension de la notion de continuité uniforme.

Théorème de la continuité uniforme. — *Soient deux ensembles fermés bornés :* E *dans* G_n, F *dans* G_m, *entre lesquels il y a application. Soit* $\alpha > 0$; *on considère tous les couples de points* A, A' *de* E *tels que l'on a : distance* $AA' \leq \alpha$; *la borne supérieure* $\beta(\alpha)$ *des nombres : distance* BB', B *et* B' *étant les images de* A *et* A' *dans* F, *tend vers* 0 *avec* α.

En effet, si cela n'est pas, $\beta(\alpha)$, qui ne peut que décroître quand α décroît, doit rester, quel que soit α, supérieur à un nombre positif déterminé ε; quel que soit l'entier positif h, il y a un couple de points de E : A_h, A'_h, dont la distance est inférieure à 2^{-h}, et tels que leurs images B_h, B'_h ont une distance supérieure à ε.

Faisons $h = 1, 2, 3, \ldots$; considérons la suite $A_1, A_2, A_3, \ldots$ obtenue; elle a, comme on sait, au moins un point limite, ce qui veut dire qu'on en peut extraire une suite, soit $A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2}, \ldots, A_{\lambda_k}, \ldots$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots)$ tendant vers un point A_0; comme E est fermé, A_0 fait partie de E; le point A'_{λ_k}, dont la distance à A_{λ_k} est inférieure à $2^{-\lambda_k}$ et tend, par suite, vers 0, tend vers A_0 comme A_{λ_k}. Les images B_{λ_k}, B'_{λ_k} des points A_{λ_k}, A'_{λ_k} doivent tendre toutes deux vers l'image B_0 de A_0; mais il est impossible que B_{λ_k} et B'_{λ_k} tendent vers le même point, puisque la distance de ces deux points reste toujours supérieure au nombre positif fixe ε. La proposition est donc démontrée.

3. Dans l'espace à n dimensions G_n, rapporté à des coordonnées rectangulaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$, appelons *sphère* de centre $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et de rayon $\rho\,(\rho > 0)$ l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisfaisant à la condition $\Sigma(x_i - a_i)^2 = \rho^2$, et *domaine sphérique* correspondant l'ensemble des points tels que $\Sigma(x_i - a_i)^2 \leqq \rho^2$.

Rappelons que, E étant un ensemble quelconque de G_n, l'ensemble complémentaire $G_n - E$ est l'ensemble des points de G_n qui n'appartiennent pas à E; un point A de G_n est *frontière* pour E si tout domaine sphérique de centre A contient des points de E et des points de $G_n - E$. Si A est un point de E, *non frontière* pour E, il y a un domaine sphérique de centre A dont tous les points font partie de E. Un ensemble fermé contient tous ses points frontières.

Nous avons à démontrer le théorème suivant :

Théorème I. — *Il ne peut y avoir application entre deux ensembles fermés :* E *de* G_n, F *de* $G_{n+p}\,(p \geqq 1)$, *si* F *contient tous les points d'un domaine sphérique à* $n+p$ *dimensions.*

Je vais montrer que ce théorème peut se déduire du théorème II :

Théorème II. — *Soient, dans* G_n, *deux ensembles* P *et* Π *applicables l'un sur l'autre,* P *étant un domaine sphérique; tout point de* P *non frontière pour* P *a pour image un point non frontière pour* Π.

Admettons le théorème II, et supposons qu'on ait deux ensembles fermés : E dans G_n, F dans $G_{n+p}\,(p \geqq 1)$ applicables l'un sur l'autre, F contenant un domaine sphérique Σ, de centre B et de rayon ρ. Rapportons l'espace G_{n+p} à un système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}$ ayant pour origine le centre B de Σ; désignons par Σ_1 l'ensemble des points de Σ pour lesquels on a $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+p} = 0$; Σ_1 est ainsi l'ensemble des points tels que

$$(\Sigma_1) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq \rho^2, \qquad x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+p} = 0.$$

On peut dire que Σ_1 *constitue un domaine sphérique dans*

l'espace à n dimensions G'_n obtenu en coupant l'espace G_{n+p} par le plan $x_{n+1} = \ldots = x_{n+p} = 0$.

Dans l'application de F sur E, Σ_1 s'applique sur un ensemble fermé E_1 contenu dans E; les ensembles Σ_1 et E_1, contenus dans des espaces à n dimensions, se trouvent dans les conditions du théorème II; donc, d'après ce théorème admis, au point B, centre de Σ_1 et, par suite, non frontière dans Σ_1, correspond dans E_1 un point A non frontière dans E_1.

Cela étant, désignons par $B_h (h = 1, 2, 3, \ldots)$ le point

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} = \ldots = x_{n+p-1} = 0, \qquad x_{n+p} = \rho . 2^{-h};$$

B_h appartient à Σ, n'appartient pas à Σ_1, puisque $x_{n+p} \neq 0$, et tend vers B quand h tend vers $+\infty$. Dans ces conditions, le point A_h, image de B_h dans E, tend vers A; comme A est non frontière pour E_1, quand h est assez grand, A_h fait partie de E_1, donc B_h fait partie de Σ_1 qui est l'image de E_1; mais cela est contraire au fait que B_h ne fait pas partie de Σ_1.

En résumé, le théorème I résulte du théorème II.

4. Le théorème II, pour le cas de $n = 1$, se réduit à une proposition élémentaire. En effet, P est alors constitué par un segment de droite. Soit x l'abscisse d'un point A variable de P; x varie dans un intervalle (a, b); l'abscisse y du point B de Π qui correspond à A est fonction continue de x et ne prend pas deux fois la même valeur; donc B décrit un segment de droite Π, et à tout point A distinct des extrémités de P correspond un point distinct des extrémités de Π : c'est le théorème II pour le cas de $n = 1$.

5. Il faut établir le théorème II dans le cas de $n \geqq 2$. Posons quelques définitions.

Dans l'espace G_n, appelons *surface fermée simple* tout ensemble applicable sur une sphère.

Nous dirons qu'un point M variable décrit un *chemin continu* si sa position dépend d'un paramètre t qui prend toutes les valeurs d'un intervalle (a, b), et si ses coordonnées sont fonctions continues de t.

Supposons qu'à chaque valeur de t d'un intervalle (a, b) cor-

responde une surface fermée simple Σ dans les conditions suivantes : Σ peut être considérée comme un ensemble de points M dont chacun décrit un chemin continu quand t va de a à b ; nous dirons que Σ *varie d'une manière continue en fonction de* t.

Nous allons montrer que le théorème II peut se déduire de l'ensemble des propositions que nous réunissons dans l'énoncé suivant :

Théorème III. — *Σ étant une surface fermée simple de* G_n $(n \geqq 2)$:

1° *Il y a pour Σ un intérieur* I, *un extérieur* E. *Tout point de* I (*de* E) *est centre d'un domaine sphérique dont tous les points appartiennent à* I (*à* E).

2° *La distance de deux points quelconques de* I *est moindre que la borne supérieure des distances de deux points de* Σ.

3° *Un chemin continu allant d'un point de* I *à un point de* E *contient au moins un point de* Σ.

4° *Si une surface fermée simple Σ varie d'une manière continue en fonction d'un paramètre t qui prend toutes les valeurs d'un intervalle* (a, b), *un point déterminé* M *de* G_n *qui ne se trouve sur Σ pour aucune valeur de t est, ou constamment à l'intérieur de Σ, ou constamment à l'extérieur.*

6. Admettons ce théorème. Soit, dans G_n, P un domaine sphérique de centre O et de rayon 1, applicable sur un ensemble II. Soit S_ρ $(0 \leqq \rho < 1)$ la sphère de centre O et de rayon ρ, soit Σ_ρ la surface image de S_ρ (S_0 et Σ_0 sont, non des surfaces, mais des points). ρ variant de 1 à 0, nous pouvons considérer la sphère S_ρ *comme un ensemble de points* M *dont chacun décrit un rayon du domaine sphérique* P. Ainsi S_ρ varie d'une manière continue en fonction de ρ en balayant le domaine P. Dans les mêmes conditions, l'image N du point M de S_ρ décrit un chemin continu, donc *la surface Σ_ρ varie d'une manière continue et balaye le domaine* II.

Cela posé, S_1, qui est la frontière de P, a pour image la surface Σ_1 ; il y a pour Σ_1 (d'après III, 1°) un intérieur et un extérieur.

Je dis que *tout point intérieur à Σ_1 fait partie de* II. Si cela n'est pas, il y a un point H intérieur à Σ_1 et ne faisant pas partie

de Π; comme Π est fermé, on peut trouver un domaine sphérique γ de centre H, de rayon $r > 0$, contenu entièrement à l'intérieur de Σ_1, et dont aucun point ne fait partie de Π.

Soit M un point quelconque de γ. Considérons les diverses surfaces Σ_ρ obtenues en faisant varier ρ de 1 à 0. Comme M est intérieur à Σ_1 et ne se trouve sur aucune surface Σ_ρ, d'après III (4°), M est intérieur à toutes ces surfaces. Donc, quel que soit $\rho > 0$, le domaine γ est intérieur à Σ_ρ.

Mais cela est impossible, car, d'après le théorème de la continuité uniforme, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que, à deux points de P dont la distance est $\leqq \alpha$, correspondent deux points de Π dont la distance est $< 2r$. Considérons alors la sphère S_ρ, en supposant $2\rho < \alpha$; la distance de deux points de S_ρ est moindre que α, donc la distance de deux points de Σ_ρ est moindre que $2r$, donc (III, 2°) la distance de deux points intérieurs à Σ_ρ est moindre que $2r$; il est donc impossible que le domaine sphérique γ de diamètre $2r$ soit intérieur à Σ_ρ. Donc tout point intérieur à Σ_1 est dans Π.

D'ailleurs, *les images* N, N′, *dans* Π, *de deux points* M, M′, *intérieurs à* S_1, *ne peuvent être, l'une intérieure, l'autre extérieure à* Σ_1; si cela était, faisons décrire à un point A le segment MM′, tout entier intérieur à S_1; l'image B de A décrit un chemin continu allant de N en N′; donc (d'après III, 3°) ce chemin contient un point de Σ_1; mais c'est impossible, puisque tout point du chemin est l'image d'un point A non situé sur S_1.

D'après cela, il ne peut y avoir d'image de point de P à l'extérieur de Σ_1, donc tout point de P intérieur à S_1 a son image à l'intérieur de Σ_1. En résumé, *il y a identité entre* Π *et l'ensemble formé par* Σ_1 *et son intérieur; les frontières se correspondent; les points non frontières se correspondent* : c'est le théorème II.

Tout revient, comme on voit, à démontrer les différentes parties du théorème III. Remarquons que, dans le cas de $n = 2$, les propositions dont il s'agit, ou bien sont contenues dans le théorème de M. Jordan sur les courbes fermées, ou bien en résultent d'une manière directe. Je me propose d'établir ces propositions pour le cas de n quelconque dans un prochain Mémoire.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Mathé (Franz). — *Karl Friedrich Gauss*. Gr. in-8°, 30 p. avec portrait. Leipzig, W. Weicher. (*Männer der Wissenschaft*. 6. Heft.) 1 m.

Picard (E.) et Simart (G.). — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*. T. I. In-8°, vi-528 p. Paris, Gauthier-Villars.

Coissac (G.-M.). — *La théorie et la pratique des projections*. In-8°, ix-699 p. avec 400 fig. Paris, impr. Feron-Vrau.

Lorentz (H.-A.). — *Versuch einer Theorie der elektrischen u. optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. Réimpression sans modification (anastatique) de la 1re édition, parue en 1895. Gr. in-8°, iii-139 p. Leipzig, Teubner. Relié, 3 m. 20 pf.

Amodeo (F.). — *Vita matematica napolitana*. 1re partie. In-8°. Napoli, Giannini et fils. 10 l.

Brioschi (F.). — *Opere matematiche*. T. IV. In-4°. Milano, Hoepli. 25 l.

Ebner (F.). — *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven*. Gr. in-8°, viii-197 p. avec 93 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 4 m.

Rohn (Karl) u. Erwin Papperitz. — *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*. 3e édition en 3 volumes gr. in-8°. Leipzig, Veit et Cie. 28 m.; relié, 31 m. T. I. xx-476 p. avec 341 fig., 13 m.; relié, 14 m. T. II. vi-194 p. avec 116 fig., 6 m.; relié, 7 m. T. III. x-334 p. avec 157 fig., 9 m.; relié 10 m.

Sachse (J.-J.). — *Zur mechanischen Drittelung eines Winkels u. die planimetrische Bestimmung eines Grades der Kreislinie*. Gr. in-8°, 39 p. avec 2 planches. Heiligenstadt, Cordier. 1 m. 20 pf.

Vivanti (G.). — *Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari*. 2 vol. in-16. Milano, Hoepli. 3 l.

Adler (Aug.). — *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. In-8°, viii-301 p. avec 177 fig. Leipzig, Göschen. Relié, 9 m.

BURKHARDT (HEINR.). — *Funktionen theoretische Vorlesungen.* 2. Bd. *Elliptische Funktionen.* 2e édition, gr. in-8°, XVI-374 p. avec fig. Leipzig, Veit et Cie. 10 m.; relié, 11 m.

Deutscher Geometer-Kalender, für d. J. 1907, unter besonder. Berücksichtigg. der Bedürfnisse der preuss. Kollegen, bearb. v. K. MUHLENHARDT. 6. Jahrg. 2 Tle. In-8°, 136 et 150 p. avec une carte. Liebenwerda, Reiss. Relié, 2 m.

Katalog der astronomischen Gesellschaft. 2. Abtlg. Kalatog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 2° u. 23° südl. Deklination f. das Aequinoktium 1900. 1. Stück. In-4°, 32 et 191 p. Leipzig, Engelmann. 16 m.

MACH (E.). — *Space and Geometry.* In-8°. London, Paul. 5 sh.

MINCHIN (G.-M.) and DALE (J.-B.). — *Mathematical Drawing.* In-8°, 154 p. London, Arnold. 7 sh. 6 d.

SERRET (J.-A.). — *Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung.* Nach AXEL HARNACKS Uebersetzg. 3. Aufl., neu bearb. v. G. SCHEFFERS. 1. Bd. Differentialrechnung. Gr. in-8°, XVI-624 p. avec 70 fig. Leipzig, Teubner. 12 m.; relié, 13 m.

BLASCHKE (ERNST). — *Vorlesungen über mathematische Statistik.* Gr. in-8° de VIII-268 p. avec 17 fig. et 5 planches. (*Teubner's Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften.* XXIII. Bd.) Leipzig, Teubner. 7 m. 40 pf.

BÖRSCH (A.). — *Astronomisch-geodätisches Netz 1. Ordnung nördlich der europäischen Längengradmessung in 52 Grad Breite (Lotabweichungen,* 3. Heft). VI-164 p. avec 1 planche lith. (*Veröffentlichung des kgl. preuss. geodätischen Instituts.* Neue Folge. Nr. 28. In-8°. Berlin, Stankiewicz.)

ZELTZ (R.). — *Handbuch der Nautik.* In-8°, XI-306 p. avec 68 fig. et 11 planches. Leipzig, J.-J. Weber. (*Weber's illustrierte Handbücher.* 257. Bd.)

D'ALBE (E.-E.-F.). — *Electron theory. Popular introduction to the new theory of Electricity and Magnetism.* In-8°, 336 p. London, Longmans. 5 sh.

BOURDON. — *Application de l'Algèbre à la Géométrie, comprenant la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions.* Nouveau tirage. In-8°, XVIII-650 p. avec fig. et planches. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

CLAUDEL (J.). — *Handbook of Mathematics for Engineers.* Transl. by O.-A. Kenyon. In-8°. London, Spon. 15 sh.

CZUBER (EMAN.). — *Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung*. II. Bd. 2. Aufl. Gr. in-8°, VIII-532 p. et 87 fig. Leipzig, Teubner. Relié : 12 m.

EGGENBERGER (JOHS.). — *Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals*. 2. Aufl. In-8°, 79 p. Iena, Fischer. 2 m. 50 pf.

FIELDS (JOHN-CHARLES). — *Theorie of the algebraic functions of a complexe variable*. In-8°, III-VII-186 p. Berlin, Mayer et Müller. 12 m. Relié : 15 m. 50 pf.

FUCHS (L.). — *Gesammelte mathematische Werke*. Herausgeg. von RICH. FUCHS u. LUDW. SCHLESINGER. 2. Bd. *Abhandlungen* (1875-1887). In-8°, X-487 p. Berlin, Mayer et Müller. 30 m. Relié : 34 m. 50 pf.

HARBAUER (KARL). — *Die praktische Geometrie* (*Feldmesskunst*). 2. Aufl. Gr. in-8°, IV-136 p. av. 185 dessins et 5 pl. Wien, Stern. 8 m. 50 pf.

MAILLET (E.). — *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*. In-8°, V-280 p. Paris. Gauthier-Villars. 10 fr.

NEWCOMB (S.). — *Side lights on Astronomie and kindred fields of popular science. Essays and Adresses*. In-8°, 360 p. London, Harper. 7 sh. 9 d.

NIELSEN (NIELS). — *Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten*. In-8°, VI-106 p. Leipzig, Teubner. 3 m. 60 pf.

REYE (THEODOR). — *Die Geometrie der Lage. Vorträge*. 2. Abtlg. 4. Aufl. Gr. in-8°, VIII-335 p. av. 33 fig. Stuttgart, Kröner. 10 m. Relié : 12 m.

SCHUSTER (A.). — *Transactions of the international Union for Cooperation in Solar research*. Vol. I. In-8°, 270 p. av. fig. London, Sherratt et H. 7 sh. 6 d.

BRILLOUIN (M.). — *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*. 1re PARTIE : *Généralités; Viscosité des liquides*. In-8°, VII-228 p. av. fig. Paris, Gauthier-Villars, 9 fr.

GIBBS (J.-WILLARD). — *Scientific Papers*. 2 vol. Vol. I, *Thermodynamics*, 24 sh.; Vol. II : *Dynamics*, 18 sh. London, Longmans.

LOVE (A.-E.-H.). — *Theoretical Mechanics. An introductory treatise on the principles of Dynamics*. 2e édit. In-8°, 384 p. Cambridge, Univ. Press. 12 sh.

Rutherford (E.). — *Radioactive transformations.* In-8°, 298 p. avec diagrammes. London, Constable. 16 sh.

Brückner (Max). — *Ueber die gleicheckig-gleichflächigen, diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder.* In-4°, 348 p. avec 29 pl. Leipzig, Engelmann. (*Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher*, 86. Bd., N° 1.) cart., 27 m.

Enders (M. Adf.). — *Ueber die Darstellung der Raumkurve 4. Ordnung vom Geschlecht 1 durch Thetafunktionen.* In-4°, 32 p. Leipzig, Engelmann. (*Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher*, 85. Bd., N° 4.) 2 m.

French (C.-H.). — *Grapho, or the graphical representation of algebraic Functions*, 2ᵉ édit. In-8°, 136 p. London, Clive. 1 sh. 6 d.

Laurent (H.). — *La Géométrie analytique générale.* In-8°, VII-153 p. Paris, Hermann.

Riollot (J.). — *Les Carrés magiques. Contribution à leur étude.* In-8°, 124 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

Rosenberg (Hans). — *Der veränderliche χ Cygni.* In-4°, 125 p. avec 22 pl. Leipzig, Engelmann. (*Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher*, 85. Bd., N° 2.) 15 m.

Appell (P.) et Chappuis (J.). — *Leçons de Mécanique élémentaire.* IIᵉ Partie, 2ᵉ édit. In-16, 244 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 25.

Annales de l'Observatoire d'Astronomie physique de Paris, publiées par J. Janssen. T. III, 1ᵉʳ fasc., in-4°, 34 p. et 9 planches. Paris, Gauthier-Villars.

Bertini (E.). — *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi; con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità.* In-8°, 426 p. Milano, Hoepli. 14 l.

Carslaw (H.-S.). — *Introduction to the theory of Fourier's series and integrals.* In-8°. London, Macmillan. 14 m.

Hermes (Oswald). — *Die Formen der Vielflache.* In-4°, 13 p. avec 2 planches. Leipzig, W. Engelmann. (*Abhandlungen. d. kaiserl. Leop. Carolin. deutschen Akademie d. Naturforscher.* 85. Bd., n° 5.) 2 m.

Jacobi (C.-G.-J.). — *Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend ein Anzahl v. Veränderlichen.* Herausgeg v. *G. Kowalewski.* In-8°, 228 p. Leipzig, Engelmann. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, n° 156.) 4. m.

JACOBI (C.-G.-J. u. M.-H.). — *Briefwechsel.* Herausgegeben von *W. Ahrens.* Gr. in-8°, xx-282 p. avec 2 portraits. Leipzig, Teubner. 6 m. 90 pf. Relié 7 m. 50 pf.

NIELSEN (NIELS). — *Recherches sur les fonctions sphériques.* Kopenhagen, Höst und Sohn. 1 kr. 75 ö.

PETIT BOIS (G.). — *Tafeln unbestimmter Integrale.* In-8°, XII-154 p. Leipzig, Teubner. 8 m.

POINCARÉ (H.). — *Leçons de Mécanique céleste,* professées à la Sorbonne. T. II, 1re Partie : *Développement de la fonction perturbatrice.* In-8°, 172 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

POINSOT (L.), CAUCHY (A.-L.), BERTRAND (J.), CAYLEY (A.). — *Abhandlungen über die regelmässigen Sternkörper.* Uebersetzt u. herausgeg. von *Rob. Haussner.* In-8°, 128 p. avec 58 fig. et 2 planches. Leipzig, Engelmann. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, n° 151). Cart. 2 m. 80 pf.

LOVE (A.-E.-H.). — *Lehrbuch der Elastizität.* Deutsch herausgeg. von *A. Timpe.* XIV-664 p. avec 75 fig. (*B.-G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* XXIV. Bd.) Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. Relié 16 m.

VOLTERRA (V.). — *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles.* In-8°. Upsala, Almqvist et Wicksell. 3 kr. 50 ö.

CRUZ (ALPHONSE). — *Une leçon de Physique et de Mécanique au* XXe *siècle. L'Énergie : Théorie de la nature de l'énergie, à propos des récentes découvertes des sels de radium et du téléphote.* In-8°, 24 p. Amiens, impr. Jeunet. 75 c.

HELMHOLTZ (H. v.). — *Vorlesungen über theoretische Physik.* IV. Bd. *Vorlesungen über Elektrodynamik u. Theorie des Magnetismus.* Herausgeg. von *Otto Krigar-Menzel* u. *Max Laue.* In-8°, X-406 p. avec 30 fig. Leipzig, Barth. 16 m.; relié 17 m. 50 pf.

LODGE (Sir O.). — *Modern views on matter.* Romanes Lecture, 1903. New edit. In-8°. London, Frowde. 1 m.

RUTHERFORD (E.). — *Die Radioaktivität.* Unter Mitwirkg. des Verf. ergänzte deutsche Ausgabe von *E. Aschkinass.* Gr. in-8°, X-597 p. avec fig. Berlin, Springer. 16 m.; relié 18 m. 50 pf.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CHARBONNIER (Commandant P.). — BALISTIQUE EXTÉRIEURE RATIONNELLE. PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL (*Encyclopédie scientifique : Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie*). 1 vol. in-18 jésus, de 492 pages. Paris, Doin, 1907.

La librairie Doin vient d'inaugurer une *Encyclopédie scientifique*, destinée à faire connaître, dans une série de volumes d'un prix modéré [1], l'état présent de toutes les branches de la Science pure et appliquée. Cette Encyclopédie, conçue d'après un plan méthodique, est divisée en 40 Bibliothèques affectées chacune à une spécialité distincte et dirigées par des hommes d'une compétence reconnue. Pour nous borner à ce qui peut intéresser les lecteurs du *Bulletin*, disons que la Philosophie des sciences est confiée à M. Painlevé, les Mathématiques pures à M. Drach, et les Mathématiques appliquées à M. d'Ocagne.

Dans la Bibliothèque de Mécanique appliquée vient de paraître un premier volume, dû à M. le Commandant Charbonnier, de l'artillerie coloniale, et qui traite de la Balistique extérieure rationnelle.

L'auteur, depuis quelques années déjà, s'est attaché à coordonner, dans une synthèse d'ensemble, toutes les méthodes, anciennes ou modernes, proposées pour l'étude du mouvement des projectiles dans l'air. Bon mathématicien, il a lui-même grandement perfectionné ces méthodes qui, sous la forme qu'il leur a donnée, ont été adoptées par la Commission de Gâvre pour le service journalier de ses expériences et l'établissement des tables de tir des canons de la marine. Cela suffit à attester la valeur technique de l'ouvrage du commandant Charbonnier ; mais ce n'est pas de ce point de vue que nous avons à le considérer ici.

---

[1] Chaque volume se vend cartonné au prix de 5f.

La Balistique extérieure rationnelle, c'est-à-dire l'étude mathématique du mouvement dans l'air d'un projectile, peut être regardée comme un chapitre de Mécanique rationnelle entièrement développé, où l'application des principes empruntés à la théorie est poussée aussi loin que faire se peut, et, à ce titre, elle est susceptible de vivement intéresser tous ceux qui veulent approfondir l'étude de la Mécanique générale. Pour ceux-là, le livre du commandant Charbonnier sera fertile en surprises, outre que, comme nous le dirons plus loin, il leur ouvre un champ très vaste d'exercices dont l'intérêt s'accroît du lien qui les rattache à un si bel ensemble d'applications pratiques.

Entre la Balistique, telle qu'elle est traitée par l'auteur, et la Mécanique céleste, de prime abord, un rapprochement s'impose. Dans un cas comme dans l'autre, une première étude néglige les causes de faibles variations pour ne s'attacher qu'aux principales ; une seconde étude sert ensuite à mettre en évidence les perturbations produites par les causes d'abord négligées.

Cette division, systématiquement introduite en Balistique par le commandant Charbonnier, conduit à envisager tout d'abord le *problème balistique principal* qui s'énoncera ainsi : *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant, dans un milieu en repos, de densité constante, qui lui oppose une résistance tangentielle, fonction de la vitesse, la terre étant d'ailleurs supposée plane et immobile, la gravité constante en grandeur et en direction.*

La détermination des termes correctifs tenant aux causes négligées pour la première approximation donnera lieu à autant de *problèmes secondaires*. Ces causes sont d'ailleurs réparties par l'auteur en quatre groupes suivant qu'elles se rapportent :

1° A la terre (sphéricité ; rotation) ;

2° A la gravité (variations avec l'altitude et la latitude, convergence des verticales) ;

3° A l'atmosphère (variation de la densité avec l'altitude ; vent atmosphérique) ;

4° Au projectile (dérivation).

Le premier volume, qui vient de paraître, est tout entier consacré au problème principal ; il doit, à brève échéance, être suivi d'un second où seront traités les problèmes secondaires.

Une courte Introduction, dans laquelle sont rappelées les principales notions relatives à la résistance de l'air, sert à donner au problème balistique une base vraiment rationnelle en montrant que — suivant les idées de Saint-Robert et de Siacci, élargies par le commandant Charbonnier lui-même — la solution doit en être développée indépendamment de la forme explicite de la fonction $F(v)$ intervenant dans l'expression de la loi de résistance de l'air.

Le problème balistique principal mettant en présence, en chaque point de la trajectoire, deux forces [la gravité g et la résistance de l'air $cF(v)$] et une direction (l'inclinaison τ de la tangente à la trajectoire), il sera utile, pour mieux saisir l'allure générale du phénomène, de se rendre compte de ce qu'elle devient lorsque l'un ou l'autre des éléments intervenants atteint sa valeur limite : $cF(v) = 0$ (mouvement dans le vide); $g = 0$ (mouvement rectiligne dans l'air); $\tau = \pm \frac{\pi}{2}$ (mouvement vertical d'un point pesant). A ces cas limites est consacré le Livre I.

Le mouvement dans le vide, étudié au Chapitre I, est le cas le plus classique (bien souvent le seul abordé dans les ouvrages didactiques relatifs à la Mécanique générale). Nous n'aurions rien à en dire sinon que l'auteur en pousse la solution bien plus à fond qu'on n'a coutume de le faire (*voir* au n° 19 le Tableau récapitulatif de toutes les formules qui y interviennent, et au n° 36 un curieux théorème sur l'arc maximum de trajectoire décrit entre l'origine et le point de chute).

De même, le mouvement rectiligne dans un milieu résistant comporte, au Chapitre II, une discussion très générale qui va sensiblement plus loin que celles que l'on trouve dans les ordinaires Traités de Mécanique ; et aussi, le mouvement vertical dans le Chapitre III. Sur ce dernier point, il convient de signaler l'introduction de fonctions conduisant à des développements très symétriques pour le mouvement soit ascendant, soit descendant.

Dans le Livre II est attaqué le problème envisagé dans toute sa généralité, en tant du moins qu'il peut être abordé par la seule discussion des équations différentielles du mouvement, établies au Chapitre IV. Cette discussion permet de mettre en lumière, dans le Chapitre V, un certain nombre de théorèmes généraux d'une application constante, parmi lesquels ceux qui ressortent de l'étude de l'hodographe (qui est à citer comme modèle de discussion d'un

problème de Mécanique rationnelle) méritent une mention spéciale tant à cause de leur importance que de la nouveauté de la plupart d'entre eux.

En ce qui concerne la trajectoire, définie par les équations différentielles, l'auteur semble bien être le premier à démontrer qu'elle se compose en réalité de deux branches, l'une (celle que suivent les projectiles) anciennement étudiée, mais qu'il envisage ici avec sa plus grande généralité en laissant indéterminée la loi de résistance de l'air, l'autre dite *isolée* (qui correspond, dans la réalité, au mouvement des bolides pénétrant dans l'atmosphère) et qui n'avait pas été considérée avant lui.

L'examen, poursuivi au Chapitre VI, principalement d'après Saint-Robert et Siacci, des cas où la forme de la fonction $F(v)$ de la résistance de l'air permet l'intégration complète, en termes finis, de l'équation de l'hodographe, conduit l'auteur à établir une division des théories balistiques qui constitue la véritable clef de l'ouvrage, car c'est d'elle que dérive la classification de l'énorme masse de travaux accumulés jusqu'à ce jour sur la Balistique et au milieu desquels, avant le commandant Charbonnier, on avait grand mal à se reconnaître.

Cette division repose sur la considération de trois sortes de séries : 1° séries ordonnées suivant les puissances ascendantes (tir tendu à grande vitesse) ou descendantes (tir courbe à faible vitesse) du coefficient balistique; 2° séries résultant d'un développement trigonométrique (fonctions de Siacci) parmi lesquelles les plus importantes sont celles qui se rapportent au cas où l'inclinaison reste voisine de zéro (tir de plein fouet); 3° séries spéciales autour d'un point remarquable.

Elle a déterminé la répartition des matières dans le reste de l'ouvrage; mais, soucieux avant tout du but pratique en vue duquel a été édifiée la théorie, l'auteur a proportionné la place réservée à chaque partie de cette théorie à l'importance qu'elle présente au regard des applications réelles.

C'est ainsi qu'après avoir accordé une place prépondérante au tir de plein fouet qui remplit tout le Livre IV, il s'attache successivement, dans le Livre V, aux séries balistiques qui, le cas précédent mis à part, offrent le plus d'intérêt pour l'artilleur, savoir : celles qui rentrent dans les groupes suivants : 1° fonctions de Siacci

autour d'un point (considérées comme généralisant la théorie du tir de plein fouet); 2° tir tendu à grande vitesse; 3° tir courbe à faible vitesse (tir des mortiers).

Auparavant, en raison tant de son importance historique que de l'intérêt pratique qui s'y attache, il traite à part, dans le Livre III, de la théorie fondée sur une loi de résistance de l'air proportionnelle à une puissance de la vitesse. C'est, en effet, une telle loi monome (réduite d'ailleurs à la forme quadratique) qui a permis à Euler d'établir la théorie, remarquable à tous égards, où l'on reconnaît le point de départ incontesté de tous les progrès réalisés depuis lors par la Balistique rationnelle.

L'exposé que le commandant Charbonnier nous donne de cette théorie, outre qu'il est d'une parfaite netteté, renferme quelques formules nouvelles et se termine par des considérations générales sur le rôle des Mathématiques en ce genre d'application, dont la portée n'est pas restreinte au problème particulier qui les a fait naître.

Le Chapitre VIII est la mise au point, avec des notations uniformes, de tous les travaux fondés sur les diverses lois de résistance monomes, parmi lesquels ceux de M. Greenhill, qui donnent, pour le cas de la résistance cubique, la solution complète du problème au moyen des fonctions elliptiques, sont particulièrement faits pour fixer l'attention des mathématiciens.

Avec le Chapitre IX s'ouvre l'étude du tir de plein fouet, à laquelle l'auteur a apporté une contribution personnelle importante, particulièrement sensible au paragraphe 4, où il indique d'intéressantes propriétés générales des trajectoires de plein fouet, habilement ramenées à un type unique, et au paragraphe 5, où il établit les formules différentielles permettant le calcul immédiat d'une trajectoire lorsqu'on part d'une autre très voisine.

Le Chapitre X, grâce à une forme nouvelle donnée aux formules de Siacci (avec deux coefficients indéterminés), renferme une discussion complète et entièrement neuve de tous les travaux antérieurs relatifs au sujet, venant ici se ranger tout naturellement suivant leur ordre logique.

On peut également faire personnellement honneur à l'auteur de toute la matière du Chapitre XI réservé à la détermination du deuxième terme de la série du tir de plein fouet, problème dont

il a su, le premier, donner une solution complète et exacte où se révèle toute son habileté dans le maniement de l'analyse.

La même observation s'étend d'ailleurs à une partie notable des trois derniers chapitres (fonctions balistiques de Siacci; tir tendu à grande vitesse; tir courbe à faible vitesse), où le Commandant Charbonnier, par une analyse heureusement conduite, complète, au moyen d'un second terme, des séries dont le premier terme était seul connu jusqu'ici.

Ajoutons que, sous forme d'exercices, l'ouvrage contient encore une foule de propositions d'un notable intérêt mathématique qui nous semblent devoir constituer, pour les étudiants en Mécanique, un moyen d'entraînement bien autrement efficace que celui qui se peut tirer de problèmes bâtis de toutes pièces sur des hypothèses parfois sans contact avec la réalité.

Il convient aussi de noter à quel point, dans cet ouvrage, bien réellement encyclopédique, car il résume admirablement tout ce que la Science a pu nous apprendre sur le sujet dont il traite, l'auteur a su faire montre d'originalité tant par l'introduction des parties nouvelles qui lui sont dues en propre, que par l'ordre parfait qu'il a fait pénétrer dans l'exposé des travaux antérieurs; à voir la belle unité à laquelle il a su les réduire on ne soupçonnerait pas combien, sous leur forme primitive, ils étaient en réalité disparates.

Il est enfin à propos de faire observer que tous les problèmes traités par le Commandant Charbonnier, où l'analyse joue un rôle prépondérant, sont nés des besoins de la pratique et non du souci d'illustrer la théorie. Aussi renverrons-nous à ce remarquable non moins qu'intéressant volume ceux qui seraient tentés de méconnaître l'utilité fondamentale des Mathématiques dans le domaine technique. P. M.

ALFRED KOPPISCH. — Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Inaugural-Dissertation der Universität Greifswald. Leipzig, Teubner, 1905.

La thèse de M. Koppisch apporte une contribution nouvelle à l'étude des propriétés ponctuelles invariantes de l'équation différentielle ordinaire du second ordre; il n'est pas besoin de mettre en évidence l'importance d'une pareille recherche : il suffit pour cela de rappeler principalement les récents travaux de M. Painlevé. Cette thèse se recommande en outre par sa lumineuse simplicité; n'exigeant presque aucune érudition, elle est à donner en exemple aux débutants qui croient ne pouvoir faire œuvre personnelle sans être chargés d'un lourd bagage de connaissances.

Voici les deux idées fondamentales du travail. En premier lieu, considérons une équation différentielle ordinaire du second ordre

$$(1) \qquad y'' = \omega(x, y, y');$$

sa solution générale peut être mise sous la forme

$$(2) \qquad y = f(x, a, b),$$

a et b étant deux constantes arbitraires; si dans cette relation (2) on fait jouer à x et y le rôle de constantes arbitraires, à a celui de la variable, à b celui de la fonction, on *associera* à l'équation (1) une autre équation de même forme

$$(3) \qquad b'' = \varphi(a, b, b'),$$

ou mieux, à cause de l'indétermination dans le choix des constantes a et b, une classe d'équations (3) se déduisant les unes des autres par des transformations ponctuelles. Enfin, d'après la définition même, il y a réciprocité entre les équations (1) et (3), ou plutôt entre les deux classes d'équations qui comprennent chacune d'elles.

Cela étant, il y a intérêt à rechercher des types d'équations (1) dont la forme reste invariante dans toute transformation ponctuelle. Parmi eux, on connaît l'équation

$$(4) \qquad y'' = \alpha_0(x, y) - 3\alpha_1(x, y)y' + 3\alpha_2(x, y)y'^2 - \alpha_3(x, y)y'^3.$$

dans laquelle ω est un polynome entier en y' du troisième degré. M. Koppisch, s'inspirant de résultats dus à MM. Study et Engel, généralise, et démontre que l'équation

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} y''^{n} g_m(y') + y''^{n-1} g_{m+3}(y') + \ldots \\ \qquad + y''^{n-\mu} g_{m+3\mu}(y') + \ldots + g_{m+3n}(y') = 0, \end{array}\right.$$

où les g sont des polynomes entiers en y', de degré marqué par les indices, à coefficients quelconques en x et y, constitue le type général des équations *algébriques en y' et y''*, qui conservent leur forme dans toute transformation ponctuelle. En particulier, pour le cas de $n = 1$, on a le type simple

$$(6)\qquad y'' g_m(y') = g_{m+3}(y'),$$

qui, plus particulièrement encore, comprend, pour $m = 0$, le type (4).

Alors se pose la question suivante : quelles sont les équations (1) dont l'*équation associée* (3) appartient à un type de la forme (5) correspondant à des valeurs déterminées de n et m? M. Koppisch en donne la solution, pour les cas particuliers du type (4) d'abord, puis du type (6), et en annonce la solution pour le cas général.

Pour y arriver, il suffit manifestement, prenant comme inconnues les coefficients de l'équation associée du type (4) ou (6), d'exprimer que celle-ci est identiquement vérifiée, quel que soit x, par tout système de solutions de la relation (2). Des dérivations successives conduisent d'abord à des équations linéaires qui déterminent les inconnues, puis à la condition nécessaire et suffisante que doit remplir ω dans l'équation proposée (1). Ce simple aperçu laisserait croire que la recherche est des plus faciles ; dès qu'on l'aborde, au contraire, on est conduit à des calculs qui semblent inextricables. Le grand mérite de l'auteur est non seulement de s'être posé le problème, mais aussi d'avoir dirigé ses calculs avec beaucoup de simplicité grâce à l'emploi de notations symboliques inspirées de la théorie des formes. Voici ses résultats.

Considérons les expressions ψ_i définies par les formules

$$4\psi_1 = -\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y'^2} + 4\frac{d}{dx}\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial y'} - 6\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial\omega}{\partial y'}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial^2\omega}{\partial y'^2} - 4\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial y'}\right] + 3\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial^2\omega}{\partial y'^2}.$$

et

$$(i+1)\psi_{i+1} = \frac{d\psi_i}{dx} - (i-2)\frac{\partial\omega}{\partial y'}\psi_i + (i-4)\frac{\partial\omega}{\partial y}\psi_{i-1},$$

avec

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial y'}.$$

L'équation (3), *associée* à l'équation (1), appartient au type (4) sous la condition

$$\psi_4 = 0,$$

et, plus généralement, au type (6), sous la condition

$$\begin{vmatrix} \psi_{m+4} & \psi_{m+3} & \cdots & \psi_4 \\ \psi_{m+5} & \psi_{m+4} & \cdots & \psi_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{2m+4} & \psi_{2m+3} & \cdots & \psi_{m+4} \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque l'une ou l'autre de ces conditions est remplie, si, pour constantes a et b, on choisit les valeurs initiales $a = y_0$, $b = y'_0$, de la fonction y et de sa dérivée y', pour $x = x_0$, la formation de l'équation associée (3) exige seulement la résolution d'équations linéaires.

Comme application, si l'on considère une équation qui appartienne au type (4) en même temps que son associée, on trouve que cette équation se réduit par une transformation ponctuelle à la forme $y'' = 0$. La réciproque étant manifeste, on obtient ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette réduction soit possible.

Je termine par une remarque personnelle, en disant avec quel intérêt j'ai lu la thèse de M. Koppisch. Il y a onze ans, j'avais montré, sur un exemple particulier, la fécondité des théories de Lie, en déterminant [1] les invariants ponctuels de l'équation (1). Restait, ce que ne donnaient pas ces théories, à trouver la signification de ces invariants. C'est cette lacune que vient de combler M. Koppisch, car le plus simple de ces invariants, après $\frac{\partial^4\omega}{\partial y'^4}$ dont

---

[1] *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre.* Leipzig, Breitkopf u. Hartel, 1896.

la signification est immédiate, est précisément $\frac{1}{2}$. Nous espérons lire bientôt la suite de son travail : elle promet d'être d'un haut intérêt.

A. Tresse.

ANDOYER (H.). — Cours d'Astronomie. Première Partie : Astronomie théorique. 1 vol. in-8° : 222 pages lith. Paris, Hermann, 1906.

Des définitions précises, des démonstrations élégantes et rigoureuses, des vues générales, une exposition claire et concise, on est bien assuré de trouver tout cela dans un Livre de M. Andoyer : le Cours d'Astronomie dont il vient de publier la première Partie satisfera sûrement, par son caractère mathématique, les étudiants qui sont surtout mathématiciens et qui, sans vouloir être astronomes, regardent avec raison l'Astronomie comme une partie essentielle de leur culture; mais c'est bien l'œuvre d'un astronome; l'auteur, qui suppose la Cosmographie connue, a voulu enseigner l'Astronomie telle qu'elle se fait dans les observatoires; il apprend à se servir de la *Connaissance des Temps*, à en utiliser les données; il en adopte les notations; il n'oublie pas, quand il a besoin de quelque constante numérique, de recourir aux meilleures déterminations et aux plus récentes.

Voici tout d'abord un exposé complet de la Trigonométrie sphérique : les triangles sphériques sont étudiés dans toute leur généralité; l'établissement des formules fondamentales n'en est que plus simple et plus clair. On trouvera là les formules différentielles, la théorie des triangles géodésiques sur la sphère, le théorème de Legendre, établi de manière qu'on puisse tenir compte d'autant de termes complémentaires qu'on le veut.

« L'objet principal de ce Cours, dit l'auteur, est l'étude des mouvements célestes *apparents*, c'est-à-dire tels que nous les voyons; savoir déterminer dans quelle direction se trouve un astre donné et quelles apparences il offre, à un instant donné, et dans un lieu donné, tel est l'énoncé général du problème dont nous poursuivrons la solution. »

Un premier point dans l'étude de ce problème est la définition des divers systèmes de coordonnées et le passage d'un système

à l'autre. Pour éviter les redites, tous les problèmes relatifs aux changements de coordonnées sont réunis là. L'auteur a développé la méthode de Fabritius.

Il traite ensuite, avec détail, de la réfraction astronomique. La réfraction horizontale, qu'on laisse ordinairement de côté, en raison de la difficulté du sujet, est traitée par une méthode qui est propre à l'auteur. La solution des différents problèmes où intervient la réfraction est poussée jusqu'au calcul pratique.

Les problèmes de parallaxe sont des problèmes de changement de coordonnées; ils se trouvent, en principe, résolus dans les Chapitres précédents; l'auteur traite un très grand nombre d'applications. L'aberration est exposée avec un sens très net des difficultés qu'éprouvent les étudiants à en bien comprendre la théorie.

Sous le titre *Notions de Mécanique céleste*, l'auteur expose d'une façon substantielle le problème des deux corps, puis les formules du mouvement elliptique ou parabolique, avec des indications sur les perturbations suffisantes pour faire comprendre, en particulier, ce que sont les éléments osculateurs d'un astre, à un instant donné.

Le problème de la précession est traité dans sa généralité et avec les simplifications qu'il comporte dans quelques cas particuliers. L'auteur explique ensuite, en détail, comment on peut calculer les positions apparentes des astres, comment on peut déterminer le mouvement apparent des satellites vus de la Terre, le mouvement apparent d'une tache sur le Soleil, en faisant abstraction de son mouvement propre.

Il traite enfin des éclipses, des éclipses de Lune d'abord, puis des éclipses de Soleil, auxquelles il s'est particulièrement attaché : il a développé non seulement la théorie, mais la façon d'effectuer les calculs et le procédé graphique qui permet de déterminer les zones de visibilité des diverses phases. Les dernières pages sont consacrées aux occultations des étoiles par la Lune, aux passages de Mercure et de Vénus sur le Soleil. J. T.

BRIEFWECHSEL ZWISCHEN C. G. J. JACOBI UND M. H. JACOBI, herausgegeben von *W. Ahrens* (¹). 1 vol. in-8°, 282 pages, avec les portraits des deux frères. Leipzig, Teubner, 1907.

Le nom de Moritz Jacobi restera attaché à la découverte de la galvanoplastie ; il a d'ailleurs laissé de nombreux travaux, dont la plupart se rapportent à l'électricité, à l'électromagnétisme, à la télégraphie ; on en trouvera la liste dans l'intéressant volume de M. Ahrens. C'est en Russie qu'il a vécu, et sa famille s'y est fixée ; il a été membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg ; il était le frère aîné de Jacques Jacobi, le géomètre. Celui-ci fut le premier célèbre ; les grands mathématiciens ont, presque tous, été précoces. Il y eut cependant un moment où leurs renommées étaient presque égales. « Monsieur, disait-on à Jacques, en 1844, à Turin, nous avons beaucoup profité ici de vos procédés de dorure. » Il paraît qu'en Italie et en Angleterre, Jacques était le frère de Moritz ; en France, au contraire, Moritz n'était que le frère de Jacques ; on peut croire qu'il le restera.

Quoi qu'il en soit, la publication de la correspondance des deux frères sera une bonne fortune pour le lecteur. Elle comprend quarante-huit lettres de Jacques, vingt-huit de Moritz ; elle va de 1822 jusqu'à 1851, ou plutôt jusqu'à 1849, car la dernière lettre du recueil n'est pas adressée au mathématicien, mais à Marie Jacobi, qui venait de perdre son mari. Ces lettres sont charmantes, pleines d'affection, de vie, de tendresse et de bonne humeur ; Jacques écrit à Moritz : « Poggendorf me dit que tu dois être content de lui ; comme ses jugements scientifiques dépendent surtout de Mme Poggendorf, envoie donc à celle-ci un peu de thé russe, et à moi aussi par la même occasion. » Moritz envoie à Mme Poggendorf du thé et, par-dessus le marché, une paire de pantoufles (de Kasan). De quoi parlent les deux frères ? De ce qui les entoure, de leurs amis, des nouvelles universitaires et académiques, de leurs petites infirmités, un peu de leurs femmes et de leurs enfants. Il y a de petits bouts de lettres aux belles-sœurs ; Jacques

(¹) 22e cahier des *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.*

écrit en français, à Annette Jacobi, la femme de Moritz : « ... Je me suis donc posé le principe de flatter tout le monde, ce qui est une douce harmonie à toutes les oreilles. Mais vous me confondez ce principe, charmante sœur ; car, voulant vous flatter, on est tout étonné de n'avoir dit que la vérité. » Cela est galant et sent son XVIIIe siècle. Il n'est pas certain que cette publication importe beaucoup à l'histoire de la Science : on remarquera toutefois l'intérêt que le mathématicien porte aux travaux de son frère, et la façon dont il les discute ; M. Ahrens appuie avec raison sur ce point et sur le ton des lettres, afin de laver Jacobi de l'accusation que l'on a, paraît-il, dirigée contre lui : il aurait été jaloux de l'invention de la galvanoplastie ! Il y a vraiment des gens qui ont plaisir à rapetisser les grands hommes ; ce plaisir-là ne se comprend que chez ceux qui les ont approchés sans pénétrer leur génie. Comme le dit M. Ahrens, cette correspondance a au moins un intérêt psychologique ; je crois bien que le lecteur trouvera que les deux frères ont une bonne « psychologie », et, pour parler français, qu'ils s'aimaient du fond du cœur.

Il y a un moment où le ton, qui habituellement est très enjoué, change brusquement ; c'est en 1848, après les journées révolutionnaires. Moritz écrit coup sur coup des lettres anxieuses. Jacques lui raconte tranquillement les événements, et d'une façon tout objective ; son récit est un véritable document historique. Moritz est bien un peu rassuré, mais pas trop ; il voit les choses en noir ; évidemment, il est beaucoup moins libéral que son frère ; il vit en Russie ; c'est peut-être une question de milieu.

Il envoie de longues, longues lettres politico-philosophiques. « Et que fait-on chez vous, en Sciences ? demande-t-il. Il ne faut pas s'étonner si les recherches scientifiques paraissent insipides auprès de questions si graves. Mais le pis est qu'on ne sait trop si la Science et la Culture sont la substance même, ou seulement l'aristocratique parfum de la civilisation. » Pourtant, chez lui non plus, la gaîté ne perd pas ses droits. « Informe-toi auprès de Poggendorf, dit-il un peu plus loin, si mon étalon de résistance existe encore, ou s'il a servi de projectile pendant la révolution. Sans doute, Dove a jeté son beau baromètre, de la fenêtre, et a tué beaucoup de gens... »

Au cours d'une lecture rapide, j'ai retenu quelques traits ; ils

abondent, et ce n'est pas seulement ceux qui connaissent la gloire au moins d'un des deux frères qui goûteront leurs lettres, pour ce qu'elles contiennent d'esprit et de pensée.

Ce qui est vraiment touchant, c'est le soin apporté à leur publication ; aucune lettre qui ne comporte de nombreuses notes ; il suffit d'en lire quelques-unes pour se rendre compte du travail qu'elles ont coûté à M. Ahrens : celui-ci exprime à la famille de Jacobi la reconnaissance qu'il lui doit, pour la façon libérale dont on lui a permis de feuilleter les archives et les lettres ; le public lui saura gré de la sagacité avec laquelle il a usé de ces documents pour expliquer et compléter la correspondance des deux frères, et des recherches bibliographiques et historiques auxquelles il a dû se livrer pour éclaircir et préciser de nombreux points de détail.

Le volume se termine par quelques additions intéressantes.

C'est d'abord une dédicace de ses *Opuscula mathematica*, adressée au roi par Jacobi. Cette dédicace figure, sans doute, dans les œuvres complètes de Jacobi, mais M. Ahrens a pensé qu'il convenait de la faire connaître à un public plus étendu que celui qui lit ces œuvres, à ceux du *Lapidarstyl* dans lequel elle est rédigée. L'expression est de Moritz, qui, dit-il, pour atténuer un peu son admiration, venait d'être malade et de lire 10000 romans. « C'est incroyable combien il y a de mauvais livres. » Viennent ensuite un intéressant portrait de Jacobi, publié en 1849, par les *Grenzboten*, un extrait de la *Berliner-Revolutions-Chronik*, de A. Wolff, la liste des travaux de Moritz, enfin une lettre de ce dernier à P.-H. Fuss, sur la découverte de la galvanoplastie.

AHRENS (W.). — C. G. J. JACOBI ALS POLITIKER. Ein Beitrag zu seiner Biographie. 45 pages in-8. Leipzig, Teubner, 1907.

Jacobi als Politiker (1) est une très amusante plaquette dont les éléments essentiels sont quelques-unes des lettres de cette correspondance dont on vient de parler, et des articles tirés des journaux de l'époque. En 1848, Jacobi est inscrit au club constitu-

---

(1) Réédition d'un article paru dans la *Bibliotheca mathematica*, t. VII, 1906.

tionnel; il y fait, une heure durant, un discours admirable. Applaudissements prolongés et répétés. Il voudrait que le club appuyât sa candidature à la députation. Une cabale se forme contre lui; on lui inflige les petites tortures que les électeurs se plaisent à exercer sur les candidats; Schellbach monte à la tribune et s'écrie: « Vous ne savez pas à quel homme vous avez affaire, c'est le Spinoza des Mathématiques! » Hurlements; on empêche Schellbach de continuer. On interroge Jacobi sur ses antécédents politiques: « Je n'en ai pas; à Kœnigsberg, j'étais *eine politische virgo* »; on lui reproche la platitude de cette dédicace au roi dont Moritz admirait le *Lapidarstyl;* on lui reproche une autre adresse au roi, envoyée par l'Académie, et signée par lui : « J'ai signé sans lire »; on lui reproche d'avoir baisé la main du roi : « J'ai fait bien pis; dans mon voyage en Italie, j'ai baisé la main du pape. » Il aurait dû dire la *mule;* n'importe, c'est une belle repartie de candidat et qui, aujourd'hui, dans une réunion publique, aurait du succès ailleurs qu'à Berlin. Avis aux mathématiciens français qui iront à Rome, au congrès de 1908 et voudront se présenter à la députation.

J. T.

COOK WILSON (J.). — ON THE TRAVERSING OF GEOMETRICAL FIGURES. 1 vol. in-8°, 153 pages. Oxford, Clarendon Press, 1905.

Appelons *figure* un système de points reliés par des lignes, en sorte que deux points quelconques de la figure soient reliés par une ligne ou par plusieurs lignes. Toutefois, on ne regardera pas comme étant un *point de la figure* un point d'où il ne part que deux lignes, que ces deux lignes soient d'ailleurs, ou non, dans le prolongement l'une de l'autre : on ne gardera comme points de la figure que les points, dits *impairs*, d'où il part un nombre impair de lignes, et les points, dits *pairs,* d'où il part un nombre pair de lignes, au moins égal à quatre. Dans ces conditions, une *ligne de la figure* est une ligne qui joint deux points *adjacents* de la figure : sur son parcours il n'y a pas d'autre *point de la figure* que ses extrémités.

Par exemple, si l'on considère deux ellipses qui se coupent en quatre points et si l'on joint en croix ces points, on formera une

figure comportant quatre points impairs et un point pair; elle comporte seize lignes.

Étant donnée une figure, au sens qu'on a précisé, peut-on la parcourir entièrement, d'un mouvement continu, sans jamais suivre deux fois la même ligne? La réponse est négative pour la figure spéciale qu'on vient de décrire, ainsi que le lecteur s'en convaincra aisément, avec un peu de patience.

C'est à traiter systématiquement de pareils problèmes, soit analytiquement en partant d'une figure donnée, soit au contraire en construisant les figures, qu'est consacré le Livre de M. Cook Wilson, qui rencontre, en passant, de curieux et intéressants résultats.

J. T.

FLEMING (J.-A.). — ELEKTRISCHE WELLEN-TELEGRAPHIE. Autorisierte deutsche Ausgabe von *E. Aschkinass*. 1 vol. in-8°; 185 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

M. Fleming a résumé dans des lectures faites devant la Société des Arts de Londres, en 1903, les méthodes et les résultats de la Télégraphie sans fil. Ses propres recherches, ses relations étroites avec M. Marconi et avec la *Wireless Telegraph Company*, lui assurent, dans la matière, une parfaite compétence. Son Livre est aussi intéressant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique.

J. T.

PETIT-BOIS (G.). — TAFELN UNBESTIMMTER INTEGRALE. 1 vol. in-4°; 151 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

L'auteur a réuni dans ce Volume un très grand nombre d'intégrales indéfinies, de celles qui peuvent, le plus souvent, être obtenues par une voie très élémentaire. Son recueil peut, toutefois, rendre service, d'une part à ceux qui auraient à effectuer de pareilles intégrations et auxquels les Tables de M. Petit-Bois éviteront parfois des calculs fastidieux, d'autre part aux étudiants, qui pourront regarder ces Tables comme un utile Recueil d'exercices.

La parfaite correction de Tables pareilles est très difficile à ob-

tenir dans une première édition; je signale, page 150, la troisième des formules placées sous le titre *Fonctions diverses;* elle est manifestement inexacte. J. T.

MÉLANGES.

UN SYSTÈME PARTICULIER D'ÉQUATIONS INTÉGRALES;

PAR M. E. BOUNITZKY.

Dans son travail, *Entwickelung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener* (*Inaugural Dissertation*, 1905), M. Schmidt donne une formule ([1])

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\varphi_\nu(t)\,dt \tag{1}$$

pour la résolution d'une équation intégrale linéaire inhomogène

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

avec un « noyau » ([2]) symétrique. M. Schmidt déduit la formule

---

([1]) Une formule pour la résolution d'une équation intégrale

$$\varphi(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

dans le cas général, où la fonction $K(s,t)$ n'est pas symétrique, est donnée par M. Fredholm [FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta mathematica,* 1903, p. 27)].

Si λ est un « Eigenwert », la formule (1) doit être convenablement modifiée (SCHMIDT, *loc. cit.*, p. 18).

([2]) Nous écrirons toujours « noyau », « valeur singulière », « fonction singulière » au lieu des termes allemands « Kern », « Eigenwert », « Eigenfunction » introduits par M. Hilbert.

en question en s'appuyant sur le développement connu

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\varphi_\nu(t)\,dt \text{ [1]}$$

[$\varphi_\nu(s)$ sont les « fonctions singulières » du « noyau » $K(s, t)$] qui a lieu pour chaque fonction $g(s)$ qu'on peut présenter sous la forme

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)h(t)\,dt,$$

où $h(t)$ signifie une fonction continue.

Dans le troisième Chapitre du Travail mentionné, M. Schmidt définit dans le cas d'un « noyau » non symétrique deux suites de certaines « fonctions singulières adjointes » [2] $\varphi_\nu(s)$ et $\psi_\nu(s)$ qui correspondent à une suite des « valeurs singulières » λ_ν et qui satisfont aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \displaystyle\int_a^b K(s, t)\psi_\nu(t)\,dt, \\ \psi_\nu(s) = \lambda_\nu \displaystyle\int_a^b K(t, s)\varphi_\nu(t)\,dt, \end{cases}$$

$$\int_a^b [\varphi_\nu(s)]^2\,ds = 1, \qquad \int_a^b \varphi_\nu(s)\varphi_k(s)\,ds = 0 \qquad (\nu \neq k),$$

$$\int_a^b [\psi_\nu(s)]^2\,ds = 1, \qquad \int_a^b \psi_\nu(s)\psi_k(s)\,ds = 0 \qquad (\nu \neq k).$$

En introduisant ces « fonctions singulières adjointes », M. Schmidt démontre les théorèmes suivants :

1° Si

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)h(t)\,dt$$

(1) Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (erste Mitteilung), p. 72-78. La démonstration de cette formule par M. Hilbert imposait quelques restrictions écartées par M. Schmidt.

(2) Schmidt, *loc. cit.* (*Adjungierte Eigenfunctionen*, § 12, 13).

[$h(t)$ signifiant toujours une fonction continue], on a

$$(3)\quad \begin{cases} g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\varphi_\nu(t)\,dt = \sum \dfrac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b h(t)\psi_\nu(t)\,dt \\ \quad = \sum_\nu \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\psi_\nu(t)\,dt \int_a^b h(t)\psi_\nu(t)\,dt, \end{cases}$$

et d'une manière analogue :

2° Si

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(t, s)h(t)\,dt,$$

on a

$$(4)\quad \begin{cases} g(s) = \sum_\nu \psi_\nu(s) \int_a^b g(t)\psi_\nu(t)\,dt = \sum_\nu \dfrac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b h(t)\varphi_\nu(t)\,dt \\ \quad = \sum_\nu \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b h(t)\varphi_\nu(t)\,dt. \end{cases}$$

Nous nous proposons maintenant de montrer qu'en s'appuyant sur les propriétés mentionnées des « fonctions singulières adjointes » on peut résoudre un système des équations intégrales linéaires inhomogènes d'une forme spéciale

$$(5)\quad \begin{cases} f(s) = \varphi(s) - \lambda \displaystyle\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\psi(t)\,dt, \\ f_1(s) = \psi(s) - \lambda_1 \displaystyle\int_a^b \mathrm{K}(t, s)\varphi(t)\,dt \text{ (}^1\text{)}, \end{cases}$$

où le « noyau » $\mathrm{K}(s, t)$ est en général non symétrique; $f(s)$, $f_1(s)$, $\mathrm{K}(s, t)$ sont des fonctions continues données; $\varphi(s)$, $\psi(s)$, des fonctions continues cherchées; λ, λ_1, des nombres réels donnés différents de zéro. Les formules qu'on trouvera en résolvant le système (5) seront tout à fait analogues à la formule (1).

En posant

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi(s) = f(s) + g(s), \\ \psi(s) = f_1(s) + g_1(s), \end{cases}$$

(¹) L'idée même de résoudre des systèmes pareils n'est pas nouvelle; *cf.* HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (dritte Mitteilung), p. 323-324.

on trouve de (5)

$$(7)\qquad g(s)=\lambda\int_a^b \mathrm{K}(s,t)[f_1(t)+g_1(t)]\,dt,$$

$$(8)\qquad g_1(s)=\lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(t,s)[f(t)+g(t)]\,dt.$$

En appliquant aux fonctions $g(s)$ et $g_1(s)$ les développements en séries (3) et (4), on aura

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} g(s)&=\sum_\nu \varphi_\nu(s)\int_a^b g(t)\varphi_\nu(t)\,dt,\\ g_1(s)&=\sum_\nu \psi_\nu(s)\int_a^b g_1(t)\psi_\nu(t)\,dt.\end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie les équations (7) et (8) respectivement par $\varphi_\nu(s)\,ds$ et $\psi_\nu(s)\,ds$ et si l'on intègre dans les limites a et b, on obtient en s'appuyant sur les formules (2)

$$\begin{aligned}\int_a^b g(s)\varphi_\nu(s)\,ds&=\lambda\int_a^b\left\{[f_1(t)+g_1(t)]\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\varphi_\nu(s)\,ds\right\}dt\\ &=\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\int_a^b f_1(t)\psi_\nu(t)\,dt+\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\int_a^b g_1(t)\psi_\nu(t)\,dt,\\ \int_a^b g_1(s)\psi_\nu(s)\,ds&=\lambda_1\int_a^b\left\{[f(t)+g(t)]\int_a^b \mathrm{K}(t,s)\psi_\nu(s)\right\}dt\\ &=\frac{\lambda_1}{\lambda_\nu}\int_a^b f(t)\varphi_\nu(t)\,dt+\frac{\lambda_1}{\lambda_\nu}\int_a^b g(t)\varphi_\nu(t)\,dt,\end{aligned}$$

d'où en introduisant les désignations

$$\int_a^b g(t)\varphi_\nu(t)\,dt=c_\nu,\qquad \int_a^b g_1(t)\psi_\nu(t)\,dt=c'_\nu,$$

$$\int_a^b f(t)\varphi_\nu(t)\,dt=\alpha_\nu,\qquad \int_a^b f_1(t)\psi_\nu(t)\,dt=\alpha'_\nu$$

on obtient les équations suivantes :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_\nu c_\nu-\lambda\, c'_\nu&=\lambda\,\alpha'_\nu,\\ -\lambda_1 c_\nu+\lambda_\nu c'_\nu&=\lambda_1\alpha_\nu.\end{aligned}\right.$$

Pour les « valeurs singulières » qui ne satisfont pas à la condi-

tion $\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1 = 0$, c'est-à-dire à l'une des équations

$$\lambda_\nu = \pm\sqrt{\lambda\lambda_1}, \tag{11}$$

le système (10) donne

$$\left\{\begin{aligned} &\int_a^b g\,(t)\varphi_\nu(t)\,dt = c_\nu = \frac{\lambda\lambda_\nu}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1}\,\alpha'_\nu + \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1}\,\alpha_\nu,\\ &\int_a^b g_1(t)\psi_\nu(t)\,dt = c'_\nu = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1}\,\alpha'_\nu + \frac{\lambda_1\lambda_\nu}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1}\,\alpha_\nu. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Supposons au contraire que λ_ν satisfait à l'une des conditions (11), ce qui n'est possible que pour un nombre fini k de valeurs de ν [1]. Désignons ces valeurs spéciales de ν par $n + i\,(i = 1, 2, \ldots, k)$, ce qu'on peut toujours faire en supposant les indices ν convenablement ordonnés. En additionnant pour $\nu = n + i$ les équations (10) respectivement avec les facteurs λ_1 et λ_{n+i} et divisant par λ_1, on aura k équations de condition

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda\alpha'_{n+i} + \lambda_{n+i}\alpha_{n+i} = \lambda\int_a^b f_1(t)\psi_{n+i}(t)\,dt + \lambda_{n+i}\int_a^b f(t)\varphi_{n+i}(t)\,dt\\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned}\right. \tag{13}$$

qui doivent être satisfaites par les fonctions $f(t)$ et $f_1(t)$. De plus, de la seconde des équations (10) on a dans ce cas

$$c'_{n+i} = \frac{\lambda_1(c_{n+i} + \alpha_{n+i})}{\lambda_{n+i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{14}$$

Si aucune des « valeurs singulières » du « noyau » $K(s, t)$ n'est égale à l'une des quantités $\pm\sqrt{\lambda\lambda_1}$, on obtient au moyen des formules (6), (9), (12) les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(s) = f\,(s) + \lambda\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1}(\lambda_\nu\alpha'_\nu + \lambda_1\alpha_\nu),\\ &\psi(s) = f_1(s) + \lambda_1\sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1}(\lambda_\nu\alpha_\nu + \lambda\,\alpha'_\nu). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Dans le cas où k « valeurs singulières » satisfont à l'une des

---

[1] SCHMIDT, *loc. cit.*, § 5.

équations (11), on aura de (6), (9), (12), (14),

$$(16)\quad \begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{\nu'} \dfrac{\varphi_{\nu'}(s)}{\lambda_{\nu'}^2 - \lambda\lambda_1}(\lambda_{\nu'}\alpha'_{\nu'} + \lambda_1\alpha_{\nu'}) + \sum_{i}^{1,k}(c_{n+i}\varphi_{n+i}(s), \\ \psi(s) = f_1(s) + \lambda_1 \sum_{\nu'} \dfrac{\psi_{\nu'}(s)}{\lambda_{\nu'}^2 - \lambda\lambda_1}(\lambda_{\nu'}\alpha_{\nu'} + \lambda\ \alpha'_{\nu'}) + \lambda_1 \sum_{i}^{1,k} \dfrac{(c_{n+i} + \alpha_{n+i})}{\lambda_{n+i}}\psi_{n+i}(s) \end{cases}$$

où l'indice ν' doit parcourir toutes les valeurs correspondantes au système complet des « valeurs singulières » à l'exception de $n+1$, $n+2$, ..., $n+k$. Dans ce cas, la résolution du système (5) ne peut être possible que si k équations de condition (13) sont satisfaites.

Les séries

$$\sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\alpha'_\nu = \sum_{\nu} \int_a^b K(s,t)\psi_\nu(t)\,dt \int_a^b f_1(t)\psi_\nu(t)\,dt$$

et

$$\sum_{\nu} \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\alpha_\nu = \sum_{\nu} \int_a^b K(t,s)\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b f(t)\varphi_\nu(t)\,dt$$

convergent absolument et uniformément par rapport à s [1].

En désignant les intégrales

$$\int_a^b K(s,r)K(t,r)\,dr \qquad \text{et} \qquad \int_a^b K(r,s)K(r,t)\,dr$$

respectivement par

$$\overline{K}(s,t) \qquad \text{et} \qquad \underline{K}(s,t),$$

on voit que les séries

$$\sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2}\alpha_\nu = \sum_{\nu} \int_a^b \overline{K}(s,t)\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b f(t)\varphi_\nu(t)\,dt$$

et

$$\sum_{\nu} \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2}\alpha'_\nu = \sum_{\nu} \int_a^b \underline{K}(s,t)\psi_\nu(t)\,dt \int_a^b f_1(t)\psi_\nu(t)\,dt$$

convergent aussi absolument et uniformément en s [2].

---

(1) SCHMIDT, *loc. cit.*, § 2, 12, 13.

(2) *Ibid.*

En remarquant que la quantité $|\lambda_\nu|$ tend vers l'infini, si ν croît indéfiniment ([1]), on trouve par conséquence que les séries

$$\begin{aligned}
&\lambda \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1} \lambda_\nu \alpha'_\nu + \lambda\lambda_1 \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1} \alpha_\nu \\
&\quad = \lambda \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \alpha'_\nu \frac{1}{1 - \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_\nu^2}} + \lambda\lambda_1 \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2} \alpha_\nu \frac{1}{1 - \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_\nu^2}} \\
&\quad = \lambda \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1} (\lambda_\nu \alpha'_\nu + \lambda_1 \alpha_\nu)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1} \lambda_\nu \alpha_\nu + \lambda\lambda_1 \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1} \alpha'_\nu \\
&\quad = \lambda_1 \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \alpha_\nu \frac{1}{1 - \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_\nu^2}} + \lambda\lambda_1 \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2} \alpha'_\nu \frac{1}{1 - \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_\nu^2}} \\
&\quad = \lambda_1 \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1} (\lambda_\nu \alpha_\nu + \lambda \alpha'_\nu)
\end{aligned}$$

(où les termes pour lesquels on a éventuellement $\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1 = 0$ doivent être omis) convergent absolument et uniformément. Les seconds membres des équations (15) et (16) convergent donc aussi absolument et uniformément en s.

En substituant les expressions de $\varphi(s)$ et de $\psi(s)$ données par les formules (15) dans le système (5) et en s'appuyant sur les formules (2) et sur les équations

$$\int_a^b \mathrm{K}(s,t) f_1(t)\, dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b f_1(t)\psi_\nu(t)\, dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \alpha'_\nu$$

et

$$\int_a^b \mathrm{K}(t,s) f(t)\, dt = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b f(t)\varphi_\nu(t)\, dt = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \alpha_\nu$$

tirées de (3) et (4), on voit que ces expressions satisfont identiquement au système (5) dans le cas où $\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1$ ne s'annule pour aucune valeur de l'indice ν.

On verra de même que, si $\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1$ s'annule pour k valeurs $\nu = n + i\,(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ de l'indice ν, les seconds membres

([1]) Schmidt, *loc. cit.*, § 5, 12.

des équations (16) satisfont identiquement au système (5), si les conditions (13) sont remplies, c_{n+i} étant des constantes arbitraires.

On a donc le résultat suivant : *si l'équation* (11) *n'est satisfaite par aucune valeur de* ν, *les formules* (15) *donnent une solution complète du système* (5); *si au contraire l'expression* $\lambda_\nu^2 - \lambda\lambda_1$ *peut s'annuler* (*ce qui n'est possible que pour un nombre fini* k *de valeurs de l'indice* ν), *on ne peut résoudre le système* (5) *que si les conditions* (13) *sont remplies et, si ces conditions sont remplies, la solution complète du système* (5) *est donnée par les formules* (16), *où* c_{n+i} *sont des constantes arbitraires.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

COHEN (A.). — *Differential Equations.* In-8°. London, Harap. 5 sh.

GAUSS (Carl-Friedr.). — *Werke.* Herausgsgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 7. Bd. In-8°, 650 p. Leipzig, Teubner. Cart., 30 m.

HESSE (Otto). — *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes u. des Kreises in der Ebene.* 4e édition, par S. GUNDELFINGER. Gr. in-8°, VIII-251 p. Leipzig, Teubner. Relié, 6 m.

MEYER (M.-Wilh.). — *Das Rätsel der Erdpole.* 4e édition. In-8°, 90 p. avec fig. Stuttgart, Franckh. 1 m.; relié 2 m.

MOOSER (Johs.). — *Theoretische Kosmogonie des Sonnensystems.* In-8°, 84 p. St. Gallen, Fehr. 4 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

YOUNG (W.-H.) et CHISHOLM YOUNG (GRACE). — THE THEORY OF SETS OF POINTS. XII-316 pages. Cambridge, University press, 1906.

Il existe maintenant de nombreux ouvrages dans lesquels, en vue d'applications à d'autres parties des Mathématiques, on a démontré quelques théorèmes de la *Théorie des ensembles de points*. M. et Mme Young ont pensé que l'intérêt de cette Théorie n'était plus à prouver et qu'il convenait de l'exposer, sans préoccupation d'applications immédiates, comme une partie intéressante en soi de la Géométrie, de l'*Analysis situs*. Aussi, dans les 300 pages de leur ouvrage, comme échappée sur les autres parties des Mathématiques, je n'ai trouvé que la démonstration de l'existence des nombres transcendants d'après Liouville et d'après M. Cantor; encore M. et Mme Young n'ont-ils fait là que suivre l'exemple donné par M. Borel dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*. On ne saurait reprocher aux auteurs d'avoir manifestement subi, à différentes reprises, l'influence d'un aussi bon modèle.

Une autre particularité du livre de M. et Mme Young c'est le grand nombre de figures qu'il contient. Presque tous ceux qui cherchent une démonstration s'aident d'un schéma souvent incomplet, parfois incorrect, mais toujours utile. Tandis que les Français jugent volontiers ces schémas incompréhensibles pour tout autre que leur auteur, les Anglais et les Américains les publient souvent parce qu'ils pensent, et je crois qu'ils ont raison, que ce qui servit à échafauder un raisonnement peut servir à le comprendre. En tous cas, grâce en particulier à l'emploi de ces figures, le livre de M. et Mme Young paraît aussi clair et simple qu'on peut le souhaiter.

Voici les titres des paragraphes du premier Chapitre : Suites et séries convergentes. Nombres irrationnels. Grandeur et égalité.

Le nombre ∞. Limite. Nombres algébriques et nombres transcendants, et enfin le théorème de Liouville dont j'ai déjà parlé. Comme ce Chapitre n'a que 8 pages, on ne s'étonnera pas qu'il manque quelques intermédiaires entre la définition des nombres irrationnels et la démonstration du théorème de Liouville; les auteurs ont d'ailleurs prévenu qu'il s'agissait d'un court résumé, qu'ils jugent suffisant pour leur but, d'une théorie déjà supposée quelque peu connue du lecteur.

Le Chapitre II est relatif à la correspondance entre nombres et points d'une droite. Cette correspondance est établie à l'aide d'un rapport anharmonique; ce procédé a, comme on sait, bien des avantages, je n'en ai pas compris l'intérêt ici; il n'est d'ailleurs plus utilisé dans la suite.

Le Chapitre III traite des ensembles dérivés, le Chapitre IV de la puissance des ensembles de points sur une droite; ils sont complétés par le Chapitre XI sur la puissance des ensembles plans et par les Chapitres VI et VII sur les ensembles bien ordonnés et les nombres transfinis.

Le Chapitre V est relatif à la mesure des ensembles linéaires, il est complété par le Chapitre XII : mesure des ensembles plans, aire.

Les Chapitres VIII à XII, relatifs aux ensembles plans jusqu'ici assez peu étudiés chez nous, seront les plus intéressants pour les lecteurs français. Dans le chapitre VIII on trouve les correspondances entre points d'une droite et d'un plan établies par MM. Cantor, Peano, Hilbert; ces indications sont complétées en fin du Chapitre IX par la preuve de l'impossibilité d'une correspondance (1,1) continue entre points d'une droite et d'un plan.

Le Chapitre IX est relatif aux régions. La définition adoptée peut se résumer ainsi : Soit une famille de triangles d'un seul tenant, tout point intérieur à un triangle, et tout point limite de tels points, appartient à la région fermée définie par ces triangles. Région qui est dite simplement connexe si l'ensemble des points n'appartenant pas à la région est d'un seul tenant. En somme, c'est donc la définition qui résulte des travaux de M. Schœnfliess que les auteurs ont adoptée. Partant de là ils montrent qu'une région fermée simplement connexe peut être considérée comme la limite de la surface d'un polygone.

Le Chapitre suivant traite des courbes; deux définitions y sont envisagées. On sait qu'on appelle courbe tantôt la trajectoire d'un point mobile, tantôt la limite d'une surface dont une dimension tend vers zéro, tantôt la frontière d'un domaine à deux dimensions. Je regrette qu'ayant si bien préparé le lecteur à l'étude des rapports entre les définitions qui résultent de ces trois points de vue, définitions qui ne sont d'ailleurs pas les seules qui aient été proposées, M. et Mme Young aient cru devoir se limiter autant sur ce point. Ils démontrent cependant le théorème fondamental, dû à M. Jordan, sur les courbes fermées sans point multiple.

Enfin le Chapitre XIII est consacré à la longueur des courbes et à la mesure linéaire des ensembles. Pour la longueur, les auteurs adoptent la définition classique, due à Scheeffer et M. Jordan, qui n'est que la traduction d'un procédé de mesure physique d'une courbe matérielle. Un autre procédé physique consiste dans la pesée de la courbe, d'où des définitions telles que la suivante : De chaque point de la courbe pour centre traçons une sphère (ou une circonférence s'il s'agit d'une courbe plane) de rayon r et soit $V(r)$ le volume [ou $S(r)$ l'aire] du domaine couvert par ces sphères (ou circonférences); la limite du rapport $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ $\left(\text{ou } \frac{S(r)}{2r}\right)$, ou l'une des limites de ce rapport, sera par définition la longueur de la courbe.

Ce genre de définition, déjà proposé en 1854 par Borchardt (*Journal de Borchardt*) et repris depuis par M. Minkowski (*Jahr. d. Deuts. math. Ver.*, 1901), a l'avantage de s'étendre à l'aire d'une surface et aussi de permettre d'attacher à des ensembles quelconques des nombres analogues aux longueurs et aires. C'est l'un de ces nombres que M. et Mme Young appellent la mesure linéaire d'un ensemble plan.

Je regrette que les auteurs n'aient pas cité la définition de Borchardt-Minkowski qui montre l'intérêt des recherches de M. Young, exposées à la fin du Livre, sur la comparaison entre la longueur, au sens de M. Jordan, et la mesure linéaire d'une courbe.

Puisqu'il s'agit d'une théorie en formation, la bibliographie ne pouvait être négligée; celle que les auteurs ont mise à la fin de leur Ouvrage ne contient pas moins de 300 références. Elle n'est cependant pas complète; j'y ai remarqué les omissions des Mémoires de Liouville (*Journal de Liouville*, 1851), de Borchardt

et Minkowski déjà cités, de M. Jordan (*Journal de Liouville*, 1892); mais de telles omissions sont inévitables. Je reprocherai plutôt aux auteurs d'avoir cité des travaux, certaines de mes Notes par exemple, qui ne me paraissent avoir aucun rapport avec le sujet du Livre. Je crains que cette bibliographie trop copieuse aille contre son but, qu'au lieu d'aider à l'étude des ensembles elle effraie le lecteur et le dissuade de s'occuper de ces questions.

Certes, cela ne serait pas à craindre, s'il était dit quels sont les travaux fondamentaux, si, par exemple, celui qui voudrait étudier le problème des régions était prévenu qu'il doit lire avant tout les travaux de M. Schœnfliess, mais il n'en est rien. Les citations faites au cours de l'Ouvrage sont relatives le plus souvent à un mince détail et il arrive fort bien que le travail fondamental ne soit pas cité.

Ce qui m'a paru le plus caractéristique c'est le Chapitre sur la mesure. On trouve là un petit historique contenant les noms de Riemann, Smith, Hankel, Cantor et ceux-là seuls. On sera sans doute étonné de ne pas voir citer M. Jordan, mais le plus étonnant c'est que l'historique n'est relatif qu'aux définitions qui ne sont pas adoptées et que le lecteur peut ignorer à qui est due la théorie actuelle, car M. Borel n'est jamais cité dans les 45 pages de ce Chapitre. Sans doute, M. Borel n'a pas parachevé la théorie, mais il en a donné les fondements; il m'a été facile, quand j'en ai eu besoin, de compléter et de mettre au point la théorie ébauchée par M. Borel.

Voici une autre omission de citation qui m'a frappé. Les auteurs ne donnent pas, je l'ai dit, la référence relative au Mémoire de Liouville; je crois bien qu'ils ne s'y sont pas reportés. S'ils l'avaient fait, ils auraient vu qu'il y a quelque différence entre le raisonnement de Liouville et celui qu'ils ont emprunté à M. Borel et ils auraient prévenu le lecteur de cet emprunt. Puissent ces légères critiques rendre M. Young moins sévère qu'il ne l'est au cours de l'Appendice et de la Bibliographie.

Voici l'une des remarques de M. Young; on sera surpris d'y voir adresser aux Français le reproche d'ignorer les travaux anglais; M. Young ne semble-t-il pas mériter un reproche analogue? « The same paper (¹) contains the generalised form of the Heine-

(¹) *Overlapping Intervals* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, t. XXXV, 1902, p. 384-388).

Borel Theorem which is now generally used, and which Vitali, following Borel, refers to as due to Borel and Lebesgue. Lebesgue's ideas and my own have run on curiously parallel lines, and quite independently; as is well-known, the French are rarely well acquainted with English work. »

En ce qui me concerne, je déclarerai modestement qu'il serait injuste de conclure de mon ignorance à celle des Français et aussi que je n'ai jamais réclamé ce théorème que je donnais, en 1904, comme étant dû, quant au fond, à M. Borel ; M. Schœnfliess l'avait d'ailleurs énoncé en 1900 sous la forme en question. Je le réclamais si peu que j'indiquais qu'on en avait fait des applications à la théorie des fonctions.

Ceci dit, je voudrais saisir cette occasion pour faire quelques remarques concernant la proposition que les auteurs, à l'exemple de MM. Schœnfliess, Veblen, etc., appellent théorème de Heine-Borel. Voici son énoncé : *Si tout point d'un intervalle* (a, b), *extrémités y comprises, est intérieur à l'un au moins des intervalles d'une certaine famille* F, *on peut, avec un nombre fini de ces intervalles, former une famille* F_1 *jouissant de la même propriété.*

Ce théorème admet bien des généralisations, d'ailleurs faciles à tout point de vue, que je laisse de côté.

M. Borel a donné ce théorème dans sa Thèse (*Annales de l'École normale supérieure*, 1895) en supposant F dénombrable. Son raisonnement utilise les nombres transfinis, utilisation qui n'est pas indispensable. En s'en débarrassant on a la démonstration applicable au cas général que j'ai donnée dans mes *Leçons sur l'Intégration* (¹).

Je note que la démonstration de M. Borel a cependant un avantage, partagé en partie par celle qu'on en déduit comme j'ai dit, elle fournit un procédé régulier pour former la famille F_1, qui est seulement logiquement définie par les autres démonstrations qu'on a données.

(¹) Cette démonstration avait été obtenue en 1898 par M. Vieillefond ou par moi-même, je ne sais plus, alors que nous étudiions ensemble la thèse de M. Borel. Je dois avouer d'ailleurs que, bien que j'aie plusieurs fois cité l'énoncé de M. Borel, mon attention n'avait pas été retenue par le mot *dénombrable* qu'il contient et c'est pourquoi, dans ma Thèse, dont les résultats ont été publiés en 1901, j'ai employé, sans l'énoncer, le théorème modifié.

En se bornant au cas où F est dénombrable, le théorème donne le fondement solide sur lequel on a construit la théorie de la mesure. Du cas général, on peut faire aussi d'importantes applications : Supposons qu'une propriété soit vraie dans un petit intervalle autour de chaque point de (a, b) et qu'elle soit vraie de la somme de deux intervalles dès qu'elle est vraie de chacun d'eux; alors elle est vraie dans (a, b) d'après ce qui précède.

Ainsi le théorème énoncé fait connaître le fait géométrique d'où résulte l'*uniformité* d'un certain nombre de propriétés, de la continuité d'une fonction par exemple. Il n'est donc pas étonnant qu'au cours de raisonnements faits en vue de prouver de telles uniformités on trouve incidemment démontré le théorème de M. Borel; on peut citer des raisonnements de Heine (*Journ. de Crelle*, 1872), de M. Goursat (*Trans. of the Am. Math. Soc.*, t. I), de M. Baire (*Ann. di Mat.*, 1900). Il est d'ailleurs fort possible qu'en cherchant un peu, en feuilletant, par exemple, les Œuvres de Cauchy, de Seidel, de Stokes, on trouve à citer des raisonnements antérieurs à celui de Heine.

Dans son rapport sur la théorie des ensembles (*Jahr. der Deuts. Math. Ver.*, 1900), M. Schœnfliess a rapproché les raisonnements de Heine et de M. Borel ([1]); de là date la dénomination de théorème de Heine-Borel qui me paraît injuste. Le théorème en question n'est pas en effet de ceux dont la démonstration présente de grosses difficultés; il y avait mérite à l'apercevoir, à l'énoncer, à deviner son intérêt, non à le démontrer; or, je doute fort que Heine ait vu le théorème (ce que d'ailleurs M. Schœnfliess n'a jamais semblé prétendre).

Dans le raisonnement de Heine, la démonstration du théorème de M. Borel et son application à la démonstration de la continuité sont amalgamées. Heine a-t-il, dans sa pensée, séparé ces deux parties, ce que nul n'a fait effectivement avant M. Schœnfliess et ce qui supposerait une vision claire de l'existence d'un théorème de Géométrie à la base de la continuité uniforme? Est-il certain qu'après son raisonnement Heine n'eût pas été embarrassé pour répondre à l'une de ces questions qu'on tranche de suite grâce au théorème de M. Borel? C'est seulement si l'on croit pouvoir

([1]) *Voir* aussi *Comptes rendus*, 7 janvier 1907.

répondre affirmativement à ces questions que la dénomination Heine-Borel est justifiée.

En tous cas je note que ni Heine, ni personne avant M. Borel, n'a invoqué le théorème en question, que depuis quelques années on voit se multiplier les démonstrations nouvelles du théorème et les réclamations de priorité concernant ses moindres généralisations et qu'aucune émulation analogue n'avait été suscitée par le travail de Heine. H. Lebesgue.

JOUFFRET (E.). — Mélanges de Géométrie a quatre dimensions. 1 vol. in-8°; XI-227 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Ces *Mélanges* constituent un intéressant complément au *Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions* du même auteur. Les exemples développés par M. Jouffret mettent bien en évidence l'une des raisons qui justifient l'emploi du langage géométrique dans l'étude des multiplicités à n variables, à savoir : la simplification et la clarté que ce langage apporte dans l'étude de certaines questions qui appartiennent à la Géométrie ordinaire, simplification que peut faire prévoir la commodité qu'apporte la considération des figures dans l'espace pour la démonstration des propriétés des figures planes, regardées comme la projection des figures dans l'espace.

Les nombreuses épures qu'on trouve dans le Livre de M. Jouffret, et qui sont dessinées avec un grand soin, éclairent et précisent le texte d'une façon très heureuse.

Après avoir rappelé les définitions fondamentales, l'auteur étudie le système de coordonnées de la Géométrie à quatre dimensions, composé de quatre droites, six plans et quatre espaces (à trois dimensions), un quelconque des quatorze éléments étant perpendiculaire à un quelconque des autres, s'il ne le contient pas ou n'y est pas contenu. L'analyse des relations de position de ces éléments fournit la théorie des trois polyédroïdes réguliers, que l'auteur présente ainsi d'une façon simple.

Les trois Chapitres qui suivent se rapportent à la théorie de

l'hexagone de Pascal, ou, si l'on veut, à la théorie de la figure plane formée par les quinze droites qui joignent deux à deux six points d'une conique ; ils sont fort instructifs. L'auteur développe d'abord cette théorie dans le plan et résume, en particulier, l'ensemble des résultats obtenus par M. Veronese. Il la montre ensuite en quelque sorte dans l'espace : c'est alors la figure formée dans l'espace par quinze droites situées trois par trois dans quinze plans : la figure plane n'est autre chose que la perspective sur un plan de la figure dans l'espace. Cette étude donne occasion à l'auteur de donner un intéressant résumé des propriétés essentielles des surfaces du troisième degré. Enfin, la figure de l'espace n'est elle-même, ainsi que l'a montré M. Richmond, que la section faite par un espace à trois dimensions dans la figure formée, dans un espace à quatre dimensions, par six espaces à trois dimensions. Et c'est de ce point de vue que toute cette théorie s'éclaire le mieux.

M. Jouffret traite ensuite de la classification des hypersurfaces du second degré dans l'espace à quatre dimensions, puis de l'intersection de deux telles surfaces. Il montre comment l'étude de cette intersection, qui se projette dans notre espace suivant une surface du quatrième degré à conique double, éclaire la théorie très riche des surfaces de cette nature.

Pour se mouvoir avec aisance dans la Géométrie à quatre dimensions, il faut avoir une imagination mathématique assez vigoureuse qui, sans doute, se développe par l'habitude.

La *fantaisie,* qui se confondait jadis avec l'imagination, n'est pas interdite aux mathématiciens, et M. Jouffret, dans le dernier Chapitre de son Livre, montre qu'il n'en est pas dépourvu ; cette fantaisie semble même quelque peu ironique lorsque l'auteur, parmi les raisons qu'il donne pour l'existence réelle d'espaces à quatre, cinq, ... dimensions, s'amuse à en rapporter quelques-unes, qui sont à l'usage des spirites. Inutile de dire que M. Jouffret ne les prend pas à son compte. J. T.

BERTINI (E.). — Introduzione alla Geometria projettiva degli iperspazi con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità. 1 vol. in-8°; vi-426 pages. Pise, E. Spoerri, 1907.

Grouper les Chapitres d'Algèbre ou d'Analyse où se prolongent et se généralisent les problèmes de la Géométrie à trois dimensions, et où l'on emploie le langage géométrique, c'est faire de la Géométrie à n dimensions. Qu'un pareil groupement soit naturel, et que le langage géométrique soit précieux, c'est ce qu'on ne saurait contester : il ne faut pas oublier non plus que, bien souvent, le général éclaire le particulier.

C'est à ce point de vue, purement analytique, que s'est placé M. Bertini en écrivant ce Livre, qu'il qualifie modestement d'introduction à la Géométrie projective de l'hyperespace. Un point c'est, pour lui, le système de $n+1$ nombres, réels ou complexes, etc. Sept Chapitres sont consacrés aux formes linéaires, bilinéaires et quadratiques ou, si l'on veut, à la théorie de la projectivité, de l'homographie ou de la corrélation, des quadriques et des faisceaux de quadriques. L'auteur s'occupe ensuite des hypersurfaces et des variétés algébriques en général, des systèmes linéaires d'hypersurfaces, des courbes rationnelles, des surfaces réglées rationnelles, enfin de cette belle surface de l'espace à cinq dimensions, à laquelle est attaché le nom de M. Veronese, qui contient ∞^2 coniques, et dont la projection dans l'espace à trois dimensions conduit à la surface romaine de Steiner.

Le Livre de M. Bertini, qui résume sous une forme didactique les résultats essentiels d'un très grand nombre de Mémoires, rendra les meilleurs services aux étudiants qui veulent se familiariser avec les méthodes et le langage de la Géométrie à n dimensions. Si je ne me trompe, il n'y a pas sur ce sujet d'autre Traité général que la *Mehrdimensionale Geometrie* de M. Schoute, qui est conçue d'une façon très différente, puisque l'auteur y part de postulats et de concepts synthétiques, et qu'il s'attache surtout à la Géométrie métrique. Les deux Ouvrages se compléteront mutuellement.

Par ses nombreux travaux sur la matière, M. Bertini était dési-

gné pour écrire cette Introduction. Les recherches de M. Segre y tiennent naturellement une très grande place. M. Segre s'est intéressé à l'œuvre de son confrère jusqu'à lui communiquer les notes manuscrites rédigées en vue de son propre enseignement.

Si les sujets que M. Bertini a traités dans l'Appendice, l'étude des branches d'une courbe algébrique, la décomposition des singularités des courbes planes, etc. ne rentrent pas immédiatement dans son cadre primitif, l'importance de ces sujets en justifie pleinement l'introduction. Au reste, le souci d'apporter aux étudiants une aide qui les soutienne dans leurs lectures et leurs recherches ultérieures s'aperçoit fréquemment dans le Livre de M. Bertini.

J. T.

RIOLLOT (J.). — LES CARRÉS MAGIQUES. CONTRIBUTION A LEUR ÉTUDE. 1 vol. in-8°; 118 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

On trouvera dans ce Volume bon nombre de renseignements sur les propriétés et la construction des carrés magiques, diaboliques, semi-diaboliques, etc. La façon dont ces curieuses figures se transforment, se déduisent les unes des autres, n'est pas sans intérêt; le plaisir évident que M. Riollot a pris à composer ce petit Livre se communiquera sans doute à ses lecteurs. J. T.

W.-F. OSGOOD. — LEHRBUCH DER FUNKTIONEN THEORIE in 2 Bänden, erster Band, 2te Hälfte. 1 vol. in-8° de 335 pages, chez Teubner, Leipzig et Berlin.

Le premier fascicule, déjà analysé dans ce *Bulletin*, s'arrêtait après l'intégrale de Cauchy et les développements en série qui s'en déduisent. Le second fascicule contient les surfaces de Riemann, le prolongement analytique d'après Weierstrass, les produits de facteurs primaires et les séries de Mittag-Leffler, les fonctions harmoniques de deux variables.

L'étude du prolongement analytique a reçu des développements nouveaux qui montrent la nécessité des analyses délicates du début. Dans les questions plus compliquées de cette partie de la théorie, l'auteur fait à chaque instant intervenir des éléments géométriques; il s'efforce ensuite d'*arithmétiser*, le plus possible, la conception de ces éléments. On remarquera un emploi continuel et très heureux de la représentation conforme et on lira, je pense, avec beaucoup d'intérêt, le Chapitre sur les fonctions harmoniques rédigé de façon à mettre en évidence que les propriétés de ce fonctions peuvent servir de base, dans le sens indiqué par Riemann, à la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Je reviens maintenant à l'analyse par Chapitre.

Chapitre VIII : *Fonctions multiformes et surfaces de Riemann* (p. 307-368). — Des exemples bien choisis donnent une idée de la construction d'une surface de Riemann. Pour ces explications, l'auteur dit dans la Préface qu'il a pris modèle sur les leçons de Klein de l'année 1881-1882 et qu'il a été amené à préciser la représentation d'une aire finie (im Grossen) en s'appuyant sur un théorème de Darboux.

Voici comment sont énoncées les conditions d'une représentation conforme, en spécifiant ce qui se rapporte aux contours des aires considérées :

Soient S une aire limitée par une courbe simple, $w = f(z)$ une fonction uniforme et continue dans l'aire S et sur son contour, analytique à l'intérieur de S; on suppose que la fonction $f(z)$ ne peut jamais prendre la même valeur en deux points différents du contour de S, de sorte que ce contour est représenté sur le plan w, d'une façon univoque et continue, par une courbe simple limitant une aire Σ. Dans ces conditions, l'équation

$$w = f(z)$$

définit une représentation de chacune des aires S et Σ sur l'autre : cette représentation est univoque et continue pour les aires S et Σ, contours compris; elle est conforme, sans exception, pour l'intérieur des aires S et Σ.

Le développement en série qui correspond à un point de ramification de la surface de Riemann est rattaché à la représentation

conforme, sur un plan simple, de la portion de surface à plusieurs feuillets qui forme le domaine du point de ramification.

Comme application, on donne les conditions pour qu'une fonction multiforme soit algébrique, on explique la construction de la surface de Riemann pour une courbe algébrique d'un espace à n dimensions, la représentation conforme d'un rectangle sur un cercle.

Ce Chapitre, où les considérations géométriques ont été constamment invoquées, se termine par la conception arithmétique d'une surface de Riemann, conception à laquelle on parvient en associant à toute valeur de z un nombre entier n (qui dans l'exposé géométrique était le numéro d'un feuillet).

Chapitre IX : *Prolongement analytique* (p. 370-396). — On part de cette définition : Deux fonctions sont dites prolongées l'une par l'autre si leurs domaines de définition ont des parties communes et si dans l'une de ces parties les deux fonctions coïncident. Si f_1 est prolongée par f_2, f_2 par f_3, on dit encore que f_3 donne le prolongement analytique de f_1.

Pour étendre autant que possible le domaine de définition d'une fonction donnée, on donne un procédé systématique qui (théoriquement, bien entendu) conduit à la conclusion suivante :

Soit $f(z)$ une fonction analytique au point a. On peut faire correspondre à cette fonction un ensemble dénombrable de fonctions

$$w = f_n(z), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

telles que : 1° La fonction $f_n(z)$ se comporte analytiquement dans un cercle T_n ayant pour centre le point a_n. Dans le voisinage de a, la fonction $f_0(z)$ coïncide avec la fonction donnée $f(z)$. 2° Chacune des fonctions $f_n(z)$ est le prolongement analytique d'une autre quelconque de ces fonctions. 3° Soit L un chemin arbitraire le long duquel $f(z)$ peut être prolongée analytiquement; ce prolongement analytique peut être obtenu au moyen d'un nombre fini de fonctions $f_n(z)$.

Des exemples sont donnés de fonctions analytiques monogènes ainsi définies, l'une d'elles admettant un cercle comme *frontière naturelle* (natürliche Grenze). On explique comment une relation identique entre des fonctions subsiste pour les prolongements

analytiques de ces fonctions, en prenant pour exemples les équations différentielles et l'extension de la définition de la fonction $\Gamma(z)$.

TROISIÈME SECTION.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE. POTENTIEL LOGARITHMIQUE.

Chapitre X : *Fonctions périodiques* (p. 397-437). — L'étude des fonctions simplement ou doublement périodiques fournit l'application la plus simple, sans doute, et la plus suggestive de la théorie des fonctions, telle qu'elle vient d'être exposée dans les Chapitres précédents. Pour les fonctions simplement périodiques, on s'aide d'une représentation conforme de la bande qui est prise comme domaine fondamental, en distinguant deux cas très différents suivant que le point à l'infini de cette bande est ou n'est pas un point singulier essentiel. Pour les fonctions doublement périodiques, l'ordre suivi est inspiré par les leçons de Liouville de 1847 et il est fait un emploi constant de l'intégration le long d'un parallélogramme des périodes, suivant le procédé indiqué par Hermite. Le théorème de Weierstrass sur les fonctions uniformes qui admettent un théorème d'addition est démontré ainsi que sa réciproque.

En vue de préparer la théorie des fonctions automorphes, on insiste sur une définition d'une fonction doublement périodique qui repose uniquement sur les propriétés de la fonction dans un parallélogramme des périodes. Les fonctions doublement périodiques de seconde et de troisième espèce sont définies, avec la condition relative aux résidus, en admettant provisoirement l'existence de ces fonctions.

Chapitre XI : *Séries et produits infinis* (p. 438-485). — Au commencement du Chapitre sont réunies les propriétés des séries et des produits infinis nécessaires pour la définition des fonctions p, ζ et σ de Weierstrass et pour la décomposition d'une fonction en facteurs primaires. On expose rapidement les propriétés des fonctions de Weierstrass, la décomposition d'une fonction doublement périodique en éléments simples ou en produit de fonctions σ, puis le théorème de Weierstrass sur les fonctions entières tiré de son

Mémoire de 1876 et le théorème de Mittag-Leffler, extension aux fonctions transcendantes de la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples, la généralisation que Mittag-Leffler a donnée ensuite de son théorème, enfin le développement d'une branche de fonction en série de fractions rationnelles, d'après Runge.

Chapitre XII : *Les fonctions élémentaires* (p. 487-524). — Au lieu de définir les fonctions élémentaires, comme on le fait le plus souvent, en partant de l'Arithmétique et de la Géométrie, l'auteur préfère partir de la définition du logarithme par une intégrale et y rattacher les puissances à exposant quelconque et l'exponentielle. Pour les fonctions trigonométriques, elles sont introduites en partant de l'équation différentielle relative au cas le plus simple des vibrations, et l'on donne, pour finir, la décomposition de $\cot x$ en série de fractions et de $\sin x$ en produit infini.

Chapitre XIII : *Potentiel logarithmique* (p. 524-628). — On appellera ici plus particulièrement *fonction harmonique* une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

On expose les principales questions de Physique qui conduisent à ces fonctions : propagation de la chaleur, ou de l'électricité, mouvement d'un fluide incompressible.

Des exemples sont donnés pour lesquels on obtient facilement les lignes de courants et leurs trajectoires orthogonales.

Les propriétés des fonctions harmoniques sont réparties en trois groupes suivant : (a) qu'elles se déduisent directement de l'équation de Laplace; (b) ou qu'elles se rattachent à la fonction de Green; (c) ou enfin qu'elles se rapportent à des développements en série. Voici pour chacun des trois groupes les propriétés principales :

a. On déduit directement de l'équation de Laplace le théorème de la moyenne, le fait qu'il existe une solution au plus au problème de Dirichlet (*Trouver une fonction uniforme harmonique dans une aire donnée et prenant sur le contour de cette*

aire des valeurs données), la détermination de la fonction v conjuguée d'une fonction harmonique donnée u, enfin la propriété invariante relative à une représentation conforme.

b. Les propriétés du second groupe se rattachent à la formule

$$u(x, y) = \int_{(C)} U \frac{\partial g}{\partial n} ds,$$

faisant connaître la valeur d'une fonction u harmonique dans une aire A pour un point x, y intérieur, quand on se donne la valeur U de cette fonction en tout point du contour C qui limite l'aire A et la fonction g de Green relative à l'aire A et au point intérieur x, y.

La fonction $g(\xi, \eta; x, y)$ de Green est assujettie aux conditions suivantes : elle est uniforme et harmonique à l'intérieur de l'aire A, à l'exception du seul point x, y; en ce point on a

$$g = \log\left(\frac{1}{r}\right) + \omega,$$

en désignant par r la distance du point variable ξ, η au point x, y et par ω une fonction harmonique au point x, y; enfin g s'annule tout le long du contour C. La fonction de Green se calcule aisément dans le cas particulier où (C) est un cercle et l'on trouve alors la formule de Poisson

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi,$$

formule que Böcher déduit par une transformation simple du théorème de la moyenne.

Une fonction harmonique possède des dérivées de tous les ordres et ces dérivées sont elles-mêmes des fonctions harmoniques.

Une fonction harmonique qui reste partout finie, même à l'infini, se réduit à une constante.

Une série de fonctions harmoniques, uniformément convergente dans une aire, définit une fonction harmonique; on peut la différentier terme à terme autant de fois qu'on le veut.

c. Les développements en série définis par les deux théorèmes suivants ont, dans la théorie des fonctions harmoniques telle qu'elle est exposée ici, une importance fondamentale.

Si une fonction est uniforme et harmonique dans un cercle ayant pour centre l'origine, elle peut être développée en une série de la forme

$$u = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

dont les coefficients a_n, b_n sont des constantes, et ce développement en série n'est possible que d'une seule manière.

Si une fonction est uniforme et harmonique dans une couronne circulaire ayant pour centre l'origine, elle peut être développée en une série de la forme

$$u = k \log r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

et ce développement n'est possible que d'une seule manière.

On déduit de là, en particulier, les conditions de possibilité du prolongement analytique d'une fonction harmonique au delà d'un arc de courbe analytique.

Cette théorie des fonctions harmoniques qui vient d'être exposée indépendamment de la théorie des fonctions de variables complexes présente avec cette dernière théorie une correspondance évidente qui s'explique bien en se rappelant que les équations différentielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sont à la base, dans les deux cas. Cependant la correspondance n'est pas telle que l'une des théories soit seulement l'image de l'autre. Il y a lieu de développer chacune d'elles avec la méthode qui lui est propre. Mais il est intéressant de montrer comment on peut passer de l'une à l'autre. Cette idée, qui avait déjà été développée par Picard dans son *Traité d'Analyse*, est exposée ici sous une forme extrêmement simple.

La représentation conforme d'une aire simplement connexe sur un cercle est rattachée à la théorie précédente par ce théorème :

Si T est une aire simplement connexe, g et h la fonction correspondante de Green et sa conjuguée, la fonction

$$w = e^{-g-ih}$$

donne la représentation conforme de l'aire T sur un cercle du plan w.

On énonce ici le principe de Thompson-Dirichlet et le théorème d'existence correspondant, et l'on expose, avec détails, le procédé alterné de Schwartz et la solution qui s'en déduit pour le problème de Dirichlet relatif à une aire limitée par des arcs analytiques de courbes. Il y a lieu de traiter directement le cas d'un triangle formé d'arcs de cercle et dont les trois angles sont nuls. C'est une occasion pour introduire les réseaux de triangle qui serviront pour les fonctions automorphes et en particulier la fonction qui intervient dans la démonstration du théorème de Picard relatif aux valeurs d'une fonction dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

Le Volume se termine par l'énoncé du problème :

Étant donnée la relation

$$w = f(z),$$

où $f(z)$ désigne une fonction analytique, exprimer z et w par des fonctions uniformes d'un paramètre.

Et par l'indication des conclusions de Poincaré et de Klein sur cette question. E. Lacour.

RE (A. del). — Lezioni di Algebra della logica ad uso degli studenti della Facoltà di Matematica e di Fillosofia e' lettere dettate nella R. Università di Napoli. 1 vol in-8°; viii-104 pages. Naples; imprimerie de l'Académie des Sciences; 1906.

Voici le sommaire des sujets développés successivement par M. Alfonso del Re : Notions générales; deux systèmes de postulats; propositions fondamentales; loi de réciprocité de Peirce et Schröder; les inclusions logiques; les fonctions logiques, leurs développements et leurs discriminants; les équations logiques et leurs systèmes; le procédé d'élimination, le résultant; la résolution des équations logiques; le problème général de Boole,

méthode de Johnson et méthode systématique de Schröder pour résoudre les équations logiques.

Tous ces sujets, qui s'enchaînent d'ailleurs naturellement, sont susceptibles d'être présentés sous une forme vraiment algébrique : c'est à ce caractère que s'est attaché M. Alfonso del Re pour les choisir dans l'ensemble des leçons sur l'algèbre de la logique qu'il a données, de 1902 à 1904, à l'Université de Naples. L'exposition en est claire et attrayante ; M. del Re se félicite du succès et des bons résultats de son enseignement ; les qualités du professeur, qui se manifestent dans le Livre, expliquent ce succès.

Il émet dans sa préface, sous forme dubitative, une idée assez originale. Les opérations fondamentales de l'algèbre de la logique sont simples, aisées à expliquer et à comprendre ; elles supposent très peu de connaissances mathématiques ; on peut les exposer à des élèves qui savent seulement les éléments de l'arithmétique : l'algèbre de la logique, au moins lorsqu'on ne veut pas aller bien loin, est plus facile que l'algèbre ordinaire. Dès lors, à ces élèves qui ne feront aucun usage professionnel des mathématiques, qui n'étudient un peu celles-ci que pour la formation de leur esprit, ne vaudrait-il pas mieux enseigner l'algèbre de la logique que l'algèbre ordinaire? Il paraît que la connaissance de l'algèbre de la logique peut être utile aux juristes, et que certaines erreurs imputables à notre Cour de Cassation ont résulté de l'ignorance de la loi de Morgan. Je me contente de transcrire la question de M. del Re. Je crois bien que, en France, on ne s'occupe plus guère de la théorie du syllogisme ; le mot ne figure plus dans les programmes de la classe de Philosophie ; nos bacheliers ne savent plus sans doute ce que c'est que *baroco*, *ferio*, *camestres*, *celarent*, ou *felapton*. Si on leur enseignait tout cela, il vaudrait peut-être mieux mettre à la place l'addition et la multiplication logiques, avec leur double interprétation, voire la loi de Morgan.

J. T.

WHITEHEAD (A.-N.). — THE AXIOMS OF DESCRIPTIVE GEOMETRY (n° 5 des *Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics*). 1 vol. in-8°; VIII-94 pages. Cambridge, University Press; 1907.

Ce petit Volume fait suite aux *Axiomes de la Géométrie projective* du même auteur, dont le *Bulletin* a parlé récemment : on y trouvera la même précision et le même esprit philosophique. Cette fois, les démonstrations qu'il a fallu supprimer, pour rester dans le cadre fixé, sont peut-être plus nombreuses et plus difficiles que dans le Volume précédent; mais ici encore, si le lecteur, après la lecture du Livre de M. Whitehead, n'est pas en possession complète de la *Géométrie descriptive*, il a une vue d'ensemble et sait sur quels points il doit porter son effort pour compléter ses connaissances, ce qu'il pourra faire avec les indications bibliographiques que donne l'auteur. Bien entendu, ici encore, il ne s'agit pas des développements dont la *Géométrie descriptive* est susceptible, mais des fondements sur lesquels elle repose. L'objet propre de l'auteur est de convaincre son lecteur que les fondements qu'il décrit suffisent à tous les développements de la Géométrie.

Entre la Géométrie descriptive dont traite M. Whitehead et l'ensemble des règles dont ces mots éveillent le souvenir chez les compatriotes de Monge, il n'y a rien de commun. Un mauvais plaisant qui voudra trouver à tout prix un rapprochement entre les deux disciplines, pourra faire remarquer qu'il arrive aux droites d'une *épure* de ne pas se couper dans les limites de cette épure et que, en limitant ainsi le plan au papier sur lequel on dessine, on a l'exemple d'une géométrie, où deux droites d'un plan ne se coupent pas nécessairement. Or, c'est là ce qui distingue essentiellement la *Géométrie descriptive*, dont il est ici question, de la *Géométrie projective*, où deux droites d'un plan ont toujours un point commun.

L'auteur développe d'abord la suite des axiomes de M. Peano, où la notion « entre », qui n'est d'ailleurs pas définie, tient le rôle essentiel, et la suite des axiomes de M. O. Veblen (¹) dont il

(¹) *A system of axioms for Geometry* (*Trans. of the Amer. math. Soc.*, t. V, 1904).

regarde le Mémoire comme le terme où ont abouti les travaux de MM. D. Hilbert, E.-H. Moore, B. Russell et de M. Veblen lui-même; c'est la notion d'ordre qui tient alors le rôle essentiel; ni le point, ni l'ordre ne sont d'ailleurs définis. Il montre ensuite le rôle particulier de l'axiome de Dedekind, comment de cet axiome résulte l'existence, une droite et un point extérieur étant donnés, de deux demi-droites partant du point et ne rencontrant pas la droite donnée, comment, enfin, s'introduit alors l'axiome d'Euclide.

Le théorème de Desargues, dont l'énoncé doit être modifié pour la Géométrie où les droites d'un plan ne se rencontrent pas nécessairement, sert de moyen pour montrer comment l'introduction de *points idéaux* permet de construire un espace projectif dont l'espace descriptif soit une partie : j'ai fait, plus haut, allusion à ce qu'une région convexe d'un espace projectif constituait inversement un espace descriptif.

M. Whitehead expose ensuite brièvement quelques points de la théorie des groupes continus de transformation, indispensables pour faire comprendre ce qu'est le groupe des mouvements. Sous le titre *Axiome de la congruence*, il résume les deux solutions que Sophus Lie a données du problème qu'il a désigné sous le nom de *problème de Riemann-Helmholtz*.

Partant d'une transformation infinitésimale du groupe projectif, il montre comment il faut la spécialiser pour avoir une rotation infinitésimale. L'étude des rotations infinitésimales l'amène à la notion de cette forme quadratique à laquelle on a donné le nom d'*absolu* et à la distinction des diverses géométries. Enfin, les notions d'angle et de distance sont développées dans le dernier Chapitre. J. T.

WILCZYNSKI (E.-J.). — PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF CURVES AND RULED SURFACES. 1 vol. in-8°, VIII-298 pages. (Tome XVIII de la *Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihren Anwendungen.*) Leipzig, Teubner, 1904.

L'objet essentiel de M. Wilczynski est d'exposer les propositions géométriques concernant les courbes et les surfaces réglées

auxquelles conduisent les propriétés d'invariance des équations différentielles linéaires, ou des systèmes de pareilles équations, lorsqu'on regarde les coordonnées homogènes du point courant sur la courbe comme les solutions d'une équation différentielle linéaire du troisième ou du quatrième ordre, suivant qu'il s'agit d'une courbe plane ou d'une courbe dans l'espace, et qu'on regarde une surface réglée comme joignant deux points correspondants de deux courbes, les coordonnées homogènes de ces points étant les solutions d'un système de deux équations différentielles linéaires simultanées du second ordre. On sait assez que c'est à Halphen qu'est dû ce genre de considérations pour ce qui concerne les courbes; la théorie des surfaces réglées a été développée par M. Wilczynski lui-même, dans une suite d'intéressants Mémoires publiés, à partir de 1901, dans les *Transactions of the American mathematical Society*. Au reste, les résultats des recherches d'Halphen et de divers auteurs qui ont enrichi la matière sont, le plus souvent, exposés d'une manière qui appartient à M. Wilczynski et le sujet est développé avec le souci d'une grande généralité et d'une parfaite unité dans la méthode.

Après avoir expliqué ou rappelé les notions générales, dues à Sophus Lie, qui dominent toute théorie de la transformation des équations différentielles, l'auteur établit la forme la plus générale des transformations qui, appliquée aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et x, change un système d'équations différentielles linéaires; où x est la variable indépendante et où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les fonctions inconnues en un autre système d'équations différentielles linéaires. C'est la généralisation de cette proposition bien connue : pour une équation différentielle linéaire d'ordre $n > 1$ entre y et x, la seule transformation qui reproduit une équation différentielle linéaire est de la forme

$$y = \lambda(x)\eta, \qquad x = f(\xi),$$

en désignant par ξ la nouvelle variable indépendante et par η la nouvelle fonction inconnue.

Cette proposition fondamentale conduit à la notion des invariants, covariants, semi-invariants d'une équation différentielle linéaire, théorie qui sera reprise un peu plus tard dans sa généralité, mais que l'auteur développe d'abord pour une seule équation

différentielle, afin d'avoir tous les éléments analytiques nécessaires pour traiter complètement les équations du troisième ordre, dont l'interprétation géométrique constitue ce que l'auteur appelle la *Géométrie différentielle projective des courbes planes*. Les équations du quatrième ordre et la *Géométrie différentielle projective des courbes de l'espace* sont renvoyées à la fin du Volume, après la théorie des surfaces réglées, de manière à permettre d'intéressants rapprochements avec cette théorie.

Considérons un système d'équations linéaires de la forme

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} y'' + p_{11}y' + p_{12}z' + q_{11}y + q_{12}z = 0, \\ z'' + p_{21}y' + p_{22}z' + q_{21}y + q_{22}z = 0, \end{cases}$$

où $p_{11}, \ldots, q_{22}$ sont des fonctions de x, et un système fondamental de solutions $y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4$, c'est-à-dire un système de solutions tel que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul pour la valeur initiale $x = x_0$; les points dont les coordonnées respectives sont y_1, y_2, y_3, y_4 et z_1, z_2, z_3, z_4 décrivent deux courbes, dites *courbes intégrales du système;* les points de ces deux courbes, obtenus pour une même valeur de x, se correspondent. Les droites qui joignent deux points correspondants forment une surface réglée dite *surface intégrante* du système. La condition $D \neq 0$ exprime que les deux tangentes aux deux courbes intégrales, en des points correspondants, ne se coupent pas. Dire que D ne doit pas être identiquement nul, revient à dire que la surface intégrante ne peut être développable.

Cette surface intégrante reste la même pour tous les systèmes d'équations que l'on peut déduire du proposé (A) par une transformation de la forme

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha y + \beta z, \\ \zeta &= \gamma y + \delta z, \qquad \xi = f(x), \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions de x. Il est à peine utile de dire que la substitution d'un autre système fondamental de solutions

au système d'où l'on est parti, revient à effectuer une transformation homographique sur les courbes intégrales et la surface intégrante, et que l'on regarde comme identiques les surfaces telles que l'on puisse ainsi passer de l'une à l'autre par une transformation homographique. Une équation ou un système d'équations entre $p_{i,k}$, $q_{i,k}$, $p'_{i,k}$, ..., qui restent invariants pour une transformation de la forme

$$\eta = \alpha y + \beta z, \qquad \zeta = \gamma y + \delta z,$$

où α, β, γ, δ sont des fonctions de x, exprime une propriété invariante de la surface intégrante.

Il est naturel d'introduire les coordonnées pluckériennes : les six coordonnées

$$\omega_{ik} = y_i z_k - z_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

de la droite qui joint deux points correspondants, vérifient une même équation différentielle linéaire

$$P_0 \omega^{(6)} + P_1 \omega^{(5)} + \ldots + P_5 \omega' + P_6 \omega = 0,$$

où P_0, P_1, ..., P_6 sont des fonctions des p_{ik}, q_{ik}. D'ailleurs, aux transformations

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \alpha y + \beta z, \\ \bar{z} &= \gamma y + \delta z, \qquad \bar{x} = \xi(x) \end{aligned}$$

correspondent les transformations

$$\bar{\omega} = (\alpha\delta - \beta\gamma)\omega, \qquad \bar{x} = \xi(x);$$

en sorte que les invariants de l'équation différentielle linéaire du sixième ordre que vérifient les coordonnées pluckériennes d'une génératrice de la surface intégrante coïncident avec les invariants du système (A).

Tel est, en gros, le point de départ de M. Wilczynski, qui ramène ainsi l'étude des propriétés différentielles projectives d'une surface réglée à l'étude des propriétés invariantes d'un système de deux équations différentielles linéaires, du second ordre, ou de cette équation linéaire du sixième ordre dont on vient de parler. Il a su en tirer de très riches développements. Signalons en particulier ceux qui concernent la *flecnode curve*, c'est-à-dire le lieu

des points d'une surface tels que, par chacun d'eux, on puisse mener une tangente à la surface qui rencontre celle-ci en quatre points confondus, la *flecnode surface* lieu des tangentes dont on vient de parler, la *flecnode congruence* d'une surface réglée, formée par l'ensemble des génératrices des hyperboloïdes osculateurs à cette surface réglée le long de ces diverses génératrices, les développables et les surfaces focales de cette *flecnode congruence*, etc.

Les divers Chapitres sont suivis d'exercices, dont les uns sont de simples exemples que le lecteur traitera avec plaisir pour se familiariser avec la théorie qu'il vient d'étudier; d'autres sont de véritables sujets de recherche. J. T.

MÉLANGES.

SUR DE NOUVELLES APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RÉSIDUS;

PAR M. A. BUHL.

1. Je me propose d'indiquer dans ce petit Mémoire (1) comment certaines transformations de l'intégrale classique de Cauchy, transformations nées de la considération préliminaire d'une intégrale double, permettent des applications de la théorie des résidus à d'autres, assez diverses en apparence, telles que la théorie des séries sommables de M. E. Borel, une généralisation de ladite théorie, une autre forme de celle des développements en séries de fractions rationnelles, etc. Cela relie d'ailleurs ces diverses théories d'une façon digne de remarque.

Soient $F(x)$ une fonction uniforme et C un cercle ayant son centre à l'origine. Les points singuliers de F pourront être répar-

(1) Le présent Mémoire est le développement d'une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 2 avril 1907.

tis, pour le moment, aussi bien dans C qu'à l'extérieur et, sous la seule condition $|x| < |z|$, on aura

$$(1) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \frac{1}{2i\pi}\int_C F(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\frac{x^2}{z^3}+\ldots\right)dz.$$

La série du second membre étant convergente ou non je considérerai les sommes

$$s_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C F(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\ldots+\frac{x^n}{z^{n+1}}\right)dz$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\int_C F(z)\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{z-x}\,\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Soit maintenant la fonction auxiliaire de trois variables complexes $f(\zeta, \xi, x)$. En considérant un cercle Γ le long duquel on peut intégrer par rapport à ζ et pour $|\xi| < |\zeta|$, j'aurai

$$(2) \quad \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta,\xi,x)\,d\zeta}{\zeta-\xi} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(\zeta,\xi,x)\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{\xi}{\zeta^2}+\frac{\xi^2}{\zeta^3}+\ldots\right)d\zeta.$$

Je désignerai par $c_0, c_1, c_2, \ldots$ les *termes* de la série ainsi obtenue.

On aura immédiatement

$$c_n s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C\int_\Gamma F(z) f(\zeta,\xi,x)\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{z-x}\,\frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}z^{n+1}}\,d\zeta\,dz$$

et, en s'appuyant sur les identités

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{\zeta^{n+1}z^{n+1}}\xi^n = \sum\frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}} - x\sum\frac{(\xi x)^n}{(\zeta z)^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{\zeta-\xi} - \frac{x}{\zeta z - \xi x} = \frac{\zeta(z-x)}{(\zeta-\xi)(\zeta z-\xi x)},$$

vraies si $|\xi| < |\zeta|$ et si $|\xi x| < |\zeta z|$, ce qui est précisément réalisé, on a finalement

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C\int_\Gamma \frac{F(z) f(\zeta,\xi,x)}{(\zeta-\xi)\left(z-\frac{\xi x}{\zeta}\right)}\,d\zeta\,dz.$$

Telle est la formule fondamentale qu'il s'agissait d'établir. Elle est bien remarquable par sa simplicité et son élégance, mais jus-

qu'ici rien ne permet de lui attribuer plus qu'une valeur formelle, car on peut se demander si les deux membres seront toujours finis ou infinis en même temps.

2. *Cas où* F *est holomorphe dans* C. — Dans ce cas l'intégrale double de (3) se réduit immédiatement à une intégrale simple, car l'intégration en z est immédiatement possible en ne tenant compte que du pôle simple $z = \frac{\xi x}{\zeta}$ qui, d'après les hypothèses faites plus haut, est forcément dans C. On a ainsi

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right) f(\zeta, \xi, x)\frac{d\zeta}{\zeta - \xi}.$$

Cette facilité de l'intégration en z porte immédiatement à se demander si, moyennant de nouvelles hypothèses, on ne pourrait pas intégrer aussi facilement par rapport à ζ. Pour cela il faudrait que, tout au moins pour de certaines valeurs de ξ et de x, l'expression $F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right) f(\zeta, \xi, x)$ puisse être considérée comme une fonction de ζ holomorphe dans Γ.

On peut essayer de réaliser cette condition par un choix convenable de f.

Observons que, si F, holomorphe dans C, admet hors de ce cercle des singularités a_k, $F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)$ admettra comme singularités les points $\zeta_k = \frac{\xi x}{a_k}$, toujours dans Γ.

Prenons d'abord le cas où les ζ_k sont des pôles simples, lesquels, bien entendu, s'ils sont en nombre infini, pourront avoir au moins un point limite dans Γ.

Si l'on calcule le second membre de (4) par la théorie ordinaire des résidus, on arrive sans peine à la formule

$$(5) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \sum_k \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)} \frac{x}{a_k(x - a_k)} \lim_{z=a_k} [F(z)(z - a_k)],$$

où l'on suppose que f est une fonction holomorphe dans Γ de la seule variable ζ. Remarquons que, d'après les hypothèses faites précédemment, $|x| < |a_k|$ quel que soit k; le rapport de ces deux

modules pourra même tendre vers zéro lorsque les points a_k s'éloigneront de plus en plus de C.

Supposons maintenant que pour $|\xi|$ *croissant indéfiniment dans de certaines directions le quotient de* $f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)$ *par* $f(\xi)$ *tende vers zéro;* la formule (5) pourra se réduire alors à

$$(6)\qquad \mathrm{F}(x) = \lim_{\xi=\infty} \frac{1}{f(\xi)} \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n.$$

C'est la formule que M. Borel place à la base de sa théorie des séries divergentes sommables. En l'établissant par le procédé précédent on voit nettement comment on doit choisir la fonction auxiliaire f. On comprend d'abord que la propriété soulignée sera présentée avec le maximum de simplicité par des fonctions entières à croissance régulière. Si l'on prend la fonction exponentielle elle-même, le résultat est immédiat. On a en effet

$$(7)\qquad e^{\frac{\xi x}{a_k}} : e^{\xi} = e^{\xi\left(\frac{x}{a_k}-1\right)}.$$

Soient de plus

$$\xi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad x = x_1 + ix_2, \qquad a_k = a_{k1} + ia_{k2}.$$

La partie réelle de $\xi\left(\frac{x}{a_k} - 1\right)$ est alors

$$\rho\left[\cos\theta\left(\frac{x_1 a_{k1} + x_2 a_{k2}}{a_{k1}^2 + a_{k2}^2} - 1\right) - \sin\theta\left(\frac{a_{k1} x_2 - a_{k2} x_1}{a_{k1}^2 + a_{k2}^2}\right)\right]$$

et le rapport (7) tendra vers zéro quel que soit a_k, quant ρ croîtra indéfiniment, si le crochet coefficient de ρ reste négatif. Cela revient à considérer la droite en x_1, x_2 obtenue en égalant ce crochet à zéro et à spécifier que le point x devra toujours rester d'un même côté de cette droite, laquelle passe par le point a_k et a pour coefficient angulaire

$$\tang\theta = \frac{a_{k1}\cos\theta + a_{k2}\sin\theta}{a_{k1}\sin\theta - a_{k2}\cos\theta}.$$

Comme, en général, il y aura plusieurs points a_k, x sera finalement enfermé dans un certain *polygone de sommabilité*. Donc, *si dans la formule* (6) *on fait varier les directions d'argu-*

ment θ dans lesquelles ξ va à l'infini, les côtés du polygone de sommabilité tournent autour des points fixes a_k.

D'ailleurs l'égalité précédente peut se mettre sous la forme bien simple et bien remarquable à cause de l'interprétation géométrique évidente

$$\tang(\Theta + \theta) = -\frac{a_{k1}}{a_{k2}}.$$

La méthode de M. Borel consiste à envoyer ξ à l'infini sur l'axe réel et dans le sens positif. Donc $\theta = 0$ et les côtés du polygone sont perpendiculaires aux $|a_k|$. C'est là l'origine d'une méthode de prolongement analytique, car la condition $|x| < |a_k|$ n'intervient pas dans tout ceci. La série (1) peut diverger sans que l'on cesse d'avoir $|\xi| < |\zeta|$ et $|\xi x| < |\zeta z|$.

L'avantage de la méthode précédente est de donner la formule (5) plus générale que (6) et qui montre quelle est la nature de la différence entre les deux membres de (6) quand le passage à la limite n'est pas encore effectué. Cette différence met en évidence les infinis de $F(x)$.

A ce propos, remarquons que (5) peut donner comme cas particuliers des formules plus élémentaires et plus connues.

Pour $f(\xi) = \xi^p$, on a

$$F(x) = F(0) + F'(0)\frac{x}{1!} + \ldots + F^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!}$$
$$+ \sum_k \left(\frac{x}{a_k}\right)^{p+1} \frac{\lim\limits_{z=a_k} [F(z)(z-a_k)]}{x - a_k},$$

ce qui est immédiat en appliquant la méthode de Cauchy à l'intégrale

$$\int \frac{F(z) - F(0) - \ldots - F^{(p)}(0)\dfrac{z^p}{p!}}{z^{p+1}(z-x)}\,dz$$

supposée nulle le long d'un contour grandissant indéfiniment dans toutes les directions.

3. Revenons maintenant au cas général signalé au paragraphe précédent après l'obtention de la formule (4). Imaginons que dans cette formule on s'astreigne à choisir f de telle façon que l'on ait

$$F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right) f(\zeta, \xi, x) = H(\zeta, \xi, x),$$

H étant holomorphe dans Γ par rapport à ζ tout au moins pour des valeurs bien déterminées de ξ et de x. Dans ces conditions l'intégration par rapport à ζ est immédiate et conduit à la formule

$$(8) \qquad F(x) = \frac{1}{f(\xi, \xi, x)} \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n$$

qui n'exige plus aucun passage à la limite et qui se différencie en outre de celle de M. Borel par ce fait que la variable x figure dans les coefficients c_n. Remarquons que la détermination de ces coefficients sera presque toujours laborieuse et délicate. Ils ont en effet pour expression, d'après le second membre de (2),

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{H(\zeta, \xi, x)}{F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)} \frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}} d\zeta;$$

or $F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)$ aura en général des pôles $\zeta_k = \frac{\xi x}{a_k}$ qui seront de simples zéros non singuliers pour le quotient qui figure dans l'intégrale précédente; mais, toujours en général, les pôles ζ_k auront au moins un point limite dans Γ lequel pourra présenter le caractère d'indétermination qui distingue un point essentiel. Et, comme une singularité de cette nature existe aussi bien pour l'inverse de F que pour F, le calcul de c_n exigera la considération de résidus de points essentiels. Cette difficulté disparaît évidemment si $F(x)$ est une fraction rationnelle, car le nombre des pôles sera alors limité et je terminerai par une application très simple de la formule (8) envisagée dans ce cas particulier.

Soient

$$F(x) = \frac{1}{1-x},$$

d'où

$$F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right) = \left(1 - \frac{\xi x}{\zeta}\right)^{-1},$$

et

$$H = -\frac{\zeta}{\xi x}\left(1 - \frac{\zeta}{\xi x}\right)^{m-1}, \qquad f = \left(1 - \frac{\zeta}{\xi x}\right)^m,$$

m étant un entier positif quelconque. On aura

$$f(\xi, \xi, x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^m = 1 - \frac{m}{1}\frac{1}{x} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{x^2} - \dots$$

les termes de ce développement binomial étant précisément c_0, c_1, c_2, ... ainsi qu'on le vérifie facilement. D'autre part s_0, s_1, s_2, ... sont

$$1, \quad 1+x, \quad 1+x+x^2, \quad \ldots.$$

On doit donc avoir

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1.1 - \frac{m}{1}\frac{1}{x}(1+x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{x^2}(1+x+x^2) - \ldots}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^m}$$

ce que l'on vérifie immédiatement pour $m = 1, 2, 3, \ldots$.

LE MONUMENT D'ABEL.

Lors du Centenaire d'Abel, le monde entier a témoigné par sa grandiose participation en quelle haute estime on avait ce génie transcendant.

Au moment où ils se disposent à lui élever un monument digne de lui, ses compatriotes ont cru ne pas devoir donner à leur manifestation un caractère exclusif, mais ont trouvé qu'ils rendraient mieux hommage au caractère international de l'œuvre d'Abel, en conviant les mathématiciens des autres nations à collaborer avec les Norvégiens.

Le monument, qui aura 13m de hauteur, est achevé en plâtre, et prêt à être coulé en bronze. Il est dû au ciseau de Gustav Vigeland, le premier des sculpteurs norvégiens. Sur un haut piédestal planent deux génies de taille gigantesque sur le dos desquels repose le jeune voyant, dont les traits rendent, en une mâle adaptation, ceux de l'illustre Abel. Cette œuvre a excité l'admiration de connaisseurs distingués, même en dehors des limites de la Norvège.

Il s'agit ici de la mémoire d'un homme par lequel la Norvège a

apporté une part contributive tout à fait unique à l'œuvre scientifique de tous les pays et de tous les âges : c'est pourquoi nous nous adressons en toute confiance à l'ensemble du monde savant.

Kristiania, mars 1907.

W. C. BRÖGGER. Elling HOLST.
Fridtjof NANSEN. Carl STÖRMER.
L. SILOW. Axel THUE.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Karl Bopp. — *Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung.* Avec 329 fig. (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von Mor. Cantor. 20. Heft. 2. Stück. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner). 10 m.

Annales de l'Observatoire d'Astronomie physique de Paris, publiées par J. Janssen. T. II. In-4°, 380 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 35 fr.

Cantor (Mor.). — *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik.* I. Bd. 3. Aufl. In-8°, VI-941 p. avec 114 fig. et 1 pl. Leipzig, Teubner. 24 m. Relié 26 m.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. V. Bd. *Physik.* Red. von A. Sommerfeld. 2. Tl. 2. Heft. In-8°. Leipzig, Teubner. 3 m.

Fourrey (E.). — *Curiosités géométriques.* In-8°, VIII-431 p. Paris, Vuibert et Nony. 3 fr. 50 c.

Galle (A.). — *Geodäsie.* In-8°, XI-284 p. avec 96 fig. Leipzig, Göschen. Relié 8 m. (*Sammlung Schubert,* XXIII.)

Hammer (E.). — *Lehr- u. Handbuch der ebenen u. sphärischen Trigonometrie.* 3ᵉ édition. In-8°, XVIII-644 p. Stuttgart, Metzler. 10 m. 60 pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Herausgeg. von Emil Lampe. 35. Bd. Jahrg. 1904. 3. Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 15 m. 60 pf.

JORDAN (W.). — *Handbuch der Vermessungskunde.* 3. Bd. *Landesvermessung u. Grundaufgaben der Erdmessung.* 5. Aufl. Bearb. von C. Reinhertz. Gr. in-8°, VIII-678 et 82 p. av. fig. Stuttgart, Metzler. 15 m.

LAISANT (C.-A.). — *La Mathématique. Philosophie. Enseignement.* 2e édit. In-8°, VII-244 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

LORENTZ (H.-A.). — *Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung nebst ein. Einführg. in andere Teile der Mathematik. Mit besond. Berücksichtigg. der Bedürfnisse der Studierenden der Naturwissenschaften.* Uebersetzt von G.-C. Schmidt. 2e édit. Gr. in-8°, VI-562 p. avec 129 fig. Leipzig, Barth. 12 m. Relié 13 m.

LOEWY (M.) et PUISEUX (P.). — *Atlas photographique de la Lune,* publié par l'Observatoire de Paris. 9e fasc. In-4°, 60 p. Paris, Imprimerie nationale.

SANFELICI (G.). — *Le calcul tachéométrique simplifié.* 2e édit. In-4°, 264 p. Milan, Hœpli. 12 l. 50 c.

SOMMER (J.). — *Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper.* Gr. in-8°, VI-361 p. avec 4 fig. Leipzig, Teubner. Relié 11 m.

OSGOOD (W.-F.). — *Lehrbuch der Funktionentheorie.* 1. Bd. 2. Hälfte. 7 m. 60 pf. (En 1 vol. compl. relié 15 m. 60 pf.). (*B.-G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendgn.* XXe vol.).

VOGT (H.). — *Éléments de Mathématiques supérieures à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs.* 4e édit. In-8°, VIII-712 p. avec fig. Paris, Vuibert et Nony.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgeg. von Mor. Cantor. 4. Bd. Von 1759 bis 1799. 1. Lfg. (p. 1-198). In-8°. Leipzig, Teubner. 5 m. 60 pf.

BERTINI (E.). — *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singularita.* In-8°, Pisa, Spoerri. 14 l.

BRUNN (Alb. von). — *Die generelle Entwicklung der Störungsfunktion u. ihrer Ableitungen in der Gyldén'schen Theorie nach den Exzentrizitäten unter Berücksichtigg. der drei niedrigsten Potenzen der Neigungen.* Gr. in-8°, 34 p. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchdr. (*Mitteilungen der grossherz. Sterwarte zu Heidelberg*, VIII). 1 m. 80 pf.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TARRY (G.). — Tablettes des cotes relatives a la base 20580 des facteurs premiers d'un nombre inférieur a N et non divisible par 2, 3, 5, ou 7. Première Partie : $N = 317^2 = 100489$. 6 Tablettes. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Soit p un nombre premier qui ne divise pas 20580, c'est-à-dire autre que 2, 3, 5, 7; soit a un nombre tel que $20580\,a - 1$ soit divisible par p; le reste minimum (positif ou négatif) de la division de ka par p est ce que M. Tarry appelle la cote du nombre k, relative à la base 20580, pour le nombre premier p. Une disposition ingénieuse, où interviennent des Tablettes pleines et des Tablettes grillées, permet de trouver les cotes d'un nombre inférieur à 100489 pour les 61 nombres premiers de 11 à 313, et, par là, de trouver très rapidement les facteurs premiers de ce nombre.

SOMMER (J.). — Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper.

Ces *Leçons* sont bien faites pour éveiller et développer, chez ceux qui les étudieront, le goût de la théorie des nombres et de l'Algèbre : elles sont d'une lecture facile et agréable; elles introduisent vraiment le lecteur dans la belle théorie des corps numériques. L'auteur a voulu se borner aux corps quadratiques et cubiques; mais il est possible de faire ressortir les idées générales sur ces deux cas particuliers et M. Sommer n'a rien négligé pour cela. Étudier des exemples simples et précis, que l'on puisse traiter jusqu'au bout, mais en ayant en vue les idées générales, montrer ces idées générales, en faire pressentir les développements ulté-

rieurs, c'est la bonne méthode de tout enseignement qui veut être à la fois élémentaire et élevé. D'un autre côté, les difficultés que présente une exposition générale du sujet sont capables d'éloigner un débutant : celui-ci abordera plus volontiers ces difficultés quand il se sera familiarisé avec le sujet et qu'il comprendra l'importance et la beauté des questions devant lesquelles elles se dressent. Pour les corps quadratiques, on peut dire qu'elles n'existent plus, grâce aux travaux de MM. Hurwitz, Minkowski, Hilbert. Ce dernier, en particulier, a fait sur ces corps et les applications au dernier théorème de Fermat un cours, en 1897-1898, que M. Sommer déclare avoir beaucoup utilisé. Au reste, il n'est pas douteux qu'un intérêt particulier s'attache aux corps quadratiques et il est tout naturel que la plus grande partie des leçons leur soient consacrées. Le court Chapitre consacré aux corps cubiques n'en est pas moins très instructif, par la façon même dont on voit la généralisation se faire. Je serais étonné si les lecteurs de M. Sommer, arrivés au bout de son Livre, n'avaient pas le désir d'aborder les théories générales, auxquelles ils sont parfaitement préparés.

L'auteur a grand soin de donner les renseignements historiques importants, de relier les idées autant qu'il est possible, et de les préparer. Par exemple, avant de définir ce qu'est un idéal, et afin de faire pressentir quel est le but de l'introduction des idéaux, il observera que si, au lieu de l'ensemble des nombres entiers, on considérait seulement l'ensemble des nombres entiers de la forme $4n+1$, lesquels forment un groupe relativement à la multiplication, si l'on conservait la définition habituelle de la division, et si l'on regardait comme premiers les nombres qui n'admettent pas, en dehors d'eux-mêmes et de l'unité, de diviseurs appartenant à l'ensemble considéré, c'est-à-dire de la forme $4n+1$, la décomposition de certains nombres entiers en facteurs premiers pourrait se faire de plusieurs manières, par exemple :

$$693 = 21.33 = 9.77.$$

Le caractère univoque de la décomposition ne s'obtiendra qu'en adjoignant les nombres 3 et 7 à l'ensemble des nombres considéré. C'est, de même, l'adjonction des *idéaux* qui permettra de retrouver, pour les entiers algébriques, la décomposition univoque en facteurs premiers.

Ajoutons que la lecture du Livre de M. Sommer ne suppose que des connaissances très élémentaires d'Arithmétique et d'Algèbre. L'auteur a même pris soin de résumer dans un Chapitre préliminaire les propositions fondamentales sur la divisibilité, le nombre de nombres premiers à un nombre donné et inférieurs à lui, le théorème de Fermat, etc. Enfin des exemples numériques simples éclairent continuellement la théorie.

Il nous reste, après avoir essayé de caractériser ces leçons, à en analyser rapidement le contenu.

Après avoir défini le *corps quadratique* $k(\sqrt{m})$, où m est un entier rationnel quelconque, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme $u + v\sqrt{m}$, où u, v sont des nombres rationnels, et les entiers quadratiques de ce corps, c'est-à-dire les nombres de ce corps qui sont racines d'une équation du second degré, à coefficients entiers, dans laquelle le coefficient de x^2 est 1, après avoir introduit quelques notions fondamentales, comme celle de *norme* d'un nombre quadratique, de *base* et de *déterminant* d'un corps, on observe de suite que l'algorithme d'Euclide et ses conséquences relatives à la divisibilité ne s'appliquent pas à tous les corps quadratiques et que, par exemple, dans le corps $k(\sqrt{-5})$, la décomposition en facteurs quadratiques indécomposables peut s'effectuer de diverses façons.

Un *idéal* d'un corps $k(\sqrt{m})$ est un ensemble (infini) d'entiers de ce corps tel que toute combinaison linéaire des éléments de cet ensemble, dont les coefficients sont des entiers du corps, appartienne aussi à l'ensemble. Parmi les idéaux d'un corps, il y a lieu de considérer les idéaux principaux (*Hauptideale*) dont les éléments sont tous des multiples d'un même élément. Le produit de deux idéaux est l'idéal dont les éléments s'obtiennent en multipliant chaque élément de l'un des facteurs par chaque élément de l'autre. La définition de la multiplication entraîne celle de la divisibilité, puis celle de la congruence entre deux entiers du corps par rapport à un idéal d'un corps; elle signifie que la différence des deux entiers appartient à l'idéal. Un idéal-unité d'un corps (*Einheitideal*) contient le nombre 1 ou un entier quadratique qui divise 1. Un *primidéal* est un idéal, qui n'est pas un idéal-unité, et qui n'est divisible que par lui-même ou par un idéal-unité. Un idéal n'est décomposable que d'une seule façon

en primidéaux. C'est à M. Hurwitz qu'est due la démonstration simple, dans le cas d'un corps quadratique, de ce théorème fondamental.

La notion d'idéaux *équivalents*, d'idéaux qui deviennent identiques quand on les multiplie respectivement par des entiers convenables du corps considéré, conduit à la notion des *classes d'idéaux*, dont tous les éléments sont des idéaux équivalents. Pour un corps quadratique donné, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'idéaux. La démonstration résulte aisément du théorème de M. Minkowski, sur les systèmes de n formes linéaires à n variables, de déterminant égal à 1, en vertu duquel il y a toujours un système de valeurs rationnelles entières attribuées aux variables, telles que les valeurs absolues des formes soient toutes égales ou inférieures à 1. Cette proposition, dans la *Geometrie der Zahlen* de M. Minkowski, résulte de théorèmes plus généraux, à forme géométrique, dans l'espace à n dimensions : M. Hilbert en a donné une démonstration directe, d'un caractère simple, que reproduit M. Sommer.

Celui-ci développe la suite des généralisations qui transportent, dans la théorie des idéaux, les propositions fondamentales de la théorie des nombres; la fonction analogue à l'expression $\varphi(n)$ des nombres premiers à n et inférieurs à lui, le théorème de Fermat pour les idéaux, les racines primitives d'un primidéal, les congruences linéaires suivant un idéal. Puis vient la généralisation du symbole de Legendre, pour un corps quadratique, la généralisation de la loi de réciprocité; la définition, d'après M. Hilbert, des *systèmes de caractères* d'un idéal, le groupement en *espèces* des classes d'idéaux pour lesquelles les systèmes de caractères sont les mêmes, etc.

Le Chapitre suivant est consacré à des applications; c'est d'abord l'extension du théorème de Fermat sur l'impossibilité de la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

aux entiers des corps respectifs $k(\sqrt{-3})$ et $k(\sqrt{-1})$ pour $n = 3$ et $n = 4$; puis un important paragraphe sur la correspondance entre les formes quadratiques et les idéaux, en particulier, sur la mul-

tiplication des idéaux et la composition des formes; l'auteur traite enfin de la représentation géométrique des idéaux.

Ainsi qu'on l'a dit plus haut, l'étude des corps cubiques est traitée d'une façon beaucoup moins complète. Cette étude sera toutefois très utile au lecteur, parce qu'elle fait nécessairement ressortir ce qu'il y a de très particulier dans les corps quadratiques, et qu'elle fait vraiment apparaître les méthodes générales; M. Sommer s'est d'ailleurs limité aux questions qui ne présentent pas de grandes difficultés. Ainsi, il n'a parlé ni de la loi de réciprocité, ni de la division en espèces.

Il revient enfin aux corps quadratiques, pour introduire l'importante notion des corps *relatifs*. Si, dans un corps quadratique $k(\sqrt{m})$, on part d'un entier μ de ce corps qui ne soit pas un carré, on peut construire un corps quadratique K relatif à $k(\sqrt{m})$, en faisant jouer aux éléments de $k(\sqrt{m})$ le même rôle qu'aux nombres rationnels pour la construction de $k\sqrt{m}$; c'est-à-dire que les éléments de K seront des nombres de la forme $\alpha+\beta\sqrt{\mu}$, en désignant par α, β des nombres quelconques de $k(\sqrt{m})$. Les notions fondamentales d'entier, de base, de norme, d'idéal, etc., se transportent facilement dans le corps K. Le but essentiel de M. Sommer est de faire pénétrer un peu le lecteur, en lui donnant des exemples numériques, dans les recherches de M. Hilbert sur l'extension de la loi de réciprocité, sur le calcul des nombres de classes, etc.

Le Livre se termine par une Table relative aux corps quadratiques $k(\sqrt{m})$, imaginaires ou réels, pour lesquels le nombre fondamental m est un entier, négatif ou positif, n'admettant point de diviseur carré, et dont la valeur absolue est moindre que 100. On y trouvera la base la plus simple, le discriminant, les idéaux non équivalents dont la norme est inférieure à la valeur absolue de la racine carrée du déterminant, l'énumération des classes et des espèces, avec leurs systèmes de caractères. J. T.

SALMON (G.). — Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden, frei bearbeitet von *W. Fiedler*. Siebente Auflage. Erster Theil. 1 vol. in-8°; XXXIV-444 pages. Leipzig, Teubner, 1907.

« Un homme est exilé dans une île déserte : il ne peut emporter que trois livres; quels livres doit-il choisir? La Bible, Shakespeare et les Coniques de Salmon. » C'est, paraît-il, une réponse légendaire qu'on s'est longtemps racontée à Cambridge. Je ne sais si elle y a cours encore, et il se peut que, dans d'autres pays, on recommande d'autres choix. Mais il y a, sûrement, bon nombre de mathématiciens un peu âgés qui, s'ils feuillettent cette septième édition du *Salmon-Fiedler,* se rappelleront leur jeunesse, le vif plaisir qu'ils ont eu à lire le *Traité des sections coniques,* à en développer les ingénieux exemples, à s'initier à ce qui était vraiment alors des *méthodes nouvelles;* quoiqu'il n'ait plus, sans doute, le même intérêt de nouveauté, ce livre-là est encore de ceux qui peuvent contribuer à faire aimer les Mathématiques aux jeunes gens, et il convient de bien accueillir cette nouvelle édition, la première que n'ait pu voir l'auteur, qui s'est éteint en 1903, à l'âge de quatre-vingt-cinq ans. En tête du Livre, M. Fiedler a retracé la vie et caractérisé l'œuvre mathématique de Georges Salmon. L'émotion qui perce dans ces pages montre bien quelle amitié l'unissait au mathématicien dont il a tant contribué à faire connaître les Ouvrages sur le continent. J. T.

CHARBONNIER (Commandant P.). — Balistique extérieure rationnelle. Problèmes balistiques secondaires (*Encyclopédie scientifique* : Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie). 1 vol. in-8° jésus, de 400 pages. Paris, Doin, 1907.

En rendant compte dernièrement du premier Volume de cet Ouvrage [1], nous expliquions comment le commandant Charbonnier avait su faire de la Balistique extérieure une science analogue à la Mécanique céleste, et ceci justifie l'appellation qu'il lui donne de « branche terrestre de l'Astronomie ». C'est, pour cette branche, le *calcul des perturbations* que nous apporte le Volume qui vient de paraître.

Ces perturbations peuvent être rattachées à trois causes distinctes : l'*Atmosphère*, la *Terre*, le *Projectile;* d'où les trois Livres dont se compose le Volume, chacun d'eux étant d'ailleurs subdivisé en trois Chapitres.

Le Chapitre I envisage les effets de la variation de la densité de l'air avec l'altitude. Il résulte, dans son entier, de recherches originales de l'auteur. La discussion très serrée du mouvement vertical descendant conduit notamment le commandant Charbonnier à mettre en évidence les points de vitesse maximum et de résistance maximum d'où il tire une explication nouvelle, extrêmement plausible, de la luminosité des étoiles filantes et des bolides qui mériterait de se substituer, dans les Traités d'Astronomie, à l'explication un peu trop simpliste qui est restée classique jusqu'à ce jour. L'étude des modifications systématiques que subissent les propriétés générales des trajectoires du fait des variations de la densité du milieu le conduit de même à d'importants théorèmes sur les maxima et minima de la vitesse et de la résistance dans le cas général.

Dans le Chapitre II, qui vise les formules de correction correspondant aux différents cas, abordés dans le précédent Volume, du problème balistique principal, la contribution personnelle de l'auteur ne se fait pas moins sentir; elle se manifeste plus particulièrement au paragraphe 2, où le problème du tir de plein fouet,

---

[1] *Bulletin*, mai 1907, p. 105.

dans une atmosphère de densité variable, est résolu par l'emploi de fonctions balistiques secondaires, et au paragraphe 4, où sont traités divers cas nouveaux d'intégration.

La solution du problème du vent atmosphérique, qui fait l'objet du Chapitre III, peut être considérée comme classique; toutefois, l'auteur y a apporté plus de généralité (n° 45) et l'a complétée (n° 46) par des exemples nouveaux. En outre, la solution particulière qu'il donne pour le cas du tir de plein fouet lui appartient en propre.

Le Chapitre IV, par lequel s'ouvre le Livre II, est destiné à faire voir comment doivent être modifiés les résultats obtenus dans le cas de la gravité supposée constante en direction et en intensité lorsqu'on a égard à la gravité agissant suivant la loi de Newton. La détermination de ce qu'on appelle la trajectoire *planétaire* du projectile est un problème classique et il n'y a lieu, à ce propos, de signaler que la forme géométrique simple sous laquelle la présente l'auteur.

En revanche, la détermination des termes correctifs dus à la Terre, qui se rencontre au Chapitre V, se présente avec un caractère de nouveauté.

Pour ceux qu'attire la Mécanique générale, le Chapitre VI, qui traite des effets de la rotation de la Terre, est d'un plus haut intérêt. Le commandant Charbonnier nous semble l'avoir pleinement élucidée. La solution donnée en 1837 par Poisson a pu, à bon droit, être considérée comme trop exclusivement analytique. Suivant la très juste observation du colonel de Saint-Robert, on y « perd de vue le phénomène mécanique ». Le savant balisticien italien, s'inspirant des idées de Poinsot et de Liouville, s'efforça dès lors de traiter le problème par une voie plus géométrique, et c'est celle qu'à son tour a adoptée le commandant Charbonnier; mais, en s'y maintenant jusqu'au bout, il a pu compléter les résultats précédemment obtenus d'une façon essentielle.

Les applications qui en sont faites aux divers problèmes de tir se présentent comme une nouveauté.

Nous ne saurions entrer ici dans le détail de ces applications très nombreuses, très intéressantes, poussées jusqu'au calcul numérique, parmi lesquelles nous signalerons à part celles qui se rapportent au tir de plein fouet. Mais nous ne saurions, dans ce

Bulletin, omettre de dire qu'on y rencontre chemin faisant de très élégants théorèmes, tels que celui qui indique (p. 171) la répartition, sur un limaçon de Pascal, des points de chute des projectiles lancés par une escadre rangée en cercle autour du but.

Au point de vue de la Mécanique générale, un intérêt spécial s'attache au paragraphe 7 dans lequel l'auteur montre comment la théorie classique figurant dans la plupart des Traités de Mécanique rationnelle doit être modifiée pour devenir correcte.

Le Livre III, avons-nous dit, a trait au projectile lui-même. Il s'ouvre, avec le Chapitre VII, par un rappel de la théorie générale de la rotation des solides autour de leur centre de gravité, dont, au Chapitre VIII, l'application est faite aux projectiles sphériques et discoïdes. En ce qui concerne ces derniers, leur mouvement dans l'air fait ici l'objet d'une discussion plus complète que celle qui est généralement donnée, y compris l'application au boomerang.

Le Chapitre IX, par lequel se termine l'Ouvrage, et qui est consacré à la dérivation des projectiles oblongs, est pour l'auteur une nouvelle occasion d'affirmer son habileté à manier les considérations géométriques. A cet égard, nous signalerons particulièrement les théorèmes généraux sur la précession (n° 173), les propriétés de la roulette de précession (n° 176), les conditions de stabilité des projectiles oblongs (n° 182).

Parmi les formules données pour la dérivation, celles qui se rapportent au tir courbe à faible vitesse sont nouvelles.

Reprenant la belle théorie imaginée par M. de Sparre pour le cas d'une résistance monome, l'auteur l'étend très habilement au cas d'une résistance quelconque et fait connaître (n°s 193 *bis*, 196) l'expression de termes correctifs non encore signalés.

Il fait suivre cette théorie d'une étude, qui lui appartient tout entière en propre, de la trajectoire du projectile dans le voisinage de la bouche, d'où résulte l'interprétation dans tous leurs détails des expériences de *tir au panneau.* Il est digne de remarque que cette étude repose sur l'emploi des intégrales $\int \sin\rho \frac{d\rho}{\rho}$ et $\int \cos\rho \frac{d\rho}{\rho}$ qui appartiennent à la même famille que les intégrales de Fresnel.

L'auteur donne enfin quelques théorèmes nouveaux sur la roulette de nutation et sur la stabilité des projectiles, eu égard à cette nutation.

Ce second Volume du commandant Charbonnier, non moins remarquable que le premier, est de nature à confirmer l'observation que nous avons présentée à l'occasion de celui-ci, sur l'intérêt qu'il y aurait à mettre un tel Ouvrage entre les mains de tous les étudiants en Mécanique générale pour la lumière qu'il permet de répandre sur les principes de la Science théorique. P. M.

LECHALAS (G.). — INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE. 1 vol. petit in-8°, IX-58 pages. Gauthier-Villars, 1904.

L'objet essentiel de M. Lechalas, dans cet Opuscule, est de montrer comment la considération de la Géométrie à quatre dimensions permet de ramener à l'unité les trois systèmes d'Euclide, de Lobatchefski et de Riemann. Un premier Chapitre traite de la courbure et de sa généralisation, un autre de la Géométrie euclidienne à quatre dimensions, le dernier, enfin, de la Géométrie des espaces à courbure négative.

« Ce que nous nous proposons de faire, dit l'auteur, est simplement de présenter, surtout à ceux qui ne se sont pas encore formé de conception systématique des trois Géométries, un aperçu qui leur permettra d'entrer ensuite dans l'étude des Traités sur la matière sans se laisser subjuguer par des conceptions philosophiques qui n'ont absolument rien de nécessaire. » J. T.

FAZZARI (G.). — Breve storia delle Matematica, dai tempi antichi al medio evo. 1 vol. petit in-8°; 267 pages. Milan, Palerme, Naples.

Le Livre de M. Fazzari concerne les Mathématiques pures; l'Astronomie et la Mécanique n'y figurent pas; il comprend treize Chapitres : un premier Chapitre sur la numération, deux sur les Égyptiens et les Babyloniens, cinq sur les Grecs, quatre sur les Romains, les Indiens, les Arabes, l'école byzantine; un enfin sur le Moyen âge. La lecture en est facile et agréable, et ne manquera pas d'intéresser les élèves des lycées, pour lesquels cette « histoire brève » paraît particulièrement écrite. Pour de tels lecteurs, la brièveté est indispensable, et l'érudition de l'auteur doit se cacher; quelques détails biographiques, même quelques anecdotes, qui reposent des abstractions, et qui caractérisent les hommes et les époques, sont les bienvenus; comme aussi les observations philosophiques, et même morales, qui se présentent naturellement : on trouvera tout cela dans le Livre de M. Fazzari.

L'utilité, la nécessité de pareils livres pour l'enseignement secondaire est évidente. Peut-être conviendrait-il d'insister davantage sur certains points, quitte à en sacrifier d'autres (non sans regrets). Les points de contact entre le développement de la Science occidentale et les Égyptiens, les Babyloniens, les Indiens, sont très limités : il en est qu'on doit absolument mentionner, cela est clair, mais qui ne sont que des phénomènes spéciaux. On ne perdrait pas grand'chose en ne parlant point des Romains. Toutes ces suppressions, dont quelques-unes seraient pénibles, n'empêcheraient pas de donner au lecteur le sentiment du développement de la Science. On pourrait alors insister un peu plus sur les époques où ce développement a été très intense, et sur l'état de la Science dans ces époques. Les 25 pages que M. Fazzari a consacrées à la *Période dorée de la Géométrie grecque* sont bien courtes! L'auteur a été obligé de mentionner seulement des sujets sur lesquels, sans doute, il aurait aimé à s'étendre. J. T.

BURKHARDT (H.). — VORLESUNGEN UEBER DIE ELEMENTE DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG UND IHRE ANWENDUNG ZUR BESCHREIBUNG VON NATURERSCHEINUNGEN. 1 vol. in-8°, XI-252 pages, 38 figures. Leipzig, Teubner, 1907.

Si l'on ne connaissait ni le talent de géomètre de M. Burkhardt ni ce talent d'exposition dont il a fait preuve dans ses leçons sur la théorie des fonctions, on serait sans doute tenté de s'écrier comme il le fait lui-même, au début de sa Préface : « Encore un Traité de Calcul différentiel et intégral! Était-il bien nécessaire? » Quand on a parcouru ce Traité, on est assuré qu'il sera au moins fort utile et qu'il ne ressemble pas aux autres Traités, même à ceux qui visent à peu près le même but. Les mêmes besoins se manifestent dans les différents pays et l'on est amené à y satisfaire à peu près de la même façon : dans presque toutes les Universités françaises on a créé des cours de Mathématiques spécialement destinés aux étudiants qui désirent se tourner vers les sciences physiques. Pour des raisons d'économie évidentes (peut-être pourrait-on en donner d'autres), il est désirable que ces cours soient aussi suivis par les étudiants en Mathématiques qui commencent leurs études. A la vérité, dans notre pays, ce besoin est moindre, à cause de la classe de Mathématiques spéciales par laquelle ont passé la plupart des étudiants en Mathématiques; il est évident dans les pays où cette classe n'existe pas, à moins que les étudiants ne soient assez nombreux pour qu'il y ait lieu de constituer des enseignements séparés.

C'est cette double catégorie d'étudiants, mathématiciens qui commencent et futurs physiciens ou chimistes, que M. Burkhardt a eue en vue : on le sent très préoccupé de donner à ceux-ci le nécessaire et seulement le nécessaire, de ne rien dire à ceux-là qui fausse leur jugement ou qui risque d'émousser leur sens critique. Pour ce qui est des physiciens, cela est trop clair, il ne peut être question de s'attarder à une exposition arithmétique de l'Analyse; mais, cette exposition, il faudra y venir pour les mathématiciens; il faut donc, sinon la préparer, au moins présenter les choses de façon à ne pas la gêner. M. Burkhardt rejette autant que possible les concepts qui, comme ceux de limite, sup-

posent qu'on ait introduit le nombre irrationnel. Ainsi, pour définir la dérivée, en se bornant, bien entendu, aux cas où cette définition s'appliquera, il suppose qu'on puisse mettre le rapport

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

sous une forme telle que la substitution de o à Δx ait un sens; c'est le résultat de cette substitution qui, par définition, est la dérivée $f'(x)$.

Cela revient à dire, au fond, qu'on définit la dérivée par le moyen qui sert à la calculer. Il est bien évident qu'une telle définition est rigoureuse; pour la compléter, il suffit de remarquer que la valeur du précédent rapport est aussi voisine qu'on le veut de la valeur de la dérivée, calculée comme on a dit, pourvu que Δx soit, en valeur absolue, suffisamment petit, en sorte que ce rapport, pour les petites valeurs de Δx, fournit une valeur approchée de la dérivée. Au fond, la difficulté de la notion de limite concerne le cas où l'on a affaire à un nombre qui est défini comme *limite*, non autrement; le commençant qui a l'esprit juste se demande alors quel est le sens du mot *limite*, et il est certain que ce sens ne peut être précisé qu'après l'introduction du nombre irrationnel; mais, quand on a la limite sous la main, il n'y a aucune difficulté à montrer que la différence entre cette limite et la variable est aussi petite qu'on le veut.

Je ne me suis permis d'insister sur ce sujet que pour montrer quels scrupules M. Burkhardt apporte dans l'exposition de ces matières et combien il y a réfléchi. Je trouve presque que ses scrupules vont trop loin; ainsi que je viens de le dire, il y a des cas où, même au point de vue de l'Analyse, on peut parler de limite à des commençants, de manière à être compris. La notion de limite est alors incomplète, sans doute; mais, parce qu'une notion est incomplète, son emploi n'est pas illégitime pour cela. D'ailleurs, sur l'image géométrique, les notions de limite et de continuité se traduisent d'une façon suffisamment claire pour que les erreurs ne soient pas à craindre : ce qu'il faut évidemment rejeter, ce sont les développements abstraits sur ces sujets. Il est inutile de dire que M. Burkhardt a le souci de la clarté et de la simplicité autant que de la rigueur.

Ne parlant pas de limites, il ne parlera évidemment pas de la convergence des séries. Bien entendu, il ne fera pas une théorie des séries en elles-mêmes, mais il parlera du développement en série de quelques fonctions; cela est indispensable, dans l'enseignement le plus élémentaire. La série, ou plutôt l'ensemble de ses premiers termes, constitue alors une expression approchée de la fonction; on est dans le cas que je signalais tout à l'heure, celui où l'on a la limite dans la main; il n'y a aucune difficulté à comprendre, sur des exemples simples, comment on peut remplacer une fonction compliquée par un polynome qui en fournit des valeurs très approchées, pour des valeurs de x comprises entre certaines limites; je crois d'autant plus que M. Burkhardt a raison de présenter les choses ainsi que cette conception de la série, essentielle au point de vue théorique, est vraiment celle qui importe au point de vue pratique, et qu'elle disparaît parfois de l'esprit d'étudiants, plus avancés que ceux auxquels s'adresse M. Burkhardt, sous l'encombrement des théorèmes abstraits, des règles de convergence, des formes du reste et des discussions minutieuses de ce reste.

Les applications sont traitées au moins avec autant de soin que la théorie. Les lois de la vitesse avec laquelle s'accomplissent certaines réactions chimiques fournissent une très bonne illustration des fonctions exponentielle et logarithmique et de l'intégration des fractions rationnelles. La nécessité de fixer, dans le moindre changement de variable, la signification des dérivées partielles, de bien distinguer les variables par rapport auxquelles on prend les dérivées et celles que l'on regarde comme constantes, est éclairée par la distinction entre les chaleurs spécifiques sous volume constant et sous pression constante.

On lira avec un vif intérêt les paragraphes consacrés à l'interpolation : le sujet est traité en réduisant au minimum les théories générales ; s'il s'agit, par exemple, de l'interpolation par la méthode des différences, M. Burkhardt se gardera bien de parler des formules générales que comporte cette théorie ; sur un exemple numérique qui n'est ni trop compliqué ni par trop simple, il montrera comment on peut faire les calculs; sur cet exemple, le lecteur saisira l'idée essentielle, et la façon de pratiquer quand les valeurs de la variable sont équidistantes.

Sur un exemple analogue, M. Burkhardt explique la méthode qu'a donnée Cauchy pour le calcul des coefficients quand le nombre des observations dépasse le nombre de ces coefficients, méthode qui est, sans doute, moins précise que la méthode des moindres carrés, mais qui est d'un emploi incomparablement plus aisé. C'est dans le même sens pratique qu'est présentée l'interpolation par les fonctions trigonométriques. Signalons enfin une Note, à la fin du Volume, où la détermination, au moyen de quatre observations, des quatre constantes A, B, λ, μ qui entrent dans une formule telle que

$$x = \mathrm{A}e^{-\lambda t} + \mathrm{B}e^{-\mu t}$$

est effectuée d'une manière fort élégante.

Le Livre de M. Burkhardt rendra les meilleurs services à une catégorie d'étudiants qui, chaque année, devient plus nombreuse, en raison même des besoins des industries scientifiques. Il sera certainement lu avec intérêt par ceux qui ont la charge de distribuer l'enseignement mathématique à ces étudiants.

MÉLANGES.

SUR LE THÉORÈME DE M. HADAMARD RELATIF AUX DÉTERMINANTS;

PAR M. WILLIAM WIRTINGER,
Professeur à l'Université de Vienne.

Désignons par a_{ik} l'élément complexe d'un certain déterminant D, et par $\overline{a_{ik}}$ la quantité imaginaire conjuguée de a_{ik}. M. Hadamard a établi (1) que le module du déterminant D est toujours inférieur ou égal à la racine carrée du produit des sommes des carrés des modules des lignes ou des colonnes du déterminant,

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVII, 1893, p. 240.

c'est-à-dire que l'on a, en désignant par $\overline{D}$ le déterminant des $\overline{a_{ik}}$,

$$D\overline{D} \leq \prod_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\overline{a_{ik}} \right).$$

Si les éléments a_{ik} sont tous réels, on peut dire que le déterminant exprime le volume d'un parallélépipède dans un espace à n dimensions, et le théorème signifie que, parmi les parallélépipèdes dont les arêtes ont des longueurs données, c'est le parallélépipède rectangle qui a le volume le plus grand. Si les éléments a_{ik} sont imaginaires, l'interprétation géométrique du théorème se présente moins aisément.

M. Hadamard a obtenu la démonstration de son théorème par une méthode purement arithmétique en employant le procédé de démonstration bien connu qui consiste à passer de n à $n+1$. La démonstration suivante est plus courte; il est vrai qu'elle emploie le calcul infinitésimal, mais elle comporte une généralisation du théorème pour les matrices. Comme le théorème de M. Hadamard joue un rôle essentiel dans la théorie de l'équation de Fredholm, cette démonstration ne paraîtra peut-être pas dépourvue d'intérêt.

Il suffira évidemment de démontrer le théorème en admettant que l'on ait

$$s_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\overline{a_{ik}} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

car, en divisant la $i^{\text{ième}}$ ligne de D par $\sqrt{s_i}$, on transforme précisément D en un déterminant pour lequel les conditions précédentes seront remplies, c'est-à-dire pour lequel les sommes s_i seront toutes égales à l'unité.

Cherchons donc la plus grande valeur du produit $D\overline{D}$ en tenant compte des conditions

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\overline{a_{ik}} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme, en vertu de ces conditions, les parties réelles et imaginaires des a_{ik} demeurent inférieures en valeur absolue à l'unité, on est assuré que le produit positif $D\overline{D}$ a réellement un maximum;

et, pour le trouver, il suffira évidemment d'appliquer la règle habituelle de Lagrange. Il n'est même pas nécessaire de mettre en évidence les parties réelles et imaginaires des a_{ik} et $\overline{a_{ik}}$; et l'on peut conserver ces quantités comme variables indépendantes, puisque les termes imaginaires disparaissent aussi bien dans le produit $D\overline{D}$ que dans les équations de condition.

Nous avons donc à former la différentielle totale de l'expression

$$D\overline{D} - \sum_{i,k} \lambda_i a_{ik} \overline{a_{ik}},$$

en considérant les λ_i comme constants.

Si l'on désigne par A_{ik}, $\overline{A_{ik}}$ les coefficients respectifs de $a_{ik}, \overline{a_{ik}}$ dans D et $\overline{D}$, on aura donc

$$\sum_{ik} (A_{ik}\overline{D} - \lambda_i \overline{a_{ik}})\, da_{ik} + \sum_{ik} (\overline{A_{ik}} D - \lambda_i a_{ik})\, d\overline{a_{ik}} = 0,$$

ce qui donne, en égalant à zéro les coefficients de chaque différentielle,

$$A_{ik}\overline{D} = \lambda_i \overline{a_{ik}},$$
$$\overline{A_{ik}} D = \lambda_i a_{ik}.$$

En vertu des conditions (1) et des relations identiques

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} a_{ik} = D,$$

on déduit d'abord des relations précédentes

(2) $$D\overline{D} = \lambda_i = \lambda.$$

Si l'on se sert en outre de la relation bien connue

$$(A_{ik}) = D^{n-1},$$

il vient encore

$$D^{n-1}\overline{D^{n-1}} = \lambda^n;$$

et, par suite, en tenant compte de la relation (2) et remarquant que λ ne peut être nul,

$$D\overline{D} = 1.$$

Ainsi, la plus grande valeur que puisse prendre le produit positif $D\overline{D}$ est l'unité, ce qui démontre le théorème de M. Hadamard.

On voit de plus que le maximum de $D\overline{D}$ ne peut être atteint que pour les déterminants qui satisfont aux conditions

$$A_{ik} = \overline{a_{ik}}\, D.$$

Dans le cas où les a_{ik} sont réels, ces conditions caractérisent les déterminants orthogonaux et, dans le cas où les éléments a_{ik} sont imaginaires, elles expriment que la forme d'Hermite à imaginaires conjuguées

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i \overline{x_i}$$

se transforme en elle-même si l'on soumet les variables x_i à la substitution (a_{ik}) et les variables $\overline{x_i}$ à la substitution conjuguée $(\overline{a_{ik}})$.

La méthode que nous venons d'employer s'applique sans modification aux matrices.

Considérons deux matrices

$$|\, a_{ik} \,| \quad |\, \overline{a_{ik}} \,|$$

imaginaires conjuguées formées de m colonnes $(k = 1, 2, \ldots, m)$ et de n lignes $(i = 1, 2, \ldots, n)^{m>n}$. Ce que l'on appelle *le produit des deux matrices* $|\, a_{ik} \,|$ $|\, \overline{a_{ik}} \,|$ est formé d'une somme de produits de déterminants conjugués

$$\sum D_h \overline{D_h}$$

formés en prenant n colonnes quelconques dans une des matrices et les colonnes correspondantes dans l'autre, et cela de toutes les manières possibles. Cela posé, on a l'inégalité

$$|\, a_{ik} \,|\, |\, \overline{a_{ik}} \,| = \sum D_h \overline{D_k} \leqq \prod_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} \overline{a_{ik}} \right).$$

En effet, la différentiation de l'expression

$$\sum_{(h)} D_h \overline{D_h} - \sum_{ik} \lambda_i a_{ik} \overline{a_{ik}}$$

nous donne ici

$$\sum_{(h)} \frac{\partial D}{\partial a_{ik}} \overline{D_h} - \lambda_i \overline{a_{ik}} = 0,$$

et, d'après cela, en tenant compte de l'équation

$$\sum_{k} a_{ik} \overline{a_{ik}} = 1,$$

on a

$$\lambda_i = \sum_{(h)} D_h \overline{D_h} = \lambda.$$

D'autre part, un théorème relatif aux matrices nous fournit la relation

$$\left| \sum_{h} \frac{\partial D_h}{\partial a_{ik}} \overline{D_h} \right| | a_{ik} | = \left(\sum_{h} D_h \overline{D_h} \right)^n \quad (i = 1, 2, \ldots, n ; k = 1, 2, \ldots, m),$$

et de là il résulte, comme précédemment,

$$\lambda = 1,$$

ce qui entraîne, sans autre développement, la démonstration pour le cas où les a_{ik} ne sont soumis à aucune condition.

Dans l'hypothèse où les éléments a_{ik} sont réels, la proposition relative aux matrices a, comme celle de M. Hadamard, l'interprétation géométrique la plus simple. Elle exprime que le volume du parallélépipède formé avec n vecteurs donnés dans un espace à m dimensions, $m > n$, est le plus grand possible quand ces vecteurs deviennent perpendiculaires les uns aux autres.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

HADAMARD. — *Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles.* In-8°, 40 p. avec fig. Paris, 119 *bis,* rue Notre-Dame-des-Champs.

MEYERHOFFER (W.). — *Gleichgewichte der Stereomeren,* mit einem Begleitwort von Prof. Dr J.-H. Van't Hoff und 28 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B.-G. Teubner, 1906. In-8°, II-71 pages.

DINI (U.) — *Lezioni di Analisi infinitesimale.* In-8°, 800 p. Pisa, Spoerri. 22 l.

FAUTH (P.). — *The Moon in modern Astronomy. A summary of 20 years selenographic work and a study of recent problems.* In-8°, 160 p. avec fig. London, Owen. 10 sh.

GORE (J.-E.). — *Astronomical essays, historical and descriptive.* Avec fig. In-8°, 352 p. London, Chatto. 6 sh.

HELMERT (F.-R.). — *Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik u. die Theorie der Messinstrumente.* 2e édition, gr. in-8°, XVIII-578 p. Leipzig, Teubner. Relié 15 m.

RICHERT (Paul). — *Die ganzen rationalen Funktionen der ersten drei Grade u. ihre Kurven. Exponentialreihen höherer Grade.* (Progr.) 77 p. avec 3 planches. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 1 m.

LORIA (G.). — *Vorlesungen über darstellende Geometrie.* Edition allemande par Fr. Schütte. 1re partie, XI-291 p. avec 163 fig. Relié 6 m. 80 pf. (*B.-G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenchaften m. Einschluss ihrer Anwendgn.* n° 25.) Leipzig, Teubner.

TIMPENFELD (P.) — *Tabellen der Quadrate von* 1 *bis* 10000, *Kuben von* 1 *bis* 2500, *Quadrat- u. Kubikwurzeln von* 1 *bis* 1000, *Kreisumfänge u. Inhalte von* 1 *bis* 1000. 4. Aufl. In-8°, 109 p. Dortmund, Krüger. Relié 3 m. 50 pf.

1re Partie –

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

The Scientific Papers of J.-WILLARD GIBBS, Ph. D., L. L. D., formerly Professor of mathematical Physics in Yale University. 2 vol. gr. in-8° avec portrait. Longmans, Green and C°, London, New-York et Bombay, 1906.

On a bien souvent opposé la forme impersonnelle de la découverte scientifique au caractère personnel de l'œuvre d'art. Peut-on entendre la *Sonate* à Kreutzer, peut-on lire la *Nuit de Décembre* sans éprouver le désir puissant, impérieux de *sympathiser* avec l'auteur, de partager les passions qui vibrent en ses accords ou chantent en ses vers? Et pour partager ces passions, ne faut-il pas les connaître? Pour les connaître, les analyser, ne faut-il pas remonter à leurs sources, savoir quels événements leur ont donné naissance, quelles épreuves les ont rendues si violentes, si douloureuses et leur ont arraché ces accents qui nous font tressaillir? Ainsi l'admiration pour l'œuvre d'art engendre en nous une très vive et très légitime curiosité de toutes les vicissitudes qui ont agité la vie de l'artiste.

Au contraire, la beauté d'une théorie d'Algèbre ou de Physique mathématique nous semble-t-elle plus parfaite, notre esprit en prend-il une conscience plus pénétrante lorsque nous lisons les dramatiques aventures qui ont bouleversé la courte vie d'un Galois ou la gracieuse idylle qui a environné de poésie la jeunesse d'un Ampère?

Il ne faudrait pas, cependant, attribuer une rigueur trop inflexible à cette opposition entre l'Art et la Science. N'y a-t-il pas des œuvres d'art qui ont l'impersonnalité impassible d'un théorème? Parmi les sentiments qui s'éveillent en nous lorsque nous contemplons les lignes harmonieuses du Parthénon ou de la Vénus de Milo, est-il possible de découvrir le moindre désir de partager les joies ou les douleurs de l'architecte ou du sculpteur? Et, d'autre

part, si la vérité d'une proposition scientifique, si la beauté d'une théorie nous charment par quelque chose d'absolu, que ne sauraient accroître ni la connaissance la plus détaillée de la vie de l'auteur, ni la pénétration la plus sympathique de ses sentiments, la forme que cette proposition a revêtue, l'ordre dans lequel cette théorie s'est développée n'ont-ils pas bien souvent leur origine et leur explication dans les tendances, dans les habitudes dont est fait le caractère personnel du mathématicien ou du physicien?

Que l'œuvre scientifique la plus abstraite et la plus algébrique puisse refléter cependant, comme un miroir fidèle, le tempérament de l'auteur, c'est une idée qui, sans cesse, s'est présentée à nous, tandis que nous parcourions les deux volumes où l'on a eu la très heureuse pensée de réunir les Mémoires de Josiah-Willard Gibbs; nous voudrions communiquer au lecteur quelques-unes des réflexions qui se sont, en notre esprit, groupées autour de cette idée.

I.

En 1658, Robert Gibbs quittait l'Angleterre et venait s'établir à Boston; il était le quatrième fils de sir Henry Gibbs, de Honington (Warwickshire); il apportait sans doute, dans sa nouvelle patrie, ce culte du passé, cet amour de la stabilité qui, chez les Anglo-Saxons, se concilient avec l'audace aventureuse du colon; en effet, tout ce que nous savons de l'histoire de ses descendants nous montre en eux des hommes respectueux de la continuité, désireux de vivre où leurs pères ont vécu, d'une vie toute semblable à celle qu'ils leur ont vu mener.

En 1747, un petit-fils de Robert Gibbs, Henry, épouse la fille de Josiah Willard, secrétaire de la province de Massachusetts; et, dès lors, les prénoms de Josiah-Willard deviennent fréquents parmi les descendants d'Henry Gibbs.

Cet attachement aux prénoms déjà portés par les ancêtres ne révèle pas seul l'esprit traditionnel de la famille; nous relevons des marques de cet esprit dans le goût pour la culture intellectuelle qui s'y transmet de père en fils et que la même Université vient consacrer à chaque génération; le président Samuel-Willard Gibbs est *gradué* du Harvard College; son fils, Josiah-Willard, l'est

également, et il en est de même du fils, du petit-fils et de l'arrière-petit-fils de Josiah-Willard.

De cette lignée ininterrompue de cinq gradués de Harvard College naît un nouveau Josiah-Willard Gibbs, et ce dernier sera le père du physicien. Ce Josiah Willard Gibbs rompt avec l'usage qui s'était établi chez ses ancêtres, car c'est au Yale College de New-Haven, dans l'État de Connecticut, qu'il vient prendre ses grades universitaires; désormais, sa vie et celle de son fils vont être indissolublement liées à ce collège.

Josiah-Willard Gibbs, en effet, enseigne pendant trente-sept ans (1824 à 1861) la littérature sacrée à la Yale Divinity School. Professeur d'une rare modestie, travailleur d'une méticuleuse conscience, il épouse Mary-Anna Van Cleve, de Princeton (New-Jersey), qui, parmi ses ascendants, compte deux gradués du Yale College; de ce mariage naissent d'abord trois filles, puis, le 11 février 1839, un fils qui reçoit, lui aussi, les prénoms de Josiah-Willard.

En 1854, Gibbs commence au Yale College des études où nous le voyons briller tout particulièrement en Latin et en Mathématiques; il est gradué en 1858; pendant cinq ans, il continue à New-Haven des études qui le conduisent au doctorat en Philosophie; il est alors attaché comme *tutor* au Yale College, pour une durée de trois ans; de ces trois années, les deux premières sont consacrées à l'enseignement du Latin et la troisième à l'exposition de la Philosophie naturelle (Physique).

Son tutorat achevé, Gibbs, en compagnie de ses sœurs, entreprend un voyage en Europe. Il passe l'hiver de 1866-1867 à Paris; il se rend ensuite à Berlin, où il entend les leçons de Physique de Magnus; en 1868, il est à Heidelberg dont, à ce moment, l'Université compte Helmholtz et Kirchhoff au nombre de ses professeurs; enfin, en juin 1869, il rentre à New-Haven. L'année suivante, il est nommé professeur de Physique mathématique au Yale College.

La vie de Josiah-Willard Gibbs est désormais fixée; elle va s'écouler paisible en des jours tous pareils; cette chaire de Physique mathématique, Gibbs l'occupera jusqu'à sa mort; cette ville de New-Haven, il ne la quittera plus, sinon pour goûter chaque année, au moment des vacances, la grande paix des montagnes.

A son retour d'Europe, il était rentré en la maison que son père avait fait construire peu d'années après la naissance de son fils; en cette maison, à quelques pas de l'école où il a fait ses premières études, à quelques pas du collège dont il a été élève et *tutor*, où il donne maintenant ses savantes leçons, il va passer les trente-trois années qui lui restent à vivre.

Gibbs ne s'était pas marié, mais une de ses sœurs, avec sa famille, occupait en même temps que lui la maison paternelle. Une violente attaque de fièvre scarlatine, subie dans son enfance, lui avait laissé une constitution assez frêle; mais une minutieuse attention aux soins que réclamait sa santé, une existence d'une extrême régularité éloignèrent de lui toute maladie capable d'interrompre sérieusement le cours de son travail; une indisposition de quelques jours seulement précéda sa mort, survenue le 28 avril 1903.

Minutieusement, Gibbs écartait de lui tout ce qui aurait pu créer la moindre agitation en sa paisible existence; il avait fui les relations du monde; en cette petite ville de New-Haven, peu de personnes le connaissaient, hormis ses collègues ou ses élèves de l'Université; ceux-là seuls étaient admis à jouir de sa conversation, d'une affabilité extrême, où le grand physicien se montrait tour à tour génial ou naïf, sans qu'aucune impatience, aucune irritation, vînt jamais passionner son discours.

Le calme absolu de la demeure où s'écoulaient ses jours, du milieu au sein duquel il vivait, n'était que l'image du calme qu'il avait réalisé en lui-même. La seule passion qui soit capable de dérober au penseur la pleine possession de son génie, l'ambition, n'avait aucun accès dans l'âme de Gibbs. Tous ceux qui l'ont approché sont unanimes à célébrer sa parfaite modestie, parfaite par le degré extrême qu'elle atteignait, parfaite aussi par l'entière sincérité, par l'absence de toute affectation qui transparaissait en elle. Les plus hautes, les plus flatteuses distinctions des académies n'amenaient même pas un tressaillement de vanité à la surface de cette âme unie et limpide comme un beau lac. « Il réalisait presque, nous dit son biographe [1], l'idéal de l'homme désintéressé, du gentleman chrétien. »

---

[1] Une étude biographique sur Josiah-Willard Gibbs, étude à laquelle sont empruntés tous les détails qu'on vient de lire, a été publiée par M. H.-A. Bum-

En cette Amérique du XIX[e] siècle, qui nous apparaît brûlante d'une fiévreuse activité, dévorée par la soif de l'or, n'est-ce pas un spectacle bien surprenant, mais bien digne d'admiration, que cette vie de Gibbs, vie toujours égale à elle-même, pure de tout ce qui trouble la paix intellectuelle et morale, consacrée tout entière à la méditation du vrai, plus calme que la vie même de Kant en sa petite ville de Kœnigsberg? A ce spectacle, notre pensée, remontant le cours des âges, se reporte au XIII[e] siècle; tandis que l'air retentit du fracas des armures heurtées, des cris de guerre, des clameurs des massacres, un moine méditatif, dans le religieux silence d'une cellule gothique, développe en syllogismes d'une rigueur minutieusement éprouvée une thèse très abstraite et très haute de Philosophie première.

II.

Pour définir le caractère de Gibbs, son biographe le qualifie ainsi : *of a retiring disposition*. La *concentration*, telle paraît être, en effet, la marque essentielle de sa physionomie intellectuelle et morale.

Tout ce qui est besoin de rayonner, désir de sortir du lieu que l'on occupe, lui est inconnu; il ne quitte jamais sa ville natale, il demeure jusqu'à sa mort en la maison paternelle; étudiant ou professeur, il reste toujours attaché à la même Université; il restreint extrêmement le cercle de ses amis, il ne souhaite pas que la renommée fasse connaître au loin son nom et sa réputation scientifique; sa vie morale, comme sa vie physique, est exempte de toute tendance à se répandre au dehors; bien plutôt, elle s'efforce de se condenser, toujours plus étroitement, autour d'un centre où elle puisse trouver le repos absolu dans une parfaite unité.

La même loi domine sa vie intellectuelle.

Cette fièvre qui fait bouillir et fermenter l'idée nouvelle dans le cerveau de l'inventeur, qui la rend impatiente de se répandre et de se communiquer, qui la lance, encore trouble et mal épurée,

---

stead dans l'*American Journal of Science* et reproduite en tête du premier volume des *Scientific Papers* of J.-WILLARD GIBBS.

dans le torrent de la discussion, qui précipite ses flots tumultueux et irrités à l'assaut des contradictions; ce tourbillon où roulent pêle-mêle les vues géniales et les lourdes méprises, les divinations heureuses et les repentirs pénibles, les ambitions triomphantes et les espoirs déçus, toute cette agitation et tout ce désordre sont étrangers au calme parfait qui règne en l'esprit de Gibbs. En ses paisibles méditations, l'idée se développe, se perfectionne, atteint sa maturité sans que rien la presse de quitter les secrètes profondeurs du génie au sein duquel elle est née.

Comme il n'éprouve aucune hâte à produire sa découverte, Gibbs ne s'impatiente pas contre les causes qui en peuvent retarder l'achèvement; la préparation minutieuse de ses leçons, les conseils qu'un étudiant vient lui demander, les mille petits devoirs qu'entraîne sa charge de professeur ne souffrent jamais de la recherche qu'il poursuit.

Cette recherche, il la poursuit dans le complet isolement de toute influence extérieure. Bon nombre d'inventeurs aiment à livrer à leurs interlocuteurs le secret des pensées qui s'élaborent en eux; la conversation d'autrui leur est un précieux stimulant; la critique, si humble soit-elle, leur semble toujours profitable. Gibbs n'a nul besoin de ces secours; il ne les désire pas; jamais il ne parle du travail qu'il poursuit; jamais il ne livre aucun essai, aucun résultat provisoire. Une foule de professeurs aiment à exposer devant leurs élèves une œuvre encore inachevée; cette sorte de publication orale est, pour leur futur livre, une sorte de première édition, qu'ils corrigeront, retoucheront et refondront avant de livrer leur écrit à l'imprimeur; Gibbs ne prend jamais pour sujet de ses cours le Mémoire ou le Traité qu'il compte publier plus tard; ou, du moins, s'il fait une exception à cette règle, s'il professe ses *Principes de Mécanique statistique* nombre d'années avant de les publier, c'est que l'œuvre était déjà achevée et qu'il n'y devait plus apporter que de légères retouches.

Les élèves de Gibbs ne pouvaient donc, en écoutant ses cours, apprendre comment une découverte s'ébauche, par quelle suite de reprises, de modifications, de reconstructions, elle se transfigure peu à peu jusqu'au moment où elle atteint sa forme définitive; mais, s'ils ne recevaient point de leur maître cet enseignement par l'exemple, qui est en quelque sorte l'apprentissage de l'homme

de science, ils pouvaient du moins, en ses leçons comme en sa vie, contempler le culte sévère que l'on doit à la vérité.

Des fruits produits par ses méditations, Gibbs n'en voulait livrer aucun à la publicité qui ne lui semblât achevé et irréprochable; et le jugement qu'il portait sur son œuvre avant de la laisser imprimer, il le portait avec la critique pénétrante et sévère que l'on réserve ordinairement à l'œuvre d'autrui.

Il ne voulait donner aucun écrit qui ne fût absolument original et personnel.

La théorie des vecteurs, par exemple, a fait, pendant de longues années, l'objet de ses recherches; il lui avait donné une forme nouvelle, issue à la fois de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann et de la théorie des quaternions d'Hamilton; l'usage continuel de cette forme dans son enseignement lui en avait fait reconnaître la très grande utilité. Les élèves qui avaient éprouvé par eux-mêmes les avantages de cette méthode ne purent jamais décider leur maître à publier les leçons en lesquelles il l'exposait; ce n'est pas, cependant, qu'elles n'eussent atteint une forme achevée et définitive; mais plusieurs d'entre elles reproduisaient, au moins dans leurs grandes lignes, l'œuvre des prédécesseurs de Gibbs, et celui-ci ne pouvait se résoudre à donner sous son nom un livre où sa propre part lui semblait trop mince; c'est seulement en 1901, à l'occasion du second centenaire du Yale College, que Gibbs voulut bien autoriser un de ses disciples, le Dr E.-B. Wilson, à publier son traité d'Analyse vectorielle (1).

Peu soucieux de publier ses idées, désireux de ne les point publier avant leur complet achèvement, Gibbs ne mit aucune hâte à débuter comme auteur scientifique; il avait 34 ans lorsque parut son premier Mémoire, consacré à l'emploi des méthodes graphiques en la Thermodynamique des fluides. Ses écrits, fort courts pour la plupart, se succédèrent à d'assez longs intervalles; chacun d'eux, avant d'être mis au jour, avait acquis lentement sa complète maturité. L'œuvre entière du grand physicien se trouve

(1) *Vector Analysis*, a text book for the use of students of Mathematics and Physics, founded upon the lectures of J.-Willard Gibbs, by E.-B. Wilson. Yale bicentennial Publications. C. Scribner's sons, 1901. — Une analyse de cet Ouvrage a paru ici même (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXVI, année 1902, 1re Partie, p. 21-30).

ainsi d'un volume fort réduit; mais la pensée y est condensée à un degré extraordinaire.

Lorsqu'il s'était déterminé à faire imprimer les résultats de l'une de ses études, Gibbs ne cherchait nullement à leur assurer une diffusion rapide et étendue; les grands recueils scientifiques, grâce auxquels une pensée est bientôt communiquée à tous ceux qui sont capables d'en faire bon usage, n'eurent pas à transmettre les découvertes du professeur de Yale College; ces découvertes, il les confia presque toujours à des recueils américains d'une moindre vogue, comme s'il eût éprouvé quelque regret de leur avoir donné libre vol; ses premiers Mémoires de Thermodynamique et, en particulier, son grand travail *Sur l'équilibre des substances hétérogènes* parurent dans les *Transactions,* bien peu répandues, que publiait, depuis peu, à New-Haven, l'Académie des Arts et des Sciences du Connecticut.

Il semble parfois qu'en publiant ses travaux, Gibbs eût été possédé du désir de les voir passer inaperçus; s'il en fut ainsi, il fut bien souvent servi à souhait; bien souvent, ses idées demeurèrent ignorées de ceux-là mêmes qui auraient eu le plus grand intérêt à les connaître.

Le Mémoire à jamais célèbre que le savant américain a intitulé *On the equilibrium of heterogeneous substances* avait été imprimé, en 1876 et en 1878, dans le troisième Volume des *Transactions* de l'Académie de Connecticut. En 1882, H. von Helmholtz inaugurait, dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Berlin, la suite de ses recherches *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge;* en sa première pièce, le grand physicien allemand exposait bon nombre de propositions qui se trouvaient déjà formulées dans l'écrit de Gibbs; mais, ignorant cet écrit, il avait dû inventer à nouveau ce que le professeur du Yale College avait trouvé avant lui; il s'empressa d'ailleurs de reconnaître [1], lorsqu'il en eut été averti, la priorité de l'auteur de l'*Equilibrium of heterogeneous substances*.

La mésaventure de Helmholtz fut celle de bon nombre d'autres

(1) H. von Helmholtz, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge; III. Folgerungen die galvanische Polarisation betreffend* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 31 mai 1883. — Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. III, S. 94).

physiciens; inconnus en Europe, ou connus seulement par les résumés fort incomplets qu'en avaient donnés les recueils bibliographiques, les écrits thermodynamiques de Gibbs n'eurent pas sur le développement de la Mécanique chimique toute l'influence qu'ils auraient dû exercer. Lorsque ces écrits furent plus connus, par l'édition allemande que M. W. Ostwald en donna (1) en 1892, par la traduction française de certains Chapitres particulièrement importants que M. Henry Le Chatelier publia (2) en 1899, force fut de reconnaître que bon nombre de vérités dont on avait célébré l'invention récente se trouvaient déjà établies dans des pages imprimées à New-Haven depuis plusieurs années.

Bien que ses droits à la priorité d'une découverte eussent été maintes fois méconnus, Gibbs n'élevait ordinairement aucune réclamation; il semblait qu'il ne regardât plus comme sienne la pensée qu'il avait livrée à la publicité et qu'il se désintéressât de son sort.

Une seule fois, il sortit de cette excessive réserve. L'*Association britannique* avait créé dans son sein un Comité destiné à promouvoir l'étude de l'électrolyse. Ce Comité avait repris la discussion d'un problème dont Edmond Becquerel, William Thomson et Helmholtz avaient autrefois proposé une solution incomplète; ce problème consiste à déterminer la relation qui existe entre la chaleur que peut dégager une réaction chimique et la force électromotrice de la pile voltaïque au sein de laquelle cette réaction se produit. A Sir Oliver Lodge, secrétaire de l'*Electrolysis Committee*, Gibbs écrivit deux courtes lettres (3) où il rappelait que la solution complète de ce problème se trouvait dans les dernières pages de son écrit *Sur l'équilibre des substances hétérogènes*, où il montrait en outre comment cette solution permettait d'obtenir la remarquable formule plus récemment donnée par Helmholtz. Encore ces deux lettres ne ressemblaient-elles aucu-

(1) J.-Willard Gibbs, *Thermodynamische Studien*, herausgegeben durch W. Ostwald und G. Trevor, Leipzig, 1892.

(2) J.-Willard Gibbs, *Équilibre des systèmes chimiques*, traduit par Henry Le Chatelier, Paris, 1899.

(3) J.-Willard Gibbs, *Two letters to the Secretary of the Electrolysis Committee of the British Association for the Advancement of Science*, January 8, 1887 and november 21, 1887. (*The Scientific Papers of* J.-Willard Gibbs, Vol. I, p. 406-412).

nement à la réclamation d'un inventeur qui revendique ce qu'on oublie injustement de lui attribuer; elles étaient bien plutôt l'obligeant avertissement de celui qui a déjà trouvé la vérité et qui veut épargner un labeur inutile à ceux qui cherchent encore.

III.

La pensée scientifique de Gibbs, si peu soucieuse de se répandre, mérite bien, elle aussi, la qualification que M. H.-A. Bumstead applique à l'homme lui-même; elle est *of a retiring disposition;* elle tend sans cesse à se condenser, à se concentrer.

Cette tendance à la condensation se marque, tout d'abord, dans l'extrême concision du style par lequel s'exprime cette pensée, dans l'extrême brièveté des écrits où elle se trouve renfermée plutôt qu'exposée.

S'il est une langue d'une admirable concision, c'est assurément la langue algébrique; il n'est pas besoin de dire que cette langue, capable de concentrer tant de pensées en des formules si courtes, est la langue préférée de Gibbs.

En 1886, il est vice-président de l'*Association américaine pour l'avancement des Sciences;* son adresse à la section de Mathématiques et d'Astronomie est consacrée à l'Algèbre ([1]), et voici en quels termes il caractérise cette discipline : « On a dit que l'esprit humain n'avait jamais imaginé une machine qui fût, au même degré que l'Algèbre, capable de lui épargner le travail. Si cela est vrai, il est naturel, il est convenable qu'un âge comme le nôtre, que caractérise le développement d'un machinisme destiné à épargner le travail humain, se distingue aussi par le développement, sans exemple jusqu'alors, de la plus délicate et de la plus admirable des machines. »

Gibbs est donc essentiellement algébriste.

Il l'est alors même qu'on pourrait s'attendre à le trouver géomètre. Dans les deux Mémoires où il étudie les divers diagrammes propres à représenter les propriétés thermodynamiques des fluides

([1]) J.-WILLARD GIBBS, *On multiple Algebra* (*Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, t. XXV, 1886, p. 36-66. — *The Scientific Papers of* J.-WILLARD GIBBS, vol. II, p. 91).

et de leurs transformations, les démonstrations géométriques ne jouent à peu près aucun rôle; c'est par des considérations d'Analyse algébrique que sont établies la plupart des propriétés de ces diagrammes.

La concision, la condensation de l'Algèbre souffrent elles-mêmes des degrés.

Les antiques formes algorithmiques employées par les mathématiciens du XVIIe et du XVIIIe siècle semblent singulièrement développées et prolixes auprès des calculs symboliques qui ont été inventés et perfectionnés au XIXe siècle. En l'ancienne Algèbre, chacune des opérations simples est représentée par un signe particulier, en sorte que le nombre de ces signes est petit; lorsqu'une grandeur doit subir une série compliquée d'opérations simples, les signes relatifs à ces opérations viennent tous s'écrire les uns à la suite des autres; les formules qui résultent de cette méthode peuvent être lues sans grand effort de mémoire, mais elles sont parfois fort longues. Les Algèbres nouvelles figurent par un symbole unique un groupe déjà fort complexe d'opérations; elles évitent ainsi les interminables écritures de l'ancienne Analyse; en revanche, leurs signes nombreux, dont les combinaisons se font suivant des règles compliquées et difficiles, ne se laissent point lire couramment à qui n'a, pour le maniement des caractères symboliques, qu'une aptitude médiocre.

Entre l'Algèbre cartésienne, aux formules développées, aux calculs étendus et faciles à saisir, et l'Algèbre concentrée de l'*Ausdehnungslehre* et des quaternions, la préférence de Gibbs ne saurait être douteuse. Les tendances dominantes de son esprit devaient le porter à user d'un langage, peu propre, il est vrai, à assurer la diffusion d'une pensée, mais capable de condenser un calcul difficile en quelques signes d'une merveilleuse concision.

Gibbs semble, en effet, avoir cultivé l'Algèbre vectorielle avec un véritable amour. Chaque année, il la traitait en ses leçons, retouchant sans cesse l'exposé qu'il en donnait et l'amenant enfin à cette perfection que la publication faite par M. Wilson nous permet d'apprécier.

Il fallait que cet amour fût bien vif pour que le professeur de New-Haven ait consenti à soutenir une longue polémique en faveur

de la méthode qu'il croyait la plus propre à l'exposition de l'Analyse des vecteurs; au cours de cette polémique qui se poursuivit de 1891 à 1893 dans les colonnes du journal anglais *Nature,* Gibbs ne se départit pas un instant de la sereine impartialité qui sied si bien à une discussion scientifique; ses adversaires cependant, partisans intransigeants de la méthode des quaternions, ne gardaient pas toujours les mêmes ménagements; il suffit, pour s'en convaincre, de lire la phrase par laquelle Tait avait provoqué l'algébriste américain : « On doit ranger le professeur Gibbs au nombre de ceux qui ont retardé le progrès du quaternion, et cela par suite de son Mémoire sur la *Vector Analysis,* sorte de monstre hermaphrodite, produit des notations d'Hamilton et de celles de Grassmann. »

La faveur que Gibbs attachait à l'Analyse vectorielle n'était pas due seulement à l'extrême brièveté que l'emploi de cette Algèbre donne aux formules de la Physique mathématique; il y reconnaissait un autre pouvoir de condensation, d'une nature plus élevée; et c'est ce pouvoir qu'il admirait surtout en elle, car il y trouvait le moyen de satisfaire aux aspirations les plus profondes de son génie scientifique; l'Analyse vectorielle, en effet, réunit en un très petit nombre de principes une multitude de théorèmes que l'Algèbre ordinaire est tenue de considérer isolément les uns des autres. « Je ne désire pas tant, disait le professeur de New-Haven en terminant son adresse sur l'*Algèbre multiple* (1), appeler votre attention sur la diversité des applications de l'Algèbre multiple que sur la simplicité et l'unité de ses principes. Celui qui étudie l'Algèbre multiple se trouve tout à coup délivré des restrictions variées auxquelles il était accoutumé. Pour beaucoup, sans doute, une telle liberté semble une invitation à la licence. Nous sommes ici en un champ sans borne, où le caprice peut se donner libre cours. Il n'est pas étonnant qu'on suive avec une attention quelque peu méfiante le résultat d'une telle expérience. Mais, plus nous avançons en ce domaine, plus il nous apparaît avec évidence qu'il est, lui aussi, un royaume soumis à des lois. Plus nous étudions ce sujet, et mieux nous reconnaissons que tout ce qui s'y trouve d'utile et d'admirable se relie à un petit nombre de principes centraux. »

(1) *The Scientific Papers of* J. WILLARD GIBBS, vol. II, p. 117.

Par une concentration progressive, réduire la multiplicité à une unité toujours plus parfaite, telle est assurément la démarche habituelle et préférée de l'esprit de Gibbs.

IV.

Lorsque la Thermodynamique veut appliquer ses principes aux changements d'état physique que les corps peuvent subir, aux réactions chimiques auxquelles ils peuvent donner lieu, parmi les propriétés, en nombre immense, que possèdent ces diverses substances, elle choisit quelques grandeurs, très abstraites et très générales : la densité, la pression, la température, la concentration, la quantité de chaleur; ces grandeurs sont les seules qu'elle considère en ses raisonnements, les seules qu'elle fasse figurer en ses formules; des autres propriétés, plus particulières, qui caractérisent chaque substance, qui lui donnent sa physionomie individuelle, elle ne tient et ne peut tenir aucun compte.

Ces grandeurs, qui sont l'unique objet des spéculations de la Thermodynamique, le chimiste les rencontre, lui aussi, et à chaque instant, au cours de ses recherches; mais elles n'y sont pas isolées des propriétés innombrables que la Mécanique tient pour inexistantes; elles s'y trouvent à l'état concret, en des corps particuliers, où elles s'accompagnent de tout un cortège d'attributs et de qualités sensibles.

Lors donc que le chimiste, habitué à manipuler des corps, à observer des faits, et non pas à combiner des symboles algébriques, est mis en présence d'une formule produite par la Thermodynamique, il ne reconnaît point aisément, en ces lettres qui composent la formule, les propriétés des corps qu'il voit chaque jour réagir dans les vases de verre de son laboratoire; il ne les reconnaît pas, parce qu'elles ont dépouillé les caractères concrets, particuliers, visibles et tangibles dont, ordinairement, il les voit revêtues; il ne les reconnaît pas parce qu'elles ont pris la forme abstraite et générale d'idées pures, la forme symbolique de grandeurs mathématiques.

Si l'on veut que le chimiste les reconnaisse, si l'on veut que la formule thermodynamique lui devienne saisissable, si l'on veut

qu'il en puisse faire l'application aux réactions qu'il étudie, il faut obliger ces grandeurs à reprendre, pour un moment, l'état concret et particulier à partir duquel elles ont été abstraites et généralisées; il faut faire sortir de la formule quelques-uns des cas singuliers, en nombre infini, qu'implique son universalité; il faut *en donner des exemples*.

De même que l'intelligence de Gibbs n'éprouve aucun désir de produire au dehors les pensées diverses qu'elle a concentrées en elle, de même les formules algébriques du professeur de New-Haven gardent, en toute pureté, leur caractère abstrait et général; il semble qu'elles répugnent à mettre en acte les cas particuliers qui existent virtuellement en elles. Qu'on parcoure ce Mémoire *Sur l'équilibre des substances hétérogènes* où se trouvent, en leur entière généralité, les lois thermodynamiques de la Statique chimique; on n'y rencontrera pas une application, pas un exemple, qui rende à tous ces théorèmes la figure sous laquelle l'expérimentateur pourrait reconnaître des vérités capables d'éclairer et de guider son labeur. Au lecteur non prévenu, cet écrit paraît traiter d'Analyse mathématique et non point de Physique et de Chimie. Lorsqu'un scribe, au Moyen Age, rencontrait en un manuscrit un assemblage de caractères dont il n'avait pas la clef, il mettait, en sa naïve copie : *Græcum est, non legitur*. Lorsqu'il aperçoit, au livre de Gibbs, cette foule de symboles abstraits dont aucune traduction ne lui est donnée en la langue qu'il a accoutumé de parler, le chimiste est tenté de dire : *Algebraïcum est, non legitur*.

Heureusement pour l'œuvre de Gibbs, il s'est rencontré des chimistes mathématiciens, et qui savaient lire l'Algèbre; grâce à eux, les formules du professeur de New-Haven ont été traduites et leur sens concret s'est manifesté aux yeux des expérimentateurs.

Le Mémoire *Sur l'équilibre des substances hétérogènes* renferme un Chapitre, assez court, qui est intitulé : *On coexistent phases of matter* (*Sur les phases coexistantes d'une matière*). Le chimiste qui feuillette ce Mémoire va-t-il arrêter son attention à un tel Chapitre? Qu'est-ce donc qui pourrait l'y inviter? Et, s'il lui arrivait de le lire, qu'y verrait-il qui lui semblât susceptible d'aider à ses recherches? Il n'y apercevrait que quelques égalités algébriques assez compliquées, quelques déterminants dont les

termes sont des entropies, des volumes, des concentrations; les propositions auxquelles équivalent ces égalités ne sont même pas formulées; d'ailleurs, parmi les mots qui figurent dans les raisonnements et qui devraient servir à formuler ces propositions, se rencontre tout d'abord ce terme de *phase* qui a ici un sens absolument nouveau et inusité; il est défini, il est vrai, au début du Chapitre, mais d'une manière entièrement abstraite et générale, et sans qu'aucun exemple vienne éclaircir cette définition. A coup sûr, le chimiste passera insouciant devant ce Chapitre, sans songer qu'il s'y trouve des renseignements précieux pour la Science qu'il cultive; il passera semblable au voyageur qui, d'un pied négligent, heurterait un caillou, sans songer qu'une pépite d'or se cache au centre de cette pierre grise et vulgaire.

Le Chapitre de Gibbs *Sur les phases coexistantes de la matière* était déjà imprimé depuis près de dix ans au moment où un chimiste hollandais, H.-W. Bakhuis Roozeboom, aborda l'étude des équilibres chimiques qui se produisent lorsque l'eau et l'acide bromhydrique sont en présence. Ces équilibres sont fort compliqués, car les deux corps composants peuvent fournir des mélanges gazeux, des mélanges liquides, des solides tels que la glace ou l'hydrate bromhydrique cristallisé. Avec une rare sagacité, Bakhuis Roozboom avait déjà débrouillé en très grande partie les lois qui régissent les divers états d'équilibre entre ces corps, lorsqu'un physicien illustre, également habitué aux études expérimentales et au maniement des formules algébriques, M. J.-D. van der Waals, lui signala [1] le travail de Gibbs et appela son attention sur les propositions qui s'y trouvaient contenues.

M. van der Waals et Bakhuis Roozeboom venaient, du sein des formules algébriques de Gibbs, d'exhumer la *règle des phases*. Aussitôt, avec une extrême activité, Roozeboom s'occupait de montrer, en de nombreux Mémoires, quel ordre cette règle mettait en la Statique chimique, particulièrement en ses recherches et en celles de M. J.-H. Van't Hoff; il en donnait de nouvelles et remarquables applications; autour de lui, les jeunes chimistes de l'Université de Leyde, les Stortenbeker, les Schreinemakers, munis du

---

[1] H.-W. Bakhuis Roozeboom, *Sur les conditions d'équilibre de deux corps dans les trois états solide, liquide et gazeux, d'après M. van der Waals* (*Recueil des Travaux chimiques des Pays-Bas*, t. V, 1886, p. 351).

fil conducteur que leur fournissait la règle des phases, s'aventuraient dans les labyrinthes les plus compliqués de la Statique chimique; plus tard, la même audace s'emparait des élèves du laboratoire d'Amsterdam, après que Roozboom y eut remplacé Van't Hoff; et celui-ci, de son côté, faisait triompher la règle des phases à Berlin, avec ses admirables travaux sur les dépôts salins de Stassfurt; en moins de vingt années, les idées que contenaient les formules du professeur de New-Haven avaient prodigieusement accru et transformé ce que les chimistes avaient connu jusque-là des alliages et des mélanges isomorphes; par suite, elles avaient révolutionné les théories de la Métallurgie et de la Minéralogie.

M. Le Chatelier a pu dire avec justice que Gibbs, en créant la loi des phases, avait rendu à la Chimie un service comparable à celui que lui avait rendu Lavoisier lorsqu'il avait formulé la loi de conservation du poids; mais notre légitime admiration pour le mathématicien de New-Haven, qui avait enveloppé une précieuse pépite sous la rude écorce de ses formules algébriques, ne doit pas nuire à notre gratitude envers les deux chimistes hollandais qui ont brisé la gangue et fait éclater à tous les yeux les reflets du pur métal.

M. van der Waals avait fait preuve d'une remarquable perspicacité en discernant la règle des phases parmi les formules algébriques où Gibbs l'avait en quelque sorte cachée. Cette même perspicacité servit heureusement, en d'autres circonstances, le savant physicien hollandais; lorsqu'il entreprit d'étudier les lois qui président à la liquéfaction d'un mélange de deux gaz, c'est au célèbre Mémoire du professeur de New-Haven (1) qu'il emprunta la notion d'état critique d'un tel mélange; c'est une des fonctions définies en ce Mémoire, la fonction ψ, qu'il représenta par une surface dont l'étude n'a cessé, depuis ce temps, de solliciter les efforts des physiciens de Leyde et d'Amsterdam.

Mais, si M. van der Waals fut assez clairvoyant pour découvrir quelques-unes des idées qui se trouvaient en germe dans les équations de Gibbs, s'il eut l'habileté de leur faire produire les découvertes expérimentales qu'elles renfermaient en elles, combien de graines semblables sont demeurées stériles parce qu'aucun physi-

(1) *The Scientific Papers of* J.-WILLARD GIBBS, vol. I, p. 129-134.

cien, aucun chimiste, ne les a aperçues sous l'enveloppe algébrique qui les dissimulait ! La fécondité dont elles étaient douées a été reconnue trop tard, lorsque les découvertes qu'elles impliquaient s'étaient depuis longtemps développées sans leur rien emprunter.

Ainsi, en 1881, à l'aide de l'expérience et de quelques raisonnements, M. Konovalow découvrait les lois fondamentales de ce qu'on devait nommer plus tard l'*état indifférent* d'un système bivariant; or, dès 1876, Gibbs avait énoncé ces lois, en trois lignes [1], dans son Mémoire *Sur l'équilibre des substances hétérogènes*.

En 1885, M. J.-H. Vant' Hoff montrait le rôle important que la considération des parois semi-perméables et de la pression osmotique devait jouer dans l'étude des dissolutions; il établissait, en outre, de saisissantes analogies entre les lois relatives aux solutions très diluées et les lois qui régissent les gaz parfaits; or, à son insu, il n'avait fait que retrouver des résultats découverts et publiés [2] dès 1876 par le professeur du Yale College.

Nous pourrions multiplier les exemples semblables à ceux que nous venons de citer; sans lasser le lecteur par cette longue discussion relative à des questions de priorité, nous pouvons, croyons-nous, formuler cette double conclusion : La plus grande partie de la Statique chimique actuelle se trouvait déjà dans les équations que Gibbs avait établies en ses divers Mémoires de Thermodynamique; cependant, cette Statique chimique a été presque entièrement découverte hors de l'influence du savant américain; les chercheurs qui l'ont retrouvée n'avaient pas reconnu la portée de l'œuvre composée par le savant algébriste de New-Haven.

Si Gibbs a laissé à son œuvre cette forme algébrique, si mystérieuse pour le chimiste, si peu capable de lui transmettre les idées qu'elle recèle, c'est, dira-t-on peut-être, par gaucherie de mathématicien pur, ignorant de la science d'observation, inhabile à trouver dans la foule des lois expérimentales celles qui pourraient illustrer ses équations. Le croire serait se tromper et Gibbs a pris soin, en quelque sorte, de nous prémunir contre cette erreur. Il a

(1) *The Scientific Papers of* J.-Willard Gibbs, vol. I, p. 99.
(2) *The Scientific Papers of* J.-Willard Gibbs, vol. I, p. 85, 135, 164.

prouvé que, s'il lui plaisait de comparer quelqu'une de ses formules aux données de l'expérience, il savait fort bien instituer cette comparaison et la pousser jusqu'à son complet achèvement.

Sa Statique chimique donne une formule algébrique propre à représenter les variations de la densité d'un polymère gazeux qui se résout en un isomère moins condensé ; désireux de soumettre cette formule au contrôle des faits, Gibbs a réuni toutes les déterminations auxquelles les densités de vapeur variables avaient donné lieu de son temps, et il les a minutieusement comparées aux résultats numériques tirés de sa formule (1).

Si donc Gibbs a laissé ses découvertes de Mécanique chimique sous une forme abstraite et purement algébrique, ce n'est pas qu'il fût inhabile à les présenter en un langage plus concret et plus accessible aux expérimentateurs ; c'est que son esprit, lorsqu'il avait condensé une vérité en la concision d'une formule très générale, répugnait à dérouler la suite infinie des cas particuliers qu'enveloppait cette proposition universelle ; comme son caractère moral, son intelligence était *of a retiring disposition*.

V.

Gibbs aimait à contempler la vérité, non pas dans la multiplicité variable et changeante des propositions particulières, mais dans l'unité fixe et immuable de la proposition générale ; sa pensée ne cherchait pas à s'étendre dans le développement de plus en plus ample des conséquences, mais à se concentrer dans le resserrement de plus en plus dense des principes ; cette tendance qui caractérise la démarche habituelle de son génie, nous venons de la reconnaître dans la méthode qu'il a suivie pour exposer les résultats de ses théories ; nous allons la retrouver, non moins nette et accentuée, dans la forme qu'il a donnée aux hypothèses dont ces mêmes théories sont issues.

Quelle est, pour le pur logicien, la structure idéale de la théorie physique ?

Au point de départ, quelques propositions, revêtues d'une

(1) *The Scientific Papers of* J.-WILLARD GIBBS, vol. I, p. 175-181 et 372-403.

forme mathématique, très peu nombreuses et très générales, aussi générales que possible afin qu'elles soient aussi peu nombreuses que possible; ce sont les *hypothèses*.

En ces hypothèses, la théorie tout entière est contenue et comme ramassée; par une déduction d'une rigoureuse régularité, le mathématicien va extraire des hypothèses la foule des vérités particulières qu'elles impliquent, et les dérouler en une suite parfaitement ordonnée qui sera la théorie.

L'expérimentateur s'emparera alors de ces conséquences particulières; il les comparera aux lois que l'observation lui a révélées, car ces lois doivent trouver une représentation satisfaisante dans les résultats de la théorie pour que celle-ci soit déclarée valable.

Le physicien qui se propose de présenter une théorie à ses auditeurs ou à ses lecteurs va-t-il modeler exactement son exposition sur ce que la Logique lui enseigne touchant la structure de cette théorie? Va-t-il, de prime abord, poser l'ensemble de ses hypothèses sous leur forme la plus générale et sous leur nombre minimum? Il risquerait, à le faire, de heurter les préventions intellectuelles les plus légitimes de ceux auxquels il s'adresse, de rendre ses suppositions inacceptables et de laisser sa théorie incomprise.

Les hypothèses sur lesquelles repose une théorie physique n'ont rien d'analogue, en effet, aux axiomes de la Géométrie. Ceux-ci sont des propositions d'une certitude immédiate; sitôt qu'ils lui sont présentés, l'esprit leur donne son adhésion; transporter aux corollaires les plus éloignés cette certitude évidente des principes, c'est, en chacune des branches de la Science mathématique, l'objet de la déduction.

Tout autrement en est-il en une théorie physique. La source de toute certitude et de toute vérité ne se trouve pas à l'origine de la déduction, elle ne coule pas des hypothèses premières; elle se trouve à l'autre extrémité, elle dérive tout entière de l'accord entre les conséquences ultimes de la théorie et les lois expérimentales. Les hypothèses ne se présentent donc pas comme des jugements qui, d'emblée, satisfont l'esprit; la déduction mathématique n'a pas pour but de nous faire adhérer aux corollaires éloignés en canalisant jusqu'à eux l'évidente certitude des premiers principes. Ici, la vérité ne descend pas des prémisses du raisonnement aux

conclusions; elle réside uniquement là où aboutit la théorie, là où elle vient se confronter avec l'expérience; de cette confrontation, les hypothèses d'où la théorie est issue tirent toute leur valeur, en sorte que cette valeur remonte, en sens contraire de la déduction mathématique, des conclusions aux prémisses. Cette valeur, d'ailleurs, n'est pas une valeur de vérité, elle ne s'apprécie pas en degrés de certitude; elle est d'autant plus grande qu'un nombre plus considérable de lois expérimentales se laissent représenter par les corollaires déduits des hypothèses; elle est d'autant plus grande que l'ensemble de ces corollaires forme un tableau où les lois expérimentales sont représentées plus fidèlement et dans un ordre plus parfait; les suppositions qui sont à la base d'une théorie valent donc comme formules économiques où un nombre immense de vérités d'observation se trouvent concentrées; elles valent comme principes de classification; elles ne valent nullement comme vérités.

Il est clair, dès lors, que la valeur des hypothèses que le physicien pose à la base d'une théorie ne saurait être appréciée justement tant que la théorie n'a pas reçu son complet achèvement et que l'ensemble de ses conséquences n'a pas été soumis au contrôle des faits. Logiquement, celui qui entend exposer une théorie physique devrait s'abstenir de la moindre critique, de la moindre discussion, de la moindre question au sujet des premières propositions qui lui sont formulées jusqu'au moment où les derniers corollaires de ces propositions auront été démontrés par le mathématicien et jugés par l'expérimentateur; alors, mais alors seulement, il pourra décider en connaissance de cause si les hypothèses posées tout d'abord doivent être acceptées ou rejetées.

Mais qui donc aurait un assez grand respect de la Logique pour se contraindre à une telle réserve? Certes, celui qui aborde l'étude d'une théorie physique consentira bien à reconnaître que l'on ne saurait évaluer une hypothèse à son plus juste prix avant d'avoir développé toutes les conséquences qu'elle implique; mais, avant d'entreprendre la lente et pénible déduction qui doit dérouler devant ses yeux la chaîne de ces conséquences, il réclamera quelque assurance contre les risques d'un vain labeur.

On ne peut être certain qu'une route mène au lieu que l'on désire atteindre tant que l'on n'a pas suivi cette route jusqu'au bout;

toutefois, avant de s'y engager, on en relève l'orientation, on recueille toutes les indications qui laissent deviner l'endroit où elle aboutit; on se met en garde du mieux que l'on peut contre la chance d'avoir à rebrousser un long chemin inutilement parcouru.

En dépit donc des droits que la Logique lui confère, l'auteur d'une théorie se voit obligé de donner, dès le début, certaines justifications, certaines présomptions en faveur des hypothèses qu'il propose. Ces justifications, ces présomptions n'ont rien, d'ailleurs, d'une démonstration apodictique; partant, aucune règle absolue ne fixe la méthode selon laquelle elles doivent procéder. Tantôt, le créateur de la théorie s'efforcera de montrer que les enseignements confus de la connaissance commune suggèrent, en quelque sorte, les suppositions qu'il formule et trouvent en elles une forme plus précise et plus satisfaisante pour l'esprit. Tantôt, des propositions qu'il vient de postuler, il se hâtera de tirer quelques conséquences, particulièrement aisées et immédiates, et il s'empressera de montrer que ces conséquences s'accordent avec les lois expérimentales. Tantôt enfin, et cette voie sera presque toujours la plus sûre, il retracera la suite historique des essais et des tâtonnements qui ont amené à formuler les hypothèses sur lesquelles il va poser ses constructions. Mais, tout en pratiquant cet art d'introduire les principes en lesquels se condense son œuvre théorique, de les rendre aisément acceptables à son auditeur ou à son lecteur, il n'oubliera pas que toutes ces démarches ont pour objet d'anticiper sur le cours régulier de la doctrine physique et de satisfaire une illogique impatience.

Gibbs ne connaît pas cette impatience illogique; il ne l'éprouve pas en lui-même, il ne la soupçonne pas chez les autres; il ne fait rien pour l'éviter et la calmer. Nul n'a plus exactement conformé l'exposé d'une théorie aux règles données par la seule Logique.

Lorsque le professeur de New-Haven développe une théorie physique, les hypothèses sur lesquelles il fonde cette théorie sont toujours amenées au plus haut degré de généralité en même temps que le nombre en est réduit au minimum. Parfois, une restriction un peu plus grande imposée à ces hypothèses permettrait à l'imagination de secourir la raison qui s'efforce de les saisir; parfois, un énoncé plus particulier, accompagnant l'énoncé général, lui servirait d'exemple et en ferait mieux comprendre le sens; Gibbs

ne consent jamais à poser de telles restrictions; il ne condescend jamais à donner de tels exemples.

Considérons, par exemple, sa théorie de la double réfraction. Les physiciens qui, avant lui, ont développé de semblables théories se sont attachés à donner une forme déterminée à leurs suppositions sur la matière, sur l'éther, sur les relations mutuelles de ces deux substances; ou bien encore, lorsqu'ils voulaient éviter de trop préciser la structure de ces deux corps, ils ont pris soin, comme lord Kelvin, de composer des *modèles* qui pussent servir d'exemples à leurs hypothèses générales. Le professeur du Yale College prend le contre-pied de cette méthode; il élimine de ses postulats tout ce qui les déterminerait outre mesure, tout ce qui les préciserait aux dépens de leur extension; il les réduit à ce qu'ils doivent renfermer d'absolument essentiel; la matière a une structure finement grenue; les dimensions et les distances mutuelles des grains sont négligeables par rapport à la longueur d'onde de la lumière; voilà tout ce qu'il admet (1) au début de ses spéculations sur la double réfraction et la dispersion.

Ce même désir de donner aux hypothèses la forme la plus générale, la moins déterminée qu'il soit possible d'imaginer se retrouve dans l'écrit (2) où Gibbs s'est efforcé de rapprocher les lois de la Thermodynamique des lois de la Mécanique.

Ces hypothèses si générales sur lesquelles Gibbs fonde ses théories ne sont pas toujours entièrement nouvelles; parfois, la Science n'est arrivée à les formuler qu'à la suite de longues hésitations, de tâtonnements pénibles, de discussions épineuses; rien de plus propre alors à nous faire apprécier la valeur, la portée, le sens de ces hypothèses que l'histoire résumée des vicissitudes par lesquelles elles ont passé avant d'acquérir leur forme actuelle. A cette histoire, Gibbs ne fait même pas une allusion.

Ouvrons, par exemple, le célèbre Mémoire *Sur l'équilibre des substances hétérogènes*, et voyons en quels termes débute le premier Chapitre (3) :

---

(1) *The Scientific Papers of* J.-WILLARD GIBBS, vol. II, p. 184-185.

(2) J.-WILLARD GIBBS, *Elementary Principles in statistical Mechanics developed with especial reference to the rational foundation of Thermodynamics*, New-York et Londres, 1902, p. 5-6.

(3) *The Scientific Papers of* J.-WILLARD GIBBS, vol. I, p. 56

« Le critérium de l'équilibre d'un système isolé de toute influence extérieure peut s'exprimer sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes, qui sont équivalentes :

» I. Pour l'équilibre d'un système isolé, il est nécessaire et suffisant que dans toutes les variations possibles de l'état du système, qui n'altèrent pas son énergie, la variation de l'entropie soit nulle ou négative...

» II. Pour l'équilibre d'un système isolé, il est nécessaire et suffisant que dans tous les changements possibles de l'état du système, qui ne font pas varier son entropie, la variation de son énergie soit nulle ou positive. »

Voilà les deux propositions essentielles dont toute la Statique chimique de Gibbs se tire par une déduction rigoureuse; toutes les formules que le Mémoire va développer y sont impliquées d'avance. Ces deux propositions, d'où tout le reste découle, nous sont présentées sans aucun commentaire, sans aucun exemple, sans aucune introduction historique. C'est, dira-t-on, qu'elles sont admises de tous les physiciens, que nul n'en conteste le bien fondé, qu'elles sont d'usage courant. Point du tout. Jamais, jusqu'alors, elles n'ont été expressément formulées en aucun écrit de Thermodynamique. Elles se peuvent déduire de certains principes posés par W. Thomson et par Clausius; mais ces principes eux-mêmes font usage de notions encore imprécises et mal définies, ils se relient à des hypothèses que plusieurs révoquent en doute. Derrière ces deux énoncés si brefs par lesquels débute le *On the equilibrium of heterogeneous substances*, il y a la loi de Carnot, il y a la notion de modification réversible et celle d'entropie, il y a l'audacieuse affirmation de Clausius touchant les transformations non réversibles; et rien de tout cela n'est encore entré dans la Science faite et communément acceptée, et rien de tout cela ne bénéficiera du consentement universel des bons esprits avant de longues années et de multiples efforts! Qui donc soupçonnerait l'existence de tous ces motifs d'hésitation et de doute en contemplant la sereine assurance avec laquelle le professeur de New-Haven écrit les deux formules qui renferment toute son œuvre thermodynamique?

En la grande généralité d'une hypothèse, certaines affirmations peuvent être impliquées qui sont particulièrement étranges et

paradoxales. Sans doute, on agira prudemment en les signalant au lecteur au moment même que l'on formule la proposition qui les contient. Sinon, le jour viendra où, en développant les conséquences de cette proposition, il se heurtera, non averti, à ces affirmations scabreuses, et sa raison ne pourra manquer d'être violemment choquée d'un tel scandale.

La théorie que Gibbs a donnée (1) de la transformation par laquelle un fluide passe de l'état liquide à l'état de vapeur est susceptible de fournir, d'une manière très complète, les propriétés du point critique (2); cette importante théorie repose tout entière sur cette supposition : Le point qui a pour coordonnées le volume, l'énergie et l'entropie de l'unité de masse d'un fluide décrit une surface analytique dépourvue de tout point singulier.

Or, en cette proposition, se trouve impliquée une curieuse et étrange affirmation; une nappe de la surface dont elle postule l'existence correspond à des états que le fluide ne prend pas et ne peut pas prendre, en sorte que cette nappe, algébriquement définie, ne représente absolument rien au point de vue de la Physique. La considération de cette nappe donne une forme précise au principe de continuité entre l'état liquide et l'état gazeux que James Thomson avait entrevu.

L'existence de cette nappe mérite d'être expressément signalée au lecteur. A quelles conséquences inadmissibles, en effet, ne parviendrait-il pas s'il prenait les propriétés géométriques de cette partie de la surface thermodynamique pour représentation des propriétés physiques d'un fluide réel! Il penserait voir ce fluide se dilater à température constante lorsqu'il ferait croître la pression. Cet avertissement si nécessaire, Gibbs ne le donnera pas, cependant, en formulant l'hypothèse qui porte ses déductions; à peine, au cours de ces mêmes déductions, le lecteur très attentif pourra-t-il entrevoir quelque vague allusion (3) à cette partie si étrange de la théorie.

Lorsqu'une hypothèse a pris sa forme la plus générale, lorsque tous les cas particuliers qui en avaient été isolément découverts,

(1) *The Scientific Papers of* J.-Willard Gibbs, vol. I, p. 33 et suivantes.

(2) Paul Saurel, *On the critical state of a one component system* (*Journal of physical Chemistry*, vol. VI, 1902, p. 474).

(3) *The Scientific Papers of* J.-Willard Gibbs, vol. I, p. [illegible].

toutes les propositions spéciales qu'une détermination plus étroite en peut déduire, ont été composés en un énoncé unique, il répugnerait souverainement à l'esprit de Gibbs de briser cette combinaison; tous les efforts de son génie tendent à faire converger la multiplicité des vérités particulières vers l'unité d'un principe central; il ne saurait lui plaire que la généralité de ce principe s'éparpillât de nouveau en propositions fragmentaires, et cela dans le seul but de satisfaire aux exigences illogiques de lecteurs impatients et d'assurer à ses théories une diffusion qu'il ne souhaite point.

C'est chose à peine croyable que le soin avec lequel Gibbs garde à chaque hypothèse physique sa forme la plus générale et la moins développée; de ce soin, ses études de Mécanique statistique nous offrent un bien curieux exemple (¹).

Dans un certain espace sont répartis des corps en nombre immense, variables de forme et de position. Tous ces corps, qui sont les *éléments* du système étudié, sont de même nature; ils pourraient être ramenés à un stade où ils seraient tous identiques; mais, au moment où nous les étudions, ils diffèrent les uns des autres par leur état, car ils sont diversement placés, orientés et déformés, et par leur mouvement, car ils ne sont pas tous animés des mêmes vitesses. A la nature de ces corps on laisse une large indétermination. Ce peuvent être de simples points matériels; la position de chacun d'eux dépend seulement alors de trois coordonnées. Ce peuvent être des atomes rigides; pour connaître la position d'un tel atome, il faut connaître les valeurs de six variables. Ce peuvent être des molécules, des assemblages d'atomes plus ou moins nombreux, plus ou moins divers, capables de se déplacer les uns par rapport aux autres; pour déterminer la figure et la position d'un tel assemblage, il faut se donner un nombre de variables plus ou moins grand, mais supérieur à six. Une seule condition est requise des éléments qui forment le système matériel étudié : c'est qu'un tel élément soit entièrement connu de figure et de position lorsqu'on connaît les valeurs d'un nombre plus ou moins grand, mais limité, de variables indépendantes.

(¹) J.-Willard Gibbs. *Elementary principles in statistical Mechanics*. New-York et Londres, 1902.

Ces éléments sont soumis à des forces. Les forces qui agissent sur un élément dépendent exclusivement des variables qui déterminent cet élément; telles seraient des forces émanées de corps extérieurs invariables. Une telle hypothèse exclut évidemment la supposition d'actions réciproques entre les éléments. De plus, on suppose que les divers éléments ne se choquent pas les uns les autres.

Supposons établi l'*équilibre statistique* du système. Une foule d'états distincts, de mouvements distincts y sont simultanément réalisés; à chaque instant, chacun des éléments quitte son état et son mouvement; mais un autre élément prend sensiblement, au même instant, l'état et le mouvement que celui-là vient de perdre.

Comment tous ces états et tous ces mouvements se répartissent-ils entre les corps innombrables qui forment le système? Combien y a-t-il, à un instant donné, de corps dont l'état soit compris entre deux limites données, dont le mouvement soit également compris entre deux limites données? Tel est le premier problème que le géomètre ait à se poser; ce problème, Gibbs le résout avec une entière généralité.

Ce problème fait intervenir un certain coefficient que Gibbs nomme *coefficient de probabilité* et qu'il désigne par la lettre P. Une seule condition est imposée à ce coefficient : il doit être une fonction des coordonnées et des vitesses des divers éléments, et cette fonction doit garder la même valeur pendant toute la durée du mouvement du système.

Une telle condition laisse largement indéterminée la forme du coefficient P; on y satisferait assurément [1], et ce n'est peut-être pas la seule manière d'y satisfaire, en égalant P à une fonction quelconque de l'énergie ε. En cette détermination déjà particulière, Gibbs choisit une seconde détermination infiniment plus spéciale; il considère les systèmes pour lesquels P est donné par l'égalité

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P} = e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\Theta}},$$

où Θ est une constante positive et où ψ est une autre constante, et

---

[1] J.-WILLARD GIBBS, *op. cit.*, p. 32-33.

ce sont ces *systèmes canoniques* qu'il prend pour objet de son analyse.

Aux systèmes canoniques il découvre de remarquables propriétés mécaniques qui offrent avec les lois de la Thermodynamique d'intéressantes analogies.

Notre intention n'est pas de suivre ici la théorie des systèmes canoniques, mais de nous arrêter un instant au point de départ de cette théorie.

Les systèmes canoniques sont définis par une propriété algébrique : leur coefficient de probabilité est de la forme donnée par l'équation (1). Mais ils n'ont reçu jusqu'ici aucune définition mécanique. Comment doivent être agencés les corps qui composent un élément du système, à quelles sortes de forces ces corps doivent-ils être soumis pour que le système soit un système canonique? Cette question n'a reçu aucune réponse.

Or une telle réponse paraît indispensable si l'on ne veut pas que la théorie des systèmes canoniques paraisse un pur exercice d'Algèbre, sans intérêt pour le physicien. Il nous importera assez peu, en effet, que ces systèmes soient soumis à des lois d'une simplicité remarquable si nous ignorons l'art de les construire. L'analogie de ces lois avec les lois de la Thermodynamique nous donne à penser que nous devons composer la nature de systèmes semblables aux systèmes canoniques, si nous voulons essayer de l'expliquer mécaniquement ; mais ce renseignement nous semblera singulièrement incomplet si l'on ne nous dit pas, en outre, comment est constitué un système canonique. Enfin, et ceci est plus grave, tant qu'on ne nous a pas décrit la construction mécanique d'un système canonique, nous sommes en droit de nous demander si de tels systèmes existent, si l'on peut agencer les corps au sein de chaque élément et régler les forces qui sollicitent ces corps, de telle manière que l'égalité (1) s'applique à l'ensemble de ces éléments.

Or cette définition mécanique des systèmes canoniques, il ne semble pas que Gibbs s'en soit soucié; il ne paraît pas qu'il ait cherché à donner un exemple qui mît hors de doute l'existence de tels systèmes; la concision et la simplicité de la définition algébrique qu'il avait posée suffisaient à satisfaire son esprit, ennemi de tout développement ; jamais, peut-être, la *retiring disposition* qui oriente toutes ses démarches intellectuelles ne s'était plus nettement affirmée.

VI.

Les hypothèses renferment, repliée sur elle-même, toute la théorie physique; elles ne renferment pas toute la pensée du physicien. En son esprit, elles se relient à d'autres jugements, plus ou moins clairement aperçus, plus ou moins explicitement formulés; et ce sont ces jugements qui suggèrent au physicien d'adopter telle supposition, arbitraire en apparence, qui unissent entre eux des principes sans lien visible.

Ces « pensées de derrière la tête », le physicien consent rarement à les publier; bien des raisons le poussent, en général, à les garder secrètes.

Elles ne sont pas susceptibles, la plupart du temps, de se couler en ces formes précises et claires où il a pris l'habitude de mouler ses propositions théoriques; leurs contours demeurent toujours plus ou moins vagues et indécis; elles ne se laissent pas enseigner d'une manière dogmatique; avec quelque art qu'on les expose, on parvient tout au plus à les faire soupçonner et deviner.

Elles n'ont pas l'évidence immédiate des axiomes de la Géométrie; elles ne se démontrent pas comme des théorèmes; elles ne fournissent pas, comme les énoncés formulés par le théoricien, des conséquences qui puissent être soumises au contrôle de l'expérience; leur certitude est d'un autre ordre que la certitude des diverses propositions auxquelles le physicien est habitué; lorsqu'une longue méditation l'a convaincu de leur vérité, il manque de moyens irréfutables pour communiquer à autrui sa conviction.

Enfin, ces pensées philosophiques qui dirigent les efforts du physicien dans le choix et l'élaboration de ses théories se rattachent souvent en lui à d'autres pensées philosophiques, à celles qui dominent ses croyances morales, qui organisent sa vie intérieure; et une juste répugnance, une légitime pudeur, le portent à dérober aux yeux étrangers cet intime foyer de son âme.

Il est donc rare qu'un physicien nous laisse pénétrer jusqu'à ce sanctuaire philosophique où, dans une demi-obscurité, siègent les idées mères de ses théories. Et cependant, tant que ses confidences ne nous ont pas entr'ouvert ce secret asile, nous ne comprenons pas réellement et pleinement ses doctrines; car, s'il nous est permis

de les contempler sous leur forme achevée, nous ne pouvons deviner d'où est issu le germe qui s'est développé en elles.

Ces confidences, trop rares de la plupart des physiciens, devons-nous les attendre de Gibbs? Pouvons-nous espérer de lui qu'il nous laisse entrevoir quelques-unes des pensées philosophiques qui ont orienté ses recherches physiques et mathématiques? Assurément non. Il a pu nous livrer certaines de ses doctrines scientifiques, alors qu'elles avaient atteint, en son esprit, au plus haut degré de clarté et de précision; encore ne les a-t-il livrées qu'à demi et comme à regret, restreignant, pour ainsi dire, sa publication par la concision du style, par l'emploi des algorithmes symboliques, par la forme purement algébrique sous laquelle demeurent voilées ses propositions de Physique, par le caractère très général et très abstrait de ses hypothèses. Comment se déciderait-il à nous communiquer des pensées indécises et flottantes, dont la publication froisserait toutes les susceptibilités de sa modestie, contrarierait toutes les tendances à la concentration qui sollicitent son génie?

Nous devons donc nous résigner à ignorer les idées philosophiques qui, sans doute, en l'esprit de Gibbs, présidaient à la genèse des théories physiques.

Cette résignation ne sera pas toujours exempte de regret; il est, en particulier, un important débat au sujet duquel on eût aimé à connaître son opinion. Les lois de la Physique peuvent-elles toutes se ramener, en dernière analyse, aux lois de la Mécanique rationnelle, telles que Newton et Lagrange les ont tracées? L'espoir d'une telle réduction doit-il être rejeté, au contraire, comme une illusion chimérique, à tout jamais dissipée? Doit-on traiter les diverses branches de la Physique et, en particulier, la Thermodynamique, comme des sciences autonomes qui n'attendent aucun secours des théorèmes de la Dynamique?

Les premiers travaux de Gibbs semblaient destinés à seconder ce dernier parti; les principes de la Thermodynamique y étaient traités comme des hypothèses qui ne se réclament d'aucune interprétation mécanique; le professeur du Yale College s'exprimait, en toutes circonstances, exactement comme le ferait le plus rigoureux des énergétistes.

Cependant, on se fût sans doute trompé en le rangeant parmi ceux qui réputent à tout jamais impossible toute représentation

mécanique des phénomènes naturels. Ses recherches de Mécanique statistique, publiées peu de temps avant sa mort, mais poursuivies pendant une très grande partie de sa vie, témoignent du très vif intérêt qu'il portait aux essais tentés pour asseoir la Physique sur les seuls fondements de la Dynamique.

Trop clairvoyant pour partager l'enthousiasme naïf que ces essais, à peine ébauchés, provoquent chez quelques-uns de nos contemporains, nourrissait-il, comme Lord Kelvin, le ferme espoir de voir ces tentatives aboutir quelque jour à une réussite? Toute affirmation à cet égard serait sans doute fort hasardée. Écoutons avec quelle circonspection s'exprime, en sa préface, l'auteur des *Principes de Mécanique statistique:*

« Cette branche de la Mécanique doit son origine au désir d'expliquer les lois de la Thermodynamique au moyen des seuls principes de la Mécanique...

» Nous éviterons les plus grandes difficultés en détournant notre attention de la construction des hypothèses relatives à la constitution des corps matériels, et en poursuivant simplement les recherches statistiques comme une branche de Mécanique rationnelle. Dans l'état présent de la Science, il ne paraît guère possible de constituer une théorie dynamique de l'action moléculaire qui embrasse à la fois les phénomènes thermodynamiques, la radiation, et les manifestations électriques qui accompagnent l'union des atomes. Or il est évident qu'aucune théorie ne saurait être satisfaisante si elle ne tient compte à la fois de tous ces phénomènes. Même si nous bornons notre attention aux phénomènes purement thermodynamiques, nous n'échappons pas à toute difficulté, fût-ce dans une question aussi simple que l'énumération des degrés de liberté de la molécule d'un gaz diatomique; tandis, en effet, que la théorie assigne 6 degrés de liberté à chacune des molécules du gaz, c'est une chose bien connue que nos expériences sur la chaleur spécifique ne peuvent compter plus de 4 degrés. Certainement, celui-là bâtit sur des fondations fort peu sûres, qui prend pour bases de son œuvre des hypothèses relatives à la constitution de la matière.

» De telles difficultés ont effrayé l'auteur; elles l'ont dissuadé de consacrer son attention à l'explication des mystères de la nature; elles l'ont contraint à se contenter d'un but plus modeste; il se bornera à démontrer quelques-unes des propositions les plus obscures de la partie statistique de la Mécanique. Les résultats de

cette recherche n'ont pas à craindre de se trouver erronés par suite de leur manque d'accord avec les phénomènes naturels, car on n'a nullement supposé que cet accord dût avoir lieu. La seule erreur qui puisse être ici commise consisterait en un désaccord entre les prémisses et les conclusions ; et cette erreur-là, avec de l'attention, on peut, en général, espérer de l'éviter.

» ... Finalement, nous examinons la modification qu'il nous est nécessaire d'apporter aux résultats précédents si nous voulons considérer des systèmes composés d'un grand nombre de particules entièrement similaires... Cette supposition aurait dû être introduite tout d'abord, si nous avions eu simplement pour objet d'exprimer les lois de la nature. Toutefois, il semble désirable que les lois purement thermodynamiques soient très nettement séparées de ces modifications spéciales, qui sont plutôt l'objet de la théorie des propriétés de la matière. »

Celui qui écrivait ces lignes escomptait-il, pour un avenir plus ou moins éloigné, le triomphal avènement d'une Physique déduite des seules lois de la Dynamique? Pensait-il, au contraire, que les physiciens agiraient sagement en abandonnant tout essai d'explication mécanique et en s'efforçant seulement de représenter par des théories mathématiques les lois que l'expérience leur révèle? Les quelques réflexions échappées à son extrême réserve ne nous permettent guère de le deviner.

Il est temps de clore ces remarques sur la *retiring disposition* qui s'est manifestée, avec une extraordinaire puissance, non seulement dans la vie recluse et dans le caractère modeste du professeur de New-Haven, mais encore dans toutes les particularités qui donnent à son œuvre une physionomie si originale. Nous ne saurions le faire sans éprouver un certain sentiment de tristesse, car il nous est impossible de ne pas répéter ici, en guise de conclusion, ces paroles de M. Henry Le Chatelier [1] : « La portée des travaux du professeur Gibbs n'a pas été immédiatement reconnue; leur influence sur les progrès de la Science n'a pas été tout d'abord ce qu'elle aurait dû être. »

---

(1) J.-WILLARD GIBBS, *Équilibre des systèmes chimiques*. Traduit par Henry Le Chatelier. Paris, 1899. Préface du traducteur, p. VI.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Jost (E.). — *Untersuchungen über die Parallaxen von 29 Fixsternen.* 172 p. (*Veröffentlichungen der grossherzöglich. Sternwarte zu Heidelberg.* Herausgeg. von W. Valentiner. 4. Bd.) In-4°. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchdr. 20 m.

Whitehad (A.-N.). — *The axioms of descriptive Geometry.* In-8°, 82 p. Cambridge Univ. Press. 2 sh. 6 d.

Lindemann (F.). — *Ueber die Bewegung der Elektronen.* 1. Tl. *Die translatorische Bewegung.* (Sonderdr.) Avec fig. In-8°. München, Franz. 3 m.

Bryan (G.-H.). — *Thermodynamics. An introductory treatise dealing mainly with first principles and their direct applications.* xiv-204 p. avec fig. Relié 7 m. (*B.-G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* N° 21. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner.)

Kurt Hering. — *Das 200-jährige Jubiläum der Dampfmaschine* (1706-1906). Eine historisch-technisch-wissenschaftl. Betrachtung. iv-58 p. avec 13 fig. (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von Mor. Cantor. 23. Heft). Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 1 m. 80 pf.

Annales de l'Observatoire astronomique, magnétique et météorologique de Toulouse. T. VII. In-4°, xx-582 p. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Baker (W.-M.). — *A key to algebraic Geometry.* In-8°. London, Bell. 7 sh. 6 d.

Burrau (Carl.). — *Tafeln der Funktionen Cosinus u. Sinus, mit den natürl. sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument* (*Kreis- u. Hyperbelfunktionen*). Gr. in-8°, xx-63 p. Berlin, G. Reimer. Relié, 4 m.

Dingler (Hugo). — *Grundlinien einer Kritik u. exakten Theorie der Wissenschaften, insbesondere der mathematischen.* Gr. in-8°, v-76 p. München, Th. Ackermann. 1 m. 60 pf.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LAISANT (C.-A.). — LA MATHÉMATIQUE : *philosophie, enseignement,* 2e édition, revue et corrigée. 1 vol. in-8°, VII-243 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Nous avons, au moment de la publication de ce Livre en 1898, donné à nos lecteurs un aperçu et une critique détaillée de l'excellent Ouvrage de notre collaborateur [1]; le succès même qu'il a obtenu rendait une seconde édition nécessaire et cette édition a été entreprise par M. Gauthier-Villars. L'auteur s'est borné à quelques corrections de pure forme, à quelques suppressions insignifiantes qui rendront plus facile la lecture du Livre. Les progrès accomplis dans ces derniers temps par la philosophie mathématique amèneront, nous n'en doutons pas, à M. Laisant des lecteurs de plus en plus nombreux et confirmeront avec cette seconde édition le succès obtenu par la première. G. J.

MOUGIN (E.). — I. Log N. I...10000. II. Log sin, cos, tang, cot $0^v \ldots 100^v$. III. S.-T. $0^v \ldots 5^v$. IV. sin, cos, tang, cot $0^v \ldots 100^v$. V. Log sin, cos, tang, cot $0^\circ \ldots 90^\circ$. VI. sin, cos, tang, cot $0^\circ \ldots 90^\circ$. VII. sin, cos, tang, cot $0^\circ \ldots 90^\circ$. VIII. S.-T. $0^\circ \ldots 4^\circ$. VIII, IX, X. In-4°, VIII-56 pages. Prix : 1fr,50.

Ce titre est évidemment peu clair. L'auteur, qui est professeur au lycée de Roanne, a condensé dans ce petit Volume de 56 pages beaucoup de matières : 1° une Table des logarithmes à 5 décimales des 10000 premiers nombres ; 2° une Table des logarithmes du

[1] T. XXII, p. 88.

sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente de o grade à 100 grades; 3° une Table des valeurs de ces lignes trigonométriques dans le même intervalle et avec la même graduation; 4° et 5° deux Tables analogues où au lieu de grades est employée la division en degrés; 6° et 7° deux Tables destinées à permettre le calcul exact des logarithmes des lignes trigonométriques quand on s'approche des limites de la Table; elles font connaître $\log \frac{\sin x}{x}$ et $\log \frac{\operatorname{tang} x}{x}$ dans les intervalles de 0° à 4° et de 0 grade à 5 grades. Enfin, la 8e, la 9e et la 10e Partie donnent des indications nécessaires sur l'usage des Tables et les formules les plus usuelles.

Grâce à une disposition incontestablement ingénieuse, M. Mougin a pu se dispenser de répéter beaucoup de chiffres et a pu faire tenir ses Tables dans un espace restreint. Cet avantage est diminué dans la pratique par la nécessité de rapprocher, pour obtenir un logarithme, des chiffres qui sont éloignés les uns des autres et qui sont les uns sur une ligne horizontale, les deux premiers étant séparés du troisième, les autres sur une ligne verticale. Il y a là une source d'erreur et de fatigue que nous ne pouvons apprécier. C'est aux calculateurs de profession qu'il appartient de se prononcer. Nous serions très heureux que leur appréciation fût favorable à la nouvelle disposition adoptée par M. Mougin.

G. T.

BURRAU (C.). — TAFELN DER FUNKTIONEN COSINUS UND SINUS, mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis und Hyperbelfunctionen). 1 vol. in-8°; 63 pages. Berlin, Reimer. 1907.

Les Tables de M. Burrau donnent, avec six décimales, les valeurs (naturelles) de $\cos x$ et de $\sin x$ pour x variant par centièmes, de 0 à 1,60 (huit pages), les valeurs de $\cos ix$ et de $\frac{1}{i} \sin ix$, avec six chiffres significatifs au moins, pour x variant par centièmes de 0 à 8 (trente-trois pages); les valeurs de e^x, avec sept chiffres significatifs au moins, pour x variant de 8 à 9,80 (trois pages);

une Table de multiplication des nombres de trois chiffres par 1, 2, 3, ..., 9.

Ainsi que le fait remarquer l'auteur, l'emploi de la machine à calculer conduit à se servir de Tables de valeurs naturelles; elles sont d'ailleurs commodes dans bien des cas. On remarquera dans celles-ci que, pour le sinus et le cosinus, l'argument ne varie pas par fractions simples de grade ou de degré, mais bien par centièmes; il n'est guère de mathématicien qui n'ait désiré parfois avoir une telle Table à sa disposition. Le nombre 8 auquel on limite l'argument pour les Tables de fonctions hyperboliques est tel que les valeurs de sh$x$ et de ch$x$ coïncident dans les sept premiers chiffres; cela arrive même à partir de 7,80. L'auteur a utilisé les vides pour pousser un peu plus loin la Table des valeurs de e^x.

Dans cette Table, le point dont est affectée, à l'occasion, la dernière décimale indique, non pas que cette dernière décimale a été forcée, mais bien que la suivante serait comprise entre 0,25 et 0,75. En d'autres termes, si l'on veut écrire un chiffre de plus, qui soit un 0 ou un 5, on sait choisir. Cette façon de faire, introduite par M. N. Thiele, semble avantageuse.

Les valeurs de l'argument sont groupées trois par trois, celles qui se terminent par un zéro étant mises sur une ligne spéciale : cette disposition est commode pour la recherche. Les caractères sont très nets. J. T.

HAUSER (W.). — UEBER RESULTANTEN- UND DISCRIMINANTENBILDUNG IN DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN THETAFUNKTIONEN. Inaugural-Dissertation, 66 pages in-4°; Borna-Leipzig, Robert Noske, 1907.

M. Hauser désigne sous le nom de *fonctions thêta du $n^{ième}$ ordre et d'indice* τ, ou de *fonction* $\mathfrak{I}_\tau^n$ une fonction transcendante qui vérifie les équations fonctionnelles

$$\mathfrak{I}_\tau^n(u + \omega_1) = (-1)^n \mathfrak{I}_\tau^n(u),$$

$$\mathfrak{I}_\tau^n(u + \omega_2) = (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\omega_1} n (2u + \omega_1)} e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\tau} \mathfrak{I}_\tau^n(u).$$

en supposant positif le coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$; c'est là, sauf la différence des notations, les équations fonctionnelles dont Hermite a tiré un si grand parti pour la théorie des fonctions thêta elliptiques et le travail de M. Hauser est une nouvelle application du théorème fondamental d'Hermite, en vertu duquel toute fonction $\mathfrak{S}_\tau^n$ s'exprime en fonction linéaire à coefficients constants de n quelconques de ces fonctions, pourvu qu'elles soient linéairement indépendantes. En choisissant n de ces fonctions, qu'on désignera comme *fondamentales*, chaque fonction $\mathfrak{S}_\tau^n$ sera donc caractérisée par le système des n coefficients constants qui figurent dans son expression linéaire au moyen des fonctions fondamentales. Dès lors, si l'on considère deux fonctions $\mathfrak{S}_\tau^n$, définies chacune par ces n coefficients, on peut se demander quelle relation il doit y avoir entre ces coefficients pour que les deux fonctions $\mathfrak{S}_\tau^n$ aient un zéro commun. Le premier membre de cette relation sera la *résultante* des deux fonctions $\mathfrak{S}_\tau^n$; on pourra aussi se proposer de chercher la valeur de la racine commune. Le *discriminant* d'une fonction $\mathfrak{S}_\tau^n$ se définira d'une façon analogue.

Or il arrive, comme l'a montré M. Schlesinger [1], que ces problèmes peuvent être abordés par un procédé analogue à celui dont s'est servi Sylvester pour éliminer l'inconnue entre deux équations entières. En effet, si l'on désigne par $\varphi(u)$, $\psi(u)$ les deux fonctions $\mathfrak{S}_\tau^n$ considérées, et qu'on les multiplie par une même fonction $\mathfrak{S}_{\tau'}^n$, on formera deux nouvelles fonctions, d'ordre $2n$ et d'indice $\tau + \tau'$, qui auront une racine commune en même temps que $\varphi(u)$, $\psi(u)$; ces nouvelles fonctions s'exprimeront linéairement, chacune, au moyen de $2n$ fonctions fondamentales $\mathfrak{S}_{\tau+\tau'}^{2n}$; que l'on forme ainsi $2n$ expressions linéaires qui s'annulent pour une même valeur de u : en éliminant les $2n$ fonctions fondamentales, on obtiendra, sous forme d'un déterminant égalé au zéro, une condition nécessaire pour l'existence d'une racine commune. En procédant ainsi, M. Schlesinger avait obtenu une condition comprenant des facteurs étrangers, dont l'étude n'était pas d'ailleurs sans intérêt. Grâce à un choix judicieux des fonctions fondamentales, M. Hauser a pu parvenir à la condition nécessaire

(1) *Ueber Resultanten und Discriminante von $\mathfrak{S}$-Funktion höheren Grades* (*Math. Ann.*, t. XXXIII, p. 411).

et suffisante. Il a montré aussi comment la méthode de Bézout-Cayley pouvait être adaptée au même ordre de questions.

Les fonctions fondamentales dont il fait usage sont définies par les formules

$$X_a(u) = (-1)^a \prod_{\mu=0}^{\mu=n-1} \mathfrak{S}_1\left(u - \frac{a\omega_1 - \mu\omega_3 - \sigma}{n}\right) \qquad (a = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Une transformation du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_0(u_0) & X_1(u_0) & \ldots & X_{n-1}(u_0) \\ X_0(u_1) & X_1(u_1) & \ldots & X_{n-1}(u_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ \ldots \\ X_0(u_{n-1}) & X_1(u_{n-1}) & \ldots & X_{n-1}(u_{n-1}) \end{vmatrix}$$

en un produit de fonctions $\mathfrak{S}_1$ le conduit à une formule qui lui permet d'obtenir les coefficients $l_0, \ldots, l_{n-1}$ d'une fonction

$$\mathfrak{S}_1^{(n)} = l_0 X_0(u) + l_1 X_1(u) + \ldots + l_{n-1} X_{n-1}(u).$$

dont on se donne les zéros. J. T.

MÉLANGES.

QUELQUES NOUVELLES REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES;

Par M. J. DOLBNIA.

1. Considérons l'intégrale elliptique

$$(1) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 6\alpha_2 x^2 + 4\alpha_3 x + \alpha_4}} = u.$$

Posant

$$\sqrt{x^4 - 6\alpha_2 x^2 + 4\alpha_3 x - \alpha_4} = x^2 + \lambda - \frac{\mu}{y},$$

λ, μ étant des coefficients arbitraires, nous aurons une équation biquadratique

$$(2)\quad [(6\alpha_2 - 2\lambda)x^2 - 4\alpha_3 x + (\alpha_4 - \lambda^2)]y^2 - 2\mu(x^2 + \lambda)y - \mu^2 = 0.$$

A cette équation, on peut donner la forme

$$(3)\quad \begin{cases} f(x, y) = [(6\alpha_2 - 2\lambda)y^2 - 2\mu y]x^2 \\ \qquad + 4\alpha_3 y^2 x + [(\alpha_4 - \lambda^2)y^2 - 2\lambda\mu y - \mu^2] = 0. \end{cases}$$

La discriminante de l'équation (2) sera

$$\Delta_x = x^4 + 6\alpha_2 x^2 + 4\alpha_3 x + \alpha_4,$$

et la discriminante de (3) sera

$$\Delta_y = 2\alpha_3^2 y^4 - [(3\alpha_2 - \lambda)y^2 - \mu y][(\alpha_4 - \lambda^2)y^2 - 2\lambda\mu y - \mu^2].$$

Puisque les coefficients λ et μ sont arbitraires, la courbe

$$f(x, y) = 0$$

n'a pas de points multiples, comme aussi les discriminantes Δ_x et Δ_y n'ont pas de racines égales.

Nommons les racines de l'équation

$$\Delta_x = 0$$

par

$$\xi_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Chacune de ces racines étant substituée dans l'équation (2) au lieu de x rend $f(x, y)$ un carré parfait; donc nous aurons simultanément

$$f(\xi_k, y) = 0, \qquad \frac{\partial f(\xi_k, y)}{\partial y} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

L'équation

$$\Delta_y = 0$$

donne pour y quatre valeurs différentes

$$\eta_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

qui sont de telle sorte que chacune d'elles étant substituée au lieu de y dans l'équation (3) rend $f(x, y)$ un carré parfait. Donc nous aurons simultanément

$$f(x, \eta_k) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, \eta_k)}{\partial x} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

De l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

nous obtenons

(4) $$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} = 0.$$

On voit de l'équation (1) que

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{x^4 - 6\alpha_2 x^2 - 4\alpha_3 x + \alpha_4} = \sqrt{\Delta_x}$$

a seulement quatre zéros :

$$x = \xi_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Ayant cela en vue, faisons dans l'équation (4)

$$x = \xi_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Alors nous aurons évidemment

$$\frac{\partial f(\xi_k, y)}{\partial y}\frac{dy}{du} = 0.$$

Mais de ce qui est dit précédemment, on voit que, pour

$$x = \xi_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

nous aurons simultanément

$$f(\xi_k, y) = 0, \qquad \frac{\partial f(\xi_k, y)}{\partial y} = 0.$$

Donc les droites

$$x = \xi_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

seront tangentes à la courbe

$$f(x, y) = 0$$

aux points

$$x = \xi_k, \qquad y = Y_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Il est facile à prouver que

$$\frac{dY_k}{du} = 0,$$

parce que, en cas contraire, la courbe donnée aurait un point

double, c'est-à-dire que nous aurions

$$\frac{\partial f(\xi_k, \Upsilon_k)}{\partial \Upsilon_k} = 0, \qquad \frac{\partial f(\xi_k, \Upsilon_k)}{\partial \xi_k} = 0.$$

Posant dans l'équation (4)

$$y = \eta_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

nous obtenons

$$\frac{\partial f(x, \eta_k)}{\partial \eta_k} \frac{d\eta_k}{du} = 0.$$

On ne peut pas supposer que

$$\frac{\partial f(x, \eta_k)}{\partial \eta_k} = 0,$$

parce que

$$\frac{\partial f(x, \eta_k)}{\partial x} = 0,$$

et il faut conclure que

$$\frac{d\eta_k}{du} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

La dérivée $\frac{dy}{du}$ ne devient pas zéro dans toutes les autres valeurs de y. Donc $\frac{dy}{du}$ a seulement quatre zéros :

$$y = \eta_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Donc

$$\frac{dy}{du} = \sqrt{\Delta_y},$$

et

$$\frac{dx}{\sqrt{\Delta_x}} = A \frac{dy}{\sqrt{\Delta_y}},$$

où A est une constante.

2. Cette transformation des intégrales elliptiques joue un rôle considérable dans la théorie des intégrales pseudo-elliptiques ([1]). A l'aide d'elle on peut parvenir très facilement à la formule connue de l'inversion des intégrales elliptiques. Posant

$$\sqrt{x^4 + 6\alpha_2 x^2 + 4\alpha_3 x + \alpha_4} = x^2 - \alpha_2 - 2z,$$

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VI, 1890.

nous obtenons

$$4(\alpha_2+z)x^2+4\alpha_3 x-(4z^2-4\alpha_2 z+\alpha_2^2-\alpha_4)=0.$$

On voit d'ici que

$$\begin{aligned}\Delta_x &= x^4+6\alpha_2 x^2+4\alpha_3 x+\alpha_4,\\ \Delta_z &= 4z^3-(3\alpha_2^2+\alpha_4)z-(\alpha_2\alpha_4-\alpha_2^3-\alpha_3^2),\\ g_2 &= 3\alpha_2^2+\alpha_4, \qquad g_3=\alpha_2\alpha_4-\alpha_2^3-\alpha_3^2.\end{aligned}$$

3. Montrons maintenant l'application de la propriété indiquée de la discriminante de l'équation de transformation à la recherche des conditions de la réduction des intégrales hyperelliptiques

$$\int\frac{\mathcal{F}(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

de la première espèce, où $\mathrm{R}(x)$ est un polynome d'un degré plus élevé que la quatrième, $\mathcal{F}(x)$ une fonction entière avec des coefficients indéterminés qui doivent être choisis de manière que l'intégrale se réduise à une intégrale elliptique lorsqu'il y a quelque relation algébrique entre les coefficients du polynome $\mathrm{R}(x)$. Comme premier exemple, prenons l'intégrale

$$(5)\qquad \int\frac{(x+t)\,dx}{\sqrt{x[x^4-4ax^3+(6a^2+b)x^2-4a^3x+a^4]}}=u.$$

Il faut choisir t de telle sorte que l'intégrale se réduise à une intégrale elliptique. Mettons

$$\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x}=y,$$

ou

$$(6)\qquad f(x,y)=x^2+(\alpha-y)x+\beta=0.$$

Supposons que $\dfrac{dy}{du}=0$ pour

$$y=e_i\qquad(i=1,2,3),$$
$$e_1+e_2+e_3=0.$$

De l'équation (6), nous obtenons

$$(7)\qquad (2x-\alpha-y)\frac{dx}{du}-x\frac{dy}{du}=0.$$

où

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}}{x - t}.$$

Il est évident que $\frac{dx}{du} = 0$ pour $x = 0$ et pour

$$(8) \qquad x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4 = 0.$$

Nommons les racines de l'équation (8) par

$$x_1, x_2, x_3, x_4.$$

Faisant dans l'équation (7)

$$y = e_1,$$

nous devons obtenir pour x deux valeurs satisfaisant à l'équation

$$(2x + \alpha - e_1)\frac{dx}{du} = 0.$$

Posons dans cette équation

$$\frac{dx}{du} = 0;$$

alors nous devons avoir

$$x^2 + (\alpha - e_1)x + \beta = (x - x_1)(x - x_2).$$

Faisant dans l'équation (7)

$$y = e_2,$$

nous devons obtenir pour x deux valeurs satisfaisant à l'équation

$$(2x + \alpha - e_2)\frac{dx}{du} = 0.$$

Posons dans cette équation

$$\frac{dx}{du} = 0;$$

alors nous devons avoir

$$x^2 + (\alpha - e_2)x + \beta = (x - x_2)(x - x_3).$$

Par conséquent,

$$[x^2 + (\alpha - e_1)x + \beta][x^2 + (\alpha - e_2)x + \beta]$$
$$= x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4,$$

et

$$2\alpha + e_3 = -4a,$$
$$2\beta + \alpha^2 + \alpha e_3 + e_1 e_2 = 6a^2 + b,$$
$$2\alpha\beta + \beta e_3 = -4a^3,$$
$$\beta^2 = a^4.$$

Dès ces équations, on trouve

$$e_3 = -(4a + 2\alpha),$$
$$\beta = a^2,$$
$$e_1 = 2a + \alpha + \sqrt{-b},$$
$$e_2 = 2a + \alpha - \sqrt{-b}.$$

La discriminante de l'équation (6) sera

$$\Delta_y = (\alpha - y)^2 - 4\beta = (\alpha - y)^2 - 4a^2.$$

Nommant les racines de l'équation

$$\Delta_y = 0$$

par

$$y = \eta_1, \qquad y = \eta_2,$$

faisons dans l'équation (7) $y = \eta_1$; alors nous aurons

$$2x - \eta_1 + \alpha = 0$$

et

$$\frac{d\eta_1}{du} = 0;$$

donc

$$\eta_1 = e_3.$$

Résolvant l'équation

$$\Delta_y = 0,$$

nous obtenons

$$y = \alpha \pm 2a.$$

C'est-à-dire pour e_3 nous recevons deux solutions :

1° $$e_3 = \alpha + 2a,$$
2° $$e_3 = \alpha - 2a,$$

et comme

$$e_3 = -4a - 2\alpha,$$

pour η_2 nous obtenons deux solutions :

$$\eta_2 = -4a, \qquad \eta_2 = \frac{4}{3}a.$$

Faisons maintenant

$$y = \eta_2;$$

alors dans l'équation (7) sera

$$2x + \alpha - \eta_2 = 0,$$

$$x \frac{d\eta_2}{du} \neq 0,$$

et alors il est indispensable que

$$\frac{dx}{du} = \infty, \qquad x \neq \infty.$$

Mais de l'équation (5)

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}}{x + t}.$$

On voit que

$$\frac{dx}{du} = \infty$$

lorsque

$$x + t = 0.$$

Donc

$$-2t + \alpha - \eta_2 = 0.$$

Ainsi pour t nous obtenons deux solutions :

1° $$t = a,$$

2° $$t = -a,$$

et deux intégrales réduites :

$$\int \frac{(x + a)\,dx}{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}},$$

$$\int \frac{(x - a)\,dx}{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}}.$$

4. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{(x - t)(x - s)\,dx}{\sqrt{x(x^3 + px^2 + qx + r)(x^3 + kx^2 + lx + m)}} = u.$$

On se propose de déterminer t et s avec la condition que, lorsque

entre les coefficients

$$p,\ q,\ r,\ k,\ l,\ m$$

il existe de certaines relations algébriques, l'intégrale u se réduit en une intégrale elliptique. En se servant de la substitution du troisième degré de Jacobi

$$\frac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-\varepsilon)^2}=y, \tag{9}$$

et posant que

$$\frac{dy}{du}=0$$

lorsque

$$y=e_1,\ e_2,\ e_3 \qquad (e_1+e_2+e_3=0),$$

nous obtenons :

$$(a)\quad x^3+(\alpha-e_1)x^2+(\beta+2e_1\varepsilon)x+\gamma-e_1\varepsilon^2=x^3-px^2-qx+r,$$
$$(b)\quad x^3+(\alpha-e_2)x^2+(\beta+2e_2\varepsilon)x+\gamma-e_2\varepsilon^2=x^3+kx^2+lx+m,$$
$$(c)\quad x^3+(\alpha-e_3)x^2+(\beta+2e_3\varepsilon)x+\gamma-e_3\varepsilon^2=x(x-\xi)^2,$$

où ξ est certainement une quantité inconnue. Dès ces équations nous avons

$$\alpha-e_1=p,\qquad \beta+2e_1\varepsilon=q,\qquad \gamma-e_1\varepsilon^2=r,$$
$$\alpha-e_2=k,\qquad \beta+2e_2\varepsilon=l,\qquad \gamma-e_2\varepsilon^2=m,$$
$$\gamma-e_3\varepsilon^2=0,\qquad (\alpha-e_3)^2=4\beta-8e_3\varepsilon,\qquad \xi=\frac{e_3-\alpha}{2}.$$

Puis

$$\alpha=\frac{m(k+2p)-r(p-2k)}{3(m-r)},$$

$$\beta=\frac{m(q-2l)-r(l+2q)}{3(m-r)},$$

$$\gamma=\frac{m+r}{3},\qquad \varepsilon=\frac{q-l}{2(k-p)},$$

$$e_1=\frac{(k-p)(m-2r)}{3(m-r)},\qquad e_2=\frac{(k-p)(r-2m)}{3(m-r)},\qquad e_3=\frac{(k-p)(r+m)}{3(m-r)}.$$

Outre cela il est facile à voir qu'entre les coefficients

$$p,\ q,\ r;\ k,\ l,\ m$$

il existe une relation

$$(q-l)^2=4(m-r)(k-p).$$

La discriminante de l'équation (9) sera

$$-27\Delta_y = [2(\alpha - y)^3 - 9(\alpha - y)(\beta - 2\varepsilon y) - 27(\gamma - \varepsilon^2 y)]^2$$
$$+ 4[3(\beta + 2\varepsilon y) - (\alpha - y)^2]^3.$$

On voit facilement que Δ_y est un polynome du troisième degré ; nommons les racines de ce polynome par

$$\eta_1, \ \eta_2, \ \eta_3.$$

En donnant à l'équation (9) la forme

$$f(x, y) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x - \gamma - (x - \varepsilon)^2 y = 0$$

et la différentiant, nous obtenons

$$(10) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} = 0.$$

Des recherches ci-dessus, on voit qu'en posant

$$y = e_1, \ e_2,$$

nous recevons

$$\frac{dy}{du} = 0, \qquad \frac{dx}{du} = 0.$$

La supposition

$$y = e_3$$

donne pour x trois valeurs : la première $x = 0$ qui correspond à l'équation

$$\frac{dx}{du} = 0$$

et les deux autres qui donnent simultanément

$$f(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Donc

$$y = e_3$$

est une des racines de la discriminante Δ_y ; posons

$$e_3 = \eta_1.$$

Prenons maintenant dans l'équation (10) successivement

$$y = \eta_2, \qquad y = \eta_3 ;$$

on voit que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Mais avec ces valeurs de y ni $\frac{dy}{du}$, ni $\frac{dx}{du}$ ne se convertissent en zéro; donc il faut que

$$\frac{dx}{du} = \infty,$$

ce qui peut être en prenant

$$x = t, \qquad x = s.$$

Donc

$$f(x, \eta_2) = (x - t)^2(x - \xi_2),$$
$$f(x, \eta_3) = (x - s)^2(x - \xi_3).$$

Ayant en vue que les racines de l'équation

$$\Delta_y = 0$$

sont

$$y = e_3, \qquad y = \eta_1, \qquad y = \eta_2,$$

divisons Δ_y par $y - e_3$. En égalant à zéro le reste Δ_{e_3} de cette division, nous recevrons encore une nouvelle condition algébrique

$$\Delta_{e_3} = 0$$

à laquelle doivent satisfaire les coefficients

$$p, q, r; k, l, m.$$

Le quotient de la division sera un polynome du second degré, et il sera facile d'en trouver les racines

$$\eta_2, \eta_3.$$

En substituant η_2, η_3 à la place de y dans l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

nous calculerons les racines doubles des équations

$$f(x, \eta_2) = 0, \qquad f(x, \eta_3) = 0.$$

Ces racines seront, évidemment,

$$x = t, \qquad x = s,$$

et le problème de la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{(x-t)(x-s)\,dx}{\sqrt{x(x^3-px^2+qx+r)(x^3+kx^2+lx-m)}}$$

à une intégrale elliptique sera résolu à l'aide d'opérations algébriques définies.

5. Maintenant nous voulons montrer qu'en cherchant les conditions de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques, il n'est pas nécessaire de rapporter la réduction à telle ou telle forme canonique de l'intégrale elliptique. Dans chaque cas particulier, on peut toujours déterminer à quelle forme d'intégrales elliptiques on peut réduire l'intégrale abélienne, et cela de la manière la plus facile.

Prenons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2+b)^2(x^2-3gx+h)}} = u,$$

et trouvons les conditions de sa réduction à l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{(y-e_1)^2(y-e_2)^2(y-e_3)^2}} = u \qquad (e_1+e_2+e_3=0)$$

au moyen de la substitution la plus simple :

(11) $$\frac{x^2-\alpha x+\beta}{x+\gamma} = y,$$

ou

(12) $$x^2-\alpha x+\beta-(x+\gamma)y = f(x, y) = 0.$$

De l'équation (12), nous avons

(13) $$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} = 0.$$

En se rappelant que

$$\frac{dy}{du} = 0$$

pour

$$y = e_1,\ e_2,\ e_3,$$

faisons dans l'équation (13)

$$y = e_1.$$

Alors nous devons avoir ou

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{du} = 0.$$

Pour reconnaître laquelle de ces deux suppositions a lieu, remarquons que la partie principale dans le développement de $(y - e_1)$ aura la forme

$$\lambda(u - v)^3,$$

v étant une constante. Donc

$$\frac{x^2 + (\alpha - e_1)x + \beta - \gamma e_1}{x + \gamma} = \lambda(u - v)^3 + \ldots.$$

Portant

$$x^2 + (\alpha - e_1)x + \beta - \gamma e_1 = x^2 + b, \qquad \frac{dx}{du} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\alpha - e_1 = 0, \qquad \beta - \gamma e_1 = b.$$

Faisant

$$y = e_2, e_3,$$

nous devons avoir

$$\frac{x^2 + (\alpha - e_i)x + \beta - \gamma e_i}{x + \gamma} = \mu_i(u - v_i)^3 + \ldots \qquad (i = 2, 3).$$

D'où nous obtenons

$$(14) \qquad \begin{cases} x^2 + (\alpha - e_2)x + (\beta - \gamma e_2) = (x - x_1)^2, \\ x^2 + (\alpha - e_3)x + (\beta - \gamma e_3) = (x - x_2)^2, \end{cases}$$

où x_1, x_2 sont les racines de l'équation

$$x^2 + 3gx + h = 0.$$

Outre cela, d'après les équations (14), on voit que

$$f(x, e_i) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, e_i)}{\partial x} = 0 \qquad (i = 2, 3);$$

donc

$$y = e_2, e_3$$

sont les racines de la discriminante de l'équation (12); c'est-à-dire e_2, e_3 satisfont à l'équation

$$y^2 - (4\gamma - 2\alpha)y + \alpha^2 - 4\beta = 0.$$

L'expression (14) donne

$$x^4 + (2\alpha + e_1)x^3 + (2\beta - \gamma e_1 + \alpha^2 + \alpha e_1 + e_2 e_3)x^2$$
$$+ (2\alpha\beta - \alpha\gamma e_1 + \beta e_1 - 2\gamma e_2 e_3)x + (\beta^2 - \beta\gamma e_1 + \gamma^2 e_2 e_3)$$
$$= x^4 + 6gx^3 + (9g^2 + 2h)x^2 + 6ghx + h^2.$$

De toutes ces équations, nous obtenons :

$$\alpha = e_1, \qquad \beta - \alpha\gamma = b,$$
$$\alpha = 2g, \qquad 4\gamma - 2\alpha = e_1, \qquad \alpha^2 - 4\beta = e_2 e_3,$$
$$\gamma = \frac{3}{2}g, \qquad \beta = 3g^2 - h,$$
$$b = 6g^2 - h,$$
$$e_1 = 2g, \qquad e_2 = -g + \sqrt{9g^2 - 4h}, \qquad e_3 = -g - \sqrt{9g^2 - 4h}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 6g^2 - h)^2 (x^2 + 3gx + h)}}$$
$$= \int \frac{dy}{\sqrt[3]{[y^3 + (4h - 12g^2)y - (16g^3 - 8gh)]^2}}.$$

6. Prenons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 2ax + b)^3 (x - c)^2}} = u,$$

et trouvons les conditions de la réduction de cette intégrale à une intégrale elliptique à l'aide d'une substitution de Jacobi, la plus simple possible. Donnons à l'intégrale réduite la forme

$$\int \frac{dy}{\sqrt[4]{(y - e_1)^3 (y - e_2)^3}} \qquad (e_1 + e_2 = 0).$$

Posant

$$x^2 + 2\alpha x - \beta = \frac{1}{\gamma}y,$$

et remarquant que

$$y - e_i = \lambda(u - v_i)^4 + \ldots \qquad (i = 1, 2).$$

e_i étant une constante, nous devons obtenir

$$x^2 + 2\alpha x + \beta - \frac{1}{4}e_1 = x^2 + 2ax + b.$$

D'où

$$\alpha = a, \qquad \beta - \frac{1}{4}e_1 = b.$$

De la même manière

$$x^2 + 2\alpha x + \beta - \frac{1}{4}e_2 = (x + c)^2.$$

D'où

$$\alpha = c = a, \qquad \beta - \frac{1}{4}e_2 = c^2 = a^2,$$

$$\beta = \frac{a^2 + b}{2}, \qquad e_1 = 2(a^2 - b).$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 2ax + b)^3(x + a)^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt[4]{[y^2 - 4(a^2 - b)^2]^3}}.$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

HÉMARDINQUER (C.). — *Notions de Mathématiques supérieures. (Calcul intégral et différentiel.)* In-8° jésus, VI-144 p. avec fig. Paris, Paulin et Cie. 3 fr.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten d. Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Herausgeg. von Herm.-J. Klein. 17. Jahrg. 1906. In-8°, VIII-403 p. avec 6 planches. Leipzig, Mayer. 8 m.

LOVE (A.-E.-H.). — *The gravitational stability of the Earth.* In-4°. London, Dulau. 3 m.

METH (Paul). — *Ueber die allgemeinen Jupiterstörungen von* (138) *Tolosa.* (Dissert.) Gr. in-8°, 51 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m. 60 pf.

MEYER (M.-Wilh.). — *Kometen und Meteore.* In-8°, 104 p. avec fig. Stuttgart, Franckh. 1 m.; relié, 2 m.

Montel (P.). — *Sur les suites infinies de fonctions* (Thèse). In-4°, 100 p. Paris, Gauthier-Villars.

Müller (Heinr.). — *Einführung in die Differential- u. Integralrechnung. Zum Gebrauch an höheren Schulen.* In-8°, v-38 p. Leipzig, Teubner. 1 m. 20 pf.

Neisser (Karl). — *Ptolomäus oder Kopernikus. Eine Studie über die Bewegung der Erde u. über den Begriff der Bewegung.* In-8°, v-154 p. Leipzig, Barth. (*Natur- u. kulturphilosophische Bibliothek.* 7. Bd.) 3 m.; relié, 3 m. 80 pf.

Reim. — *Das regelmässige Dodekaeder u. Ikosaeder in ihren wechselseitigen Beziehungen nach Angaben von Prof. Huebner.* (Progr.) In-8°, 28 p. avec 2 planches. Schweidnitz, Heege. 1 m. 50 pf.

Sacco (Fed.). — *Essai schématique de Sélénologie.* In-8°, 47 p. avec 4 planches. Turin, Clausen. 4 fr.

Schülke (A.). — *Differential- u. Integralrechnung im Unterricht.* Gr. in-8°, 30 p. avec 7 fig. Leipzig, Teubner. 1 m.

Serviss (G.-P.). — *Pleasures of the telescope. An illustrated guide for amateur Astronomers.* In-8°, 208 p. London, Appleton. 6 sh.

Tannenberg (W. de). — *Cours de Géométrie analytique,* 3e fasc.: *Courbes planes en général.* In-4°. Paris, Vuibert et Nony.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgeg. von Mor. Cantor. IV. Bd. von 1759-1799. 2. Lfg. Leipzig, Teubner. 5 m. 60 pf.

Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. (I. 1. F. Klein, *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen.* Bearb. v. Rud. Schimmacc. 1. Tl. IX-236 p. avec 8 fig.; relié, 5 m. — II. H. Minkowsky, *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie.* VIII-236 p. avec 82 fig. Relié : 8 m.).

Weber (H.) u. J. Wellstein. — *Encyclopädie der Elementar-Mathematik.* (In 3 Bdn.) 3. Bd. Angewandte Elementar-Mathematik. Bearb. von H. Weber, J. Wellstein u. R.-H. Weber. Gr. in-8°, XIII-666 p. avec 358 fig. Leipzig, Teubner. Relié : 14 m.

Bryan (G.-H.). — *Thermodynamics. An introductory Treatise.* In-8°. London, Nutt. 7 sh.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. VIVANTI. — ELEMENTI DELLA THEORIA DELLE FUNZIONI POLIEDRICHE E MODULARI. Collection des *Manuels Hœpli*. Milan, Hœpli, 1906.

Ce petit Livre a pour but de préparer le lecteur à l'étude des leçons sur l'*Icosaèdre* de Klein et de la *Théorie des fonctions modulaires elliptiques* de Klein et Fricke. Il suppose acquises des notions sur les fonctions de variables complexes et les surfaces de Riemann, les fonctions elliptiques et les intégrales abéliennes d'une part et sur la résolution algébrique des équations d'autre part. Au contraire, il reprend, dès le début, la théorie des groupes d'opérations et des substitutions linéaires, faisant un choix très heureux des propriétés qui sont essentielles pour l'objet que l'on a en vue.

L'Ouvrage est divisé en deux Parties :

PREMIÈRE PARTIE. — *Les groupes polyédriques et le groupe modulaire* (p. 1-268).

DEUXIÈME PARTIE. — *Les fonctions et les équations polyédriques et modulaires* (p. 271-403).

Il est disposé d'une façon très pratique, avec de nombreux renvois aux numéros précédents et un index alphabétique des principales définitions.

Le lecteur pourra y prendre une idée très nette des groupes polyédriques et des équations correspondantes. Pour l'étude, plus difficile, des fonctions modulaires, il sera bien préparé par des explications précises sur le réseau modulaire et par des exemples simples de fonctions construites avec les fonctions σ de Weierstrass.

PREMIÈRE PARTIE.

Pour déterminer tous les groupes finis de substitutions linéaires qui sont possibles, on montre d'abord qu'un pôle (ou point fixe) commun à ν_i substitutions, l'identité comprise, fait partie d'un sys-

tème de $\frac{n}{\nu_i}$ pôles équivalents. Il en résulte qu'à tout groupe fini correspond nécessairement un système de valeurs entières et positives des nombres n, ν_1, ν_2, ν_3, satisfaisant à la relation

$$\sum_i \frac{n}{\nu_i}(\nu_i - 1) = 2n - 2.$$

L'existence de groupes correspondant aux cinq solutions de cette question d'arithmétique est établie en étudiant directement les groupes de rotations pour les polyèdres réguliers, tétraèdre, octaèdre, icosaèdre auxquels on adjoint le groupe cyclique et le groupe que Klein appelle le groupe diédrique (le dièdre se composant des deux faces d'un polygone régulier de m côtés).

L'introduction du groupe étendu (ampliato, erweiterte) est très nettement justifiée par cette proposition : si un groupe G de substitutions est permutable avec une réflexion R, et si P désigne en général un élément de G, les opérations P, PR constituent un groupe $\overline{G}$; $\overline{G}$ est appelé le *groupe résultant de* G *par extension*.

On calcule l'expression analytique des substitutions correspondant aux cinq groupes finis, et l'on construit les réseaux de triangles qui représentent ces groupes sur le plan.

Tout le reste de la première Partie (p. 143-168) est consacré à des considérations générales sur les réseaux de triangles et en particulier au réseau qui correspond au groupe modulaire.

Les triangles considérés sont limités par des droites ou des arcs de cercle, et les réseaux peuvent être déduits d'un triangle au moyen de symétries, de façon à ne se recouvrir jamais et à recouvrir tout le plan ; on appelle bitriangle la figure formée de deux triangles symétriques, en se limitant au cas où cette figure a une forme triangulaire (des deux moitiés du bitriangle, l'une est couverte de hachures, l'autre laissée en blanc). On démontre qu'un réseau de triangles est l'image d'un groupe de substitutions linéaires et du groupe étendu correspondant ; on définit le domaine fondamental d'un sous-groupe invariant, la surface fermée qui s'en déduit en rapprochant les bords homologues de ce domaine fondamental et l'on détermine le genre de cette surface.

Le groupe modulaire Γ est défini par son domaine fondamental ; mais, avant tout, on retrouve la définition arithmétique de ses

substitutions,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des entiers.

Une classe simple de sous-groupes de Γ s'obtient à l'aide des congruences

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}.$$

Le cas de $n = 2$ est particulièrement simple et important; il est placé en avant comme modèle.

Un autre principe, expliqué ici pour la recherche des sous-groupes de Γ, est le théorème d'existence de Klein, se rapportant à un réseau de $2s$ triangles tracé sur une surface fermée. Il conduit à considérer dans le plan un réseau régulier de triangles dont les angles sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{n}$. Pour $n = 2, 3, 4, 5$ on retrouve les réseaux des polyèdres réguliers. Dans le cas de n entier quelconque, on trouve un sous-groupe $\Gamma_{\mu(n)}$ de Γ; le groupe adjoint $G_{\mu(n)}$ donne lieu à une étude intéressante quand n est premier; dans ce cas, on cherche les sous-groupes de $G_{\mu(n)}$ à l'aide des imaginaires introduites par Galois dans la théorie des nombres.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour chacun des groupes polyédriques, on obtient trois formes invariantes de même degré en z_1 et z_2, en considérant les sommets, les centres des faces, les milieux des arêtes du polyèdre sphérique correspondant; ces trois formes se reproduisent multipliées par un même facteur, quand on effectue une substitution du groupe; elles satisfont à une relation linéaire identique, elles permettent d'exprimer toutes les formes invariantes.

En prenant le quotient de deux formes invariantes de même degré et en posant $z = \frac{z_1}{z_2}$, on obtient une fonction polyédrique de z:

$$Z = F(z).$$

C'est le problème inverse (étant donné Z, calculer z), qui conduit à une équation polyédrique. A la fonction Z de degré zéro en z_1

et z_2 $\left(\frac{z_1}{z_2} = z\right)$, on peut associer une fonction du deuxième degré X (z_1, z_2) telle que z_1 et z_2 sont définis simplement quand on se donne les valeurs de Z et de X (z_1, z_2).

Des questions analogues se posent pour le groupe modulaire. La théorie des fonctions elliptiques fournit une fonction J qui se reproduit quand on passe d'un point à son homologue par rapport au réseau modulaire et qui prend aux sommets de ce réseau les valeurs 1, 0, ∞; J est désignée sous le nom de *fonction modulaire principale;* les fonctions qui ont les propriétés correspondantes pour un sous-groupe du groupe modulaire Γ sont appelées *fonctions modulaires.*

Étant donné un sous-groupe Γ_s d'indice fini de Γ, il existe des fonctions modulaires relatives à ce sous-groupe; elles sont liées à J par des relations algébriques.

Après avoir expliqué comment on peut parvenir à ce résultat fondamental, on construit effectivement des fonctions modulaires dans des cas simples, en particulier la fonction $\lambda = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ donnant lieu à la relation

$$J = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}.$$

En égalant à une constante une fonction modulaire $Z = f(z)$ on obtient une équation modulaire.

Les équations polyédriques et modulaires peuvent toutes se résoudre par une même méthode qui se fonde sur la considération d'une équation différentielle de Schwartz. On arrive ainsi à exprimer les irrationnelles polyédriques et modulaires par des séries hypergéométriques en Z; on peut aussi faire ce calcul seulement pour l'irrationnelle modulaire correspondant à J, puis exprimer en fonction de celle-ci l'irrationnelle diédrique (pour $m = 3$) et les irrationnelles tétraédrique, octaédrique, icosaédrique.

Ces méthodes donnent la résolution par voie transcendante des équations considérées; cette résolution est étudiée à nouveau, au point de vue de l'Algèbre.

En laissant d'abord de côté l'équation de l'icosaèdre on obtient très simplement des résolvantes (non équivalentes) des équations polyédriques, par la considération de sous-groupes invariants.

Pour l'équation icosaédrique dont le groupe est simple, on construit la résolvante du cinquième degré, qui correspond aux cinq ternes de médianes rectangulaires, la *résolvante principale* de la forme

$$Y^5 - 5\alpha Y^2 + 5\beta Y - \gamma = 0,$$

et la résolvante du sixième degré qui correspond aux six sous-groupes diédriques équivalents d'ordre 10.

On explique comment la conception de résolvante peut s'étendre à l'équation modulaire et l'on calcule deux résolvantes qui coïncident avec des équations obtenues à propos de l'icosaèdre.

Enfin, pour terminer, on montre le parti qu'on peut tirer, pour la résolution des équations algébriques, des résultats établis relativement aux équations polyédriques. Ainsi, étant donnée une équation du cinquième degré, comme on réussit à construire l'équation icosaédrique dont l'équation donnée est la *résolvante principale,* les racines de l'équation du cinquième degré se trouvent exprimées en fonction de l'irrationnelle icosaédrique.

E. Lacour.

R. BAIRE. — Leçons sur les théories générales de l'Analyse. Tome I. In-8 de 232 pages. Paris, Gauthier-Villars.

Rassembler les théories fondamentales de l'Analyse en un livre de dimensions restreintes, mais avec la rigueur nécessaire dans l'établissement des principes : c'est ce que M. Baire s'est proposé, et ce premier Volume, substantiel, d'une précision élégante, montre déjà qu'il y a heureusement réussi.

Ce Volume contient trois Chapitres :

I. Nombres irrationnels, limites, continuité (p. 1-62).

II. Dérivées et intégrales des fonctions de variables réelles (p. 63-142).

III. Arcs, aires planes, volumes, aires des surfaces courbes. Intégrales curvilignes, intégrales de surface (p. 143-232).

Les premières notions sont exposées suivant la méthode employée déjà par l'auteur dans l'Opuscule *Théorie des nombres*

irrationnels, des limites et de la continuité; de plus, ici, l'exposé purement analytique de ces notions est suivi de l'étude de la mesure des grandeurs concrètes. Cette revision des premiers principes donne au lecteur l'occasion de mettre de la précision et de l'ordre dans ses idées, elle fournit, en même temps, le thème dont le souvenir guidera au milieu des développements plus compliqués du calcul intégral.

J'insisterai surtout sur les parties relatives aux intégrales simples ou multiples.

Pour définir une intégrale simple prise dans un intervalle fini, on considère, en subdivisant l'intervalle et en prenant pour chaque intervalle partiel la borne inférieure et la borne supérieure de la fonction, deux ensembles A et B tels que tout nombre de A est inférieur à tout nombre de B. Dans le cas où la borne supérieure de A est égale à la borne inférieure de B, leur valeur commune est, par définition, la valeur de l'intégrale.

Pour définir l'aire d'une domaine D quelconque, on considère, d'une part, les aires de tous les domaines polygonaux contenus dans D, d'autre part, les aires de tous les domaines polygonaux contenant D; si la borne supérieure du premier ensemble est égale à la borne inférieure du second, leur valeur commune est, par définition, l'aire de D. On déduit de là l'évaluation classique d'une aire à l'aide d'intégrales simples.

La valeur d'une intégrale double est définie à l'aide de deux ensembles ayant une borne commune, en généralisant le procédé qui a servi pour l'intégrale simple (la fonction de deux variables $f(x, y)$ qui intervient ici est supposée continue).

Pour l'évaluation d'une intégrale double, la règle classique est la suivante : on regarde y comme constant, on intègre par rapport à x entre deux limites qui dépendent de y, ce qui donne une fonction de y; puis on intègre cette fonction de y entre deux limites fixes. Cette règle est évidente si la fonction $f(x, y)$ reste constante quand x varie, y restant constant. M. Baire ramène le cas général à ce cas particulier en introduisant une fonction auxiliaire $\varphi(x, y)$ qui coïncide avec la fonction donnée $f(x, y)$ pour une valeur donnée x_i de x, mais qui garde la même valeur quand, y restant constant, x varie de x_i à $x_i + dx_i$.

Cette idée d'interpréter les calculs mêmes auxquels conduit

l'application de la règle se retrouve à propos du changement de variables dans les intégrales doubles.

Soient

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

les relations qui définissent le changement de variables dans l'intégrale double

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy$$

étendue à un domaine fermé A. Dans le cas particulier où φ et ψ sont linéaires en u et v, on reconnaît de suite qu'à un triangle d'aire t pris dans le plan (u, v) correspond dans le plan (x, y) un triangle d'aire T tel que

$$T = t\,|\,D\,|,$$

D étant le déterminant fonctionnel $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$; la règle relative au changement de variables se déduit immédiatement de là.

Dans le cas général [en supposant pourtant que la correspondance entre les plans (u, v) et (x, y) satisfait à des conditions qui sont précisées], on prend comme intermédiaire, dans le voisinage du point (u_0, v_0), la correspondance définie par les relations linéaires en u, v

$$\xi = \varphi(u_0, v_0) + (u - u_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v_0},$$

$$\eta = \psi(u_0, v_0) + (u - u_0)\frac{\partial\psi}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial\psi}{\partial v_0},$$

et l'on montre à l'aide de cet intermédiaire que, à un carré de côté ρ du plan (u, v) ayant un sommet en (u_0, v_0), correspond, dans le plan (x, y), un domaine R tel que

$$R = \rho^2\,|\,D_0\,| + \eta\rho^2,$$

η tendant vers zéro avec ρ. Il n'y a plus qu'à faire la somme des éléments de l'intégrale relatifs à ces domaines partiels R et à passer à la limite pour obtenir l'intégrale

$$\int\int f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv$$

étendue au domaine du plan (u, v) qui correspond au domaine A du plan (x, y).

Ce qui vient d'être dit de l'intégrale double s'étend, avec de légères modifications, à l'intégrale triple.

Pour définir l'aire d'une surface courbe, les difficultés sont plus grandes : en s'inspirant des plus récents travaux faits sur cette question, l'auteur a cherché à donner à l'intégrale classique un sens géométrique et conforme aux idées intuitives. Voici quelques indications à ce sujet.

Soient

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

les formules qui définissent la surface Σ, les fonctions f, φ, ψ satisfaisant à des conditions définies avec précision; à un domaine Γ du plan (u, v) correspond une surface S, portion de la surface Σ. Il s'agit de donner un sens à la notion d'aire de la surface S.

Pour cela, on effectue dans le plan (u, v) un carrelage de côté ρ; soit *abcd* un des carrés, les sommets a, b, c ayant pour coordonnées

$$(u_0, v_0), \quad (u_0 + \rho, v_0), \quad (u_0, v_0 - \rho);$$

on considère la correspondance auxiliaire définie par les formules

$$\xi = f(u_0, v_0) + (u - u_0)\frac{\partial f}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial f}{\partial v_0},$$

$$\eta = \varphi(u_0, v_0) + (u - u_0)\frac{\partial \varphi}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial \varphi}{\partial v_0},$$

$$\zeta = \psi(u_0, v_0) + (u - u_0)\frac{\partial \psi}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial \psi}{\partial v_0}.$$

Au carré *abcd* ces formules font correspondre un parallélogramme P dont l'aire est donnée par l'égalité

$$P = \rho^2 H(u_0, v_0),$$

en posant

$$H^2(u, v) = \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2 \qquad (H > 0).$$

Au même carré *abcd* correspond, sur la surface S, un morceau de surface ABCD; on explique comment on est conduit à considérer le parallélogramme P comme représentant ce morceau de surface ABCD avec une approximation d'autant plus grande que le côté du carrelage est plus petit.

La somme des aires des parallélogrammes P correspondant à tous les carrés *abcd* entièrement contenus dans le domaine Γ a pour limite, quand ρ tend vers zéro, l'intégrale double

$$I = \int\int H(u, v)\, du\, dv.$$

C'est ce nombre I que l'on appelle *aire de la portion de surface* S.

Afin de préciser le sens de ce nombre I, on définit une surface S_1, approchée de S à ε près (les deux surfaces S et S_1 étant supposées se correspondre au point de vue de la géométrie de situation, la distance de deux points correspondants est toujours plus petite que ε), et l'on étend le sens du mot *surface polygonale* (la surface est encore formée d'un nombre fini de portions de plans, mais chacune de ces portions peut être limitée par des courbes planes).

Ces définitions introduites, on montre que, étant donnée la surface S, on peut construire une surface polygonale variable S_1 formée par la juxtaposition de surfaces planes dont chacune est l'image de plus en plus approchée d'un morceau de S (1), et telle que l'aire de S_1 a pour limite le nombre I; d'autre part, il est impossible de trouver une surface polygonale variable S_1 remplissant les conditions qui viennent d'être définies et telle que l'aire de S_1 tende vers un nombre I' moindre que I. Le nombre I apparaît ainsi comme ayant, par rapport à la surface S, une propriété intrinsèque, indépendante de sa représentation paramétrique.

On voit, par ces indications trop sommaires, que l'auteur a mis, dans les 232 pages de son premier volume, des discussions approfondies quand la difficulté du sujet l'exigeait. Pour les questions plus simples, l'exposition, souvent originale, est très condensée; les explications sont réduites au nécessaire, données de suite sous une forme précise et mathématique; les raisonnements sont adaptés et ajustés de façon à réaliser la plus grande économie, sinon d'efforts de la part du lecteur, du moins d'intermédiaires dans les démonstrations et dans l'enchaînement des idées.

---

(1) De plus, les portions de surface plane de S_1 sont juxtaposées entre elles comme le sont les morceaux de S.

La deuxième et dernière partie de ce Cours d'Analyse comprendra la théorie des fonctions analytiques, les équations différentielles, les applications géométriques et les principes essentiels de la théorie des fonctions elliptiques.

E. LACOUR.

HEIBERG (J.-L.) und ZEUTHEN (H.-G.). — EINE NEUE SCHRIFT DES ARCHIMEDES (Sonderabdruck aus *Bibliotheca mathematica*, III. Folge, VII. Band, p. 322-363). Leipzig, Teubner, 1907.

M. Heiberg a découvert, à Constantinople, dans le *Metochion* du cloître du Saint-Tombeau de Jérusalem, un manuscrit dont l'écriture, qui date du XIIIe siècle, recouvre plusieurs écrits d'Archimède, en belles minuscules du Xe siècle; en lavant, sans gratter, il a pu lire le texte d'Archimède.

Le nouveau manuscrit permettra d'améliorer sur quelques points le texte de quelques-uns des Ouvrages d'Archimède qui sont venus jusqu'à nous : il contient, à peu près complètement, le texte grec du Περὶ ὀχουμένων, Ouvrage qui ne nous était connu que par sa traduction latine, et le début d'un Ouvrage sur le στομάχιον, dont M. Suter a fait connaître un fragment, en arabe. Tout cela ne manquera pas d'intéresser les érudits; mais comment ne pas éprouver quelque émotion devant la découverte, dans ce même manuscrit, d'un fragment considérable d'un Ouvrage d'Archimède, dont l'existence seule était connue, et qui est capital pour l'intelligence complète de la pensée du grand géomètre?

Cet Ouvrage a pour titre : Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος. Il a été commenté par Theodosios et cité plusieurs fois par Héron. De l'un des deux énoncés que nous a conservés Héron, on ne trouve pas trace; mais pour l'autre, dont il sera question plus loin, qui concerne le volume d'un onglet cylindrique, la démonstration peut être complètement reconstituée, grâce à ce qu'il en subsiste dans le fragment découvert par M. Heiberg.

Celui-ci publie, dans l'*Hermès*, le texte grec avec un commentaire philologique; il en donne une traduction complète dans la *Bibliotheca mathematica*; elle occupe une vingtaine de pages.

La beauté de ce fragment a certainement récompensé M. Heiberg des longs et pénibles efforts que la lecture a dû lui causer : tous ceux qui l'étudieront sauront gré à M. Heiberg de sa perspicacité et de sa persévérance.

Cette traduction est suivie d'un très important commentaire de M. Zeuthen, à peu près aussi long que le texte d'Archimède. Il n'est pas besoin de rappeler ici combien M. Zeuthen s'est assimilé la façon de penser et de raisonner des anciens; à quel point il est familier avec la pensée d'Archimède, c'est ce que suffiraient à montrer les indications qu'il donne pour la restitution des passages qui manquent dans le texte, surtout vers la fin, indications qui apportent une pleine certitude : nul doute qu'Archimède, s'il revenait au monde, se reconnaîtrait dans les indications proposées par M. Zeuthen, pourvu que M. Heiberg voulût bien les lui traduire.

L'éminent historien discute, en outre, divers problèmes très intéressants que soulève le manuscrit découvert et traduit par M. Heiberg : quels renseignements le nouvel écrit nous apporte-t-il pour l'histoire générale des Mathématiques? Quelle place peut-on lui attribuer parmi les autres Ouvrages d'Archimède qui nous sont parvenus? Quel est le rôle d'Archimède dans la constitution de la Statique? Quelles lumières le nouvel écrit apporte-t-il sur la façon de travailler d'Archimède, sur ses méthodes, essentiellement distinctes, d'invention et de démonstration?

Archimède insiste lui-même, au début, sur l'importance de son Ouvrage :

« ... J'ai trouvé bon de t'exposer et de consigner dans ce Livre une méthode particulière qui te permettra d'avoir un fil conducteur pour étudier par la Mécanique certaines questions mathématiques. D'après ma conviction, elle est aussi utile pour démontrer les théorèmes; maintes choses qui m'étaient d'abord devenues claires par la Mécanique ont été ensuite démontrées par la Géométrie, parce que la première façon de traiter les questions ne constitue pas encore une démonstration. La démonstration est rendue plus facile quand, grâce à cette méthode, on est parvenu à une intuition du problème. Démocrite, qui a donné, sans démonstration, l'expression du volume du cône et de la pyramide, a grandement contribué à la connaissance des théorèmes sur ces volumes, dont Eudoxe a trouvé, le premier, la démonstration. De même, j'ai

trouvé (par une semblable intuition) le théorème que je vais faire connaître, et je me sens obligé de faire connaître la méthode : d'une part, parce que j'en ai parlé et qu'on ne doit pas croire que je parlais en l'air; d'autre part, parce que, dans ma conviction, elle est très utile en Mathématiques et que les chercheurs contemporains ou à venir pourront, par cette méthode, découvrir de nouveaux théorèmes ... ».

A propos de la phrase relative à Démocrite et à Eudoxe, M. Zeuthen fait observer que, dans la Préface du premier Livre sur la sphère et le cylindre, Archimède ne nomme pas Démocrite, mais parle du théorème sur le volume de la pyramide ou du cône comme s'il avait été complètement inconnu avant Eudoxe. Celui-ci l'a *démontré* en partant du lemme célèbre, qui devrait porter son nom, mais qui est connu sous le nom de *lemme d'Archimède*, en raison, sans doute, du continuel usage qu'en a fait ce dernier. Ainsi, à cause de l'extrême importance qu'il attribuait à la rigueur des démonstrations, Archimède avait pu omettre alors le nom de Démocrite, si bien fondée qu'ait été l'intuition de ce dernier. Dans le présent écrit, au contraire, il insiste sur le rôle de Démocrite, d'autant que lui-même va exposer des *vues*, que, malgré leur importance pour l'invention, il ne confond pas avec des *démonstrations*, qui lui seraient d'ailleurs faciles.

Dans l'énumération des propositions élémentaires de Statique qu'Archimède place en tête de son écrit, figure la règle pour trouver le centre de gravité d'un cône. M. Zeuthen fait observer que la détermination de ce centre de gravité, qui équivaut à l'évaluation de l'intégrale $\int x^3 dx$, ne figure dans aucun écrit connu d'Archimède.

Afin de faire bien comprendre l'esprit de la méthode qu'Archimède applique à de nombreux exemples, je reproduis deux de ces exemples, en employant le langage et les notations modernes; le premier est bien connu, par le Traité *Sur la quadrature de la parabole* (¹). Je l'ai conservé toutefois, à cause de sa simplicité, de deux passages caractéristiques que j'aurai à citer et des observations auxquelles il prête.

(¹) ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge* (traduction française de M. J. Mascart), p. 147.

Considérons un triangle OAB, rectangle en O, et la parabole dont l'équation est

$$y = \frac{bx}{2a^2}(2a - x),$$

en supposant les axes dirigés suivant OA et OB et en prenant $OA = 2a$, $OB = 2b$. Cette parabole est tangente en A à l'hypoténuse AB et passe par le point O; le problème consiste à trouver l'aire S du segment de cette parabole contenu à l'intérieur du triangle. Or, si l'on désigne par Y l'ordonnée de AB qui correspond à l'abscisse x, on voit de suite que cette ordonnée est liée à l'ordonnée de la parabole par la relation

$$2ay = x\mathrm{Y}.$$

Soit C le milieu du côté AB; prolongeons la médiane AC, d'une longueur égale à cette médiane, jusqu'en G; la relation précédente montre que C est le centre de gravité du système formé par l'ordonnée Y, d'une part, et, de l'autre, par l'ordonnée y de la parabole transportée, parallèlement à elle-même, de manière que son milieu soit en G [1]; « puisque le triangle OAB se compose des ordonnées de la droite et que le segment de parabole se compose des ordonnées de cette parabole », il résulte de là que le point C est le centre de gravité du système formé par le triangle, d'une part, et, de l'autre, par le segment de parabole transporté parallèlement à lui-même de manière que son centre de gravité soit en G. D'où résulte la relation

$$2ab \times \frac{2a}{3} = \mathrm{S} \times 2a, \qquad \mathrm{S} = \frac{4ab}{3}.$$

« Cela est devenu clair .... Cela n'est pas démontré par ce qui a été dit, mais on voit que le résultat est exact. Ayant vu l'exactitude du résultat, sans qu'il fût démontré, j'ai imaginé une démonstration géométrique, que j'ai déjà publiée et que je rapporterai plus loin. »

Le passage où figurait cette démonstration, qui nous est connue

(1) Archimède s'exprime, ici et dans des cas analogues, d'une façon légèrement différente : C est regardé comme le point d'appui d'un levier dont les extrémités sont le point G et le point où se termine l'ordonnée Y.

d'ailleurs par le Traité *Sur la quadrature de la parabole*, ne s'est pas retrouvé dans le fragment découvert par M. Heiberg.

Considérons maintenant l'ellipsoïde engendré par la rotation, autour de l'axe des z, de l'ellipse dont l'équation est, dans le plan des xz,

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2}(2az - z^2),$$

et le cône, limité à son sommet et à sa base dans le plan des xy, engendré par la rotation, autour du même axe, de la droite dont l'équation est, toujours dans le plan des xz,

$$x = \frac{b}{a}(2a - z);$$

l'identité

$$\left[\pi\frac{b^2}{a^2}(2az - z^2) + \pi\frac{b^2}{a^2}(2a - z)^2\right]2a = 4\pi b^2(2a - z)$$

montre que le point A de l'axe des z dont la cote est $2a$ est le centre de gravité du système formé, d'une part, par la section horizontale, de cote z, faite dans le cylindre droit, ayant pour axe l'axe des z, et, pour base, dans le plan des xy, le cercle de centre O et de rayon $2b$, et, de l'autre, par la superposition des deux sections horizontales de même cote pratiquées respectivement dans l'ellipsoïde et dans le cône, puis transportées parallèlement à elles-mêmes, de façon que leurs centres viennent au point B de l'axe des z dont la cote est $4a$. Puisque « l'ellipsoïde et le cône se composent de ces sections horizontales, ainsi que le cylindre » limité à ses bases dans le plan des xy et dans le plan horizontal de cote $2a$, il suit de là que le point A est le centre de gravité du système formé par le cylindre, d'une part, et, de l'autre, par la superposition de l'ellipsoïde et du cône auxquels on a fait subir une translation telle que leurs centres de gravité viennent coïncider avec le point B; de là résulte l'égalité, où V désigne le volume de l'ellipsoïde,

$$\left(V + \frac{8\pi ab^2}{3}\right)2a = 8\pi b^2 a^2,$$

d'où

$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

Le précédent raisonnement est d'abord employé par Archimède pour obtenir le volume de la sphère, et le paragraphe consacré à ce sujet se termine par la phrase suivante, dont l'intérêt ne peut échapper au lecteur.

« Du théorème que la sphère est quadruple du cône dont la base est un grand cercle et dont la hauteur est le rayon de la sphère, m'est venue la pensée que la surface de la sphère est quadruple de son grand cercle ; je suis parti de cette vue : de même qu'un cercle est équivalent au triangle dont la base est la circonférence et la hauteur le rayon du cercle, de même, une sphère est équivalente à un cône dont la base est un grand cercle de cette sphère et dont la hauteur est égale à son rayon. »

Ce même raisonnement est appliqué par Archimède à l'évaluation des volumes de segments d'ellipsoïdes, de paraboloïdes, d'hyperboloïdes (à deux nappes) de révolution, limités par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution. Des raisonnements analogues, où intervient alors la règle relative au centre de gravité du cône, le conduisent à la détermination du centre de gravité de pareils volumes.

Les dernières pages de son écrit, celles où se trouvent le plus grand nombre de lacunes, concernent l'évaluation du volume d'un onglet cylindrique : un cylindre de révolution est inscrit dans un prisme à base carrée ; par le centre de la base inférieure et un côté de la base supérieure on fait passer un plan : le volume limité par ce plan, la surface du cylindre et le plan de la base inférieure est le sixième du volume du prisme.

Archimède effectue d'abord cette évaluation par la méthode mécanique dont on vient de parler. Il donne ensuite une démonstration géométrique, démonstration dont il ne subsiste que quelques membres épars ; M. Zeuthen a su les rejoindre et leur rendre la vie. Archimède emploie une parabole auxiliaire ; la quadrature connue de cette parabole permet d'effectuer la quadrature dont dépend le problème. Si l'on désigne en effet par $2a$ le côté de la base du prisme et par b sa hauteur, par x la distance au centre de la base d'une section (triangulaire) pratiquée dans l'onglet perpendiculairement aux deux plans qui le limitent, l'aire de cette section sera

$$\frac{1}{2}\frac{b}{a}(a^2 - x^2).$$

et l'on voit que pour obtenir le volume de l'onglet, à savoir

$$\frac{1}{2} b \int_{a}^{a} \left(a - \frac{x^2}{a} \right) dx,$$

il suffit de calculer l'aire d'un segment de la parabole dont l'équation est

$$y = a - \frac{x^2}{a}.$$

Enfin la démonstration se complète par la méthode d'exhaustion, dont Archimède, dans d'autres écrits, a donné de nombreuses applications. De cette partie de la démonstration il reste très peu de chose, mais ce qui subsiste suffit encore à M. Zeuthen pour la reconstruire.

A cette détermination de l'onglet cylindrique, Archimède trouve un grand intérêt, en raison du caractère rationnel du résultat. Les expressions du volume de la sphère, des segments sphériques, ou des autres corps de révolution qu'il a déterminées, ramènent ces volumes à des cylindres, limités par une surface courbe, tandis que son onglet, qui est le sixième d'un prisme, est équivalent au volume d'un solide, facile à construire, limité par des plans.

Il en est de même du dernier théorème, énoncé par Archimède dans la Préface, et dont la démonstration ne s'est pas retrouvée : ce théorème se rapporte au volume commun à deux cylindres de révolution inscrits dans un cube, qui est les deux tiers de ce cube. L'évaluation de ce volume résulte immédiatement, pour nous, de ce que les sections pratiquées par des plans parallèles aux axes des deux cylindres sont des carrés. Ces mêmes sections interviennent, dans la restitution à laquelle parvient M. Zeuthen, au moyen de la méthode mécanique d'Archimède, et où il utilise la figure dont ce dernier s'est servi pour l'évaluation du volume de la sphère : elles intervenaient sans doute aussi dans la démonstration géométrique qui, vraisemblablement, complétait la démonstration mécanique.

Au reste, on peut remarquer avec M. Juel que la détermination de ce volume résulte aisément de celle de l'onglet cylindrique, dont il a été question plus haut.

Ainsi, pour ce qui est de la Statique, Archimède est en pleine possession de la notion de moment par rapport à un plan et du

rôle de cette notion dans la théorie du centre de gravité. A ce *moment*, d'ailleurs, il ne donne pas de nom particulier. Comme moyen de recherche dans les questions infinitésimales, il applique à la détermination de centres de gravité ce que nous appelons maintenant *la méthode des indivisibles*. Il regarde un volume, par exemple, comme se composant des sections pratiquées par des plans parallèles. Par d'ingénieuses transformations géométriques, il montre comment on peut déduire le centre de gravité de la figure qu'il étudie du centre de gravité d'une autre figure, pour laquelle ce centre est connu. Le théorème des moments lui fournit enfin une équation, d'où il déduit, suivant les cas, l'aire, le volume, le centre de gravité de la première figure. Pour nous, la recherche des aires, des volumes, des centres de gravité, revient à effectuer certaines quadratures et nous apercevons sans effort l'identité de problèmes, ayant des énoncés très différents, qui dépendent d'une même intégrale. Grâce à son prestigieux talent géométrique, Archimède parvient à reconnaître cette identité. Il tire parti des aires, des volumes, des centres de gravité qu'il sait déterminer, comme nous tirons parti d'une intégrale que nous savons effectuer. D'ailleurs les solutions obtenues par la Statique et la méthode des indivisibles ne sont pas *démontrées*. Elles ont besoin d'une démonstration géométrique, qui se fait par la méthode d'exhaustion.

J. T.

MÉLANGES.

SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DE RAFFY [1];

PAR M. E. BOUNITZKY.

1. Dans son travail *Sur certaines équations différentielles d'ordre supérieur, analogues à l'équation de Clairaut* [1] M. Raffy a montré que l'équation différentielle

$$\varphi_0 = \mathrm{F}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m\varphi_0}{\partial x^m}\right),$$

où

$$\varphi_0 = y - xy' + \frac{x^2}{2!}y'' - \ldots + \frac{(-x)^m}{m!}y^{(m)},$$

a pour intégrale générale le polynome

$$y = -\mathrm{C}_1 x + \frac{\mathrm{C}_2}{2!}x^2 - \ldots + \frac{(-1)^m \mathrm{C}_m}{m!}x^m + \mathrm{F}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_m).$$

Les équations de Raffy ont la propriété analogue à celle de l'équation de Clairaut de se décomposer après dérivation en deux nouvelles équations dont la première, $dy^{(m)} = 0$, donne l'intégrale générale. En poursuivant l'analogie avec l'équation de Clairaut, nous nous proposons de montrer que les solutions communes à la seconde de ces équations et à l'équation donnée coïncident avec les solutions singulières et que l'ensemble des solutions singulières est aussi identique à l'ensemble des enveloppes de certaines familles de solutions fournies par l'intégrale générale qui ont avec chaque enveloppée un contact d'ordre m (où m est l'ordre de l'équation de Raffy). En outre, nous examinons plus précisément

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXV, 1897. — Nous désignons par les mots *une équation de Raffy*, une équation de la classe, considérée par M. Raffy dans ce travail.

les équations de Raffy d'une forme spéciale

$$\varphi_0 = \mathrm{F}\left(\frac{\partial^p \varphi_0}{\partial x^p}\right).$$

Pour plus de commodité du calcul nous introduisons les désignations

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k = (-1)^k \dfrac{\partial^k \varphi_0}{\partial x^k} = y^{(k)} - x y^{(k+1)} + \ldots + \dfrac{(-x)^{m-k}}{(m-k)!} y^{(m)} \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ 0! = 1), \end{array} \right.$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m \varphi_0}{\partial x^m}\right) = \mathrm{F}[-\varphi_1, \varphi_2, \ldots, (-1)^m \varphi_m] = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$$

et nous écrirons l'équation de Raffy dans la forme

$$(2)\qquad \varphi_0 - f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) = 0.$$

2. Différentiant l'équation (2) et s'appuyant sur les identités

$$(3)\qquad \frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{(-x)^{m-k}}{(m-k)!} \frac{dy^{(m)}}{dx} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

on a

$$\left[\frac{(-x)^m}{m!} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \frac{(-x)^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \frac{(-x)^{m-2}}{(m-2)!} - \ldots - \frac{\partial f}{\partial \varphi_m}\right] dy^{(m)} = 0.$$

On voit donc que chaque solution de l'équation (2) satisfait à l'une des équations

$$(4)\qquad dy^{(m)} = 0$$

ou

$$(5)\qquad \frac{(-x)^m}{m!} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \frac{(-x)^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \frac{(-x)^{m-2}}{(m-2)!} - \ldots - \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} = 0.$$

La première de ces équations suppose que y est un polynome de degré m.

Pour chaque polynome

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

on a, d'après la formule de Taylor,

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} y^{(k)}(x - x) = y^{(k)}(0) = a_k k! \\ \qquad = y^{(k)} - x y^{(k+1)} + \ldots + \dfrac{(-x)^{m-k}}{(m-k)!} y^{(m)} = \varphi_k \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \end{array} \right.$$

Les coefficients d'un polynome qui satisfait à l'équation (2) sont donc liés par une relation

$$a_0 = f(a_1, 2!\,a_2, \ldots, k!\,a_k, \ldots, m!\,a_m).$$

On trouve ainsi l'intégrale générale de l'équation (2)

$$(7)\quad y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m + f(a_1, 2!\,a_2, \ldots, m!\,a_m) \text{ [1]}.$$

3. Proposons-nous maintenant de déterminer m fonctions

$$a_1(t), \quad a_2(t), \quad \ldots, \quad a_m(t)$$

d'un paramètre variable t, afin que l'enveloppe d'une famille de courbes intégrales

$$(8)\quad \begin{cases} y = a_m(t)x^m + a_{m-1}(t)x^{m-1} + \ldots + a_1(t) \\ \qquad + f[a_1(t), 2!\,a_2(t), \ldots, m!\,a_m(t)] \end{cases}$$

ait avec chaque enveloppée un contact d'ordre m.

Désignons le second membre de l'équation (8) par $\psi(x, t)$. Les équations de l'enveloppe de la famille de courbes considérée sont (8) et

$$(9)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0.$$

En tirant t de (9) en fonction de x, on a une formule connue

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\psi[x, t(x)]}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Différentions cette équation successivement $m - 1$ fois, en tenant compte des équations

$$(10)\qquad y' = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad y'' = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad \ldots, \qquad y^{(m)} = \frac{\partial^m\psi}{\partial x^m}$$

qui expriment les conditions du contact d'ordre m entre l'enveloppe et l'enveloppée et en remarquant que, d'après le sens même du problème des enveloppes, $t(x)$ n'est pas une constante. Il

---

[1] Ce sont le raisonnement et le résultat mêmes de M. Raffy dans une forme modifiée conformément aux désignations changées.

viendra

$$y'' = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} = 0,$$

$$y''' = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2\, \partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2\, \partial t} = 0,$$

et ainsi de suite. On aura donc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2\, \partial t} = 0, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial^m \psi}{\partial x^{m-1}\, \partial t} = 0$$

ou

$$(11) \qquad \frac{\partial \dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{\partial x^2} = 0, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial^{m-1} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{\partial x^{m-1}} = 0.$$

En supposant que a_m se réduit à une constante, on ne trouve qu'une solution apparente du problème ; dans cette hypothèse toutes les enveloppées et l'enveloppe coïncident avec une courbe fournie par l'intégrale générale (7). En effet, si les coefficients a_m, a_{m-1}, ..., a_{k+1} ($k > 0$) ne dépendent pas de t, l'équation (9) prend la forme

$$\frac{da_k}{dt} x^k + \frac{da_{k-1}}{dt} x^{k-1} + \dots + \frac{da_1}{dt} x + \frac{df}{dt} = 0,$$

d'où l'on déduit, d'après les formules (11),

$$\frac{\partial^k \dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{\partial x^k} = \frac{da_k}{dt} k! = 0.$$

Ainsi a_k est une constante et l'on trouve, de même, que les autres coefficients a_{k-1}, ..., a_2, a_1 sont aussi des constantes. En cherchant une enveloppe effective, on doit donc admettre que a_m dépend de t. Nous considérerons a_m même comme un paramètre variable, en posant $a_m = t$. Posons, pour abréger,

$$k!\, a_k = \alpha_k \quad (k = 2, 3, \dots, m-1), \qquad m!\, t = \alpha_m$$

et écrivons l'équation (9) dans la forme

$$x^m + \frac{da_{m-1}}{dt} x^{m-1} + \dots + \frac{da_1}{dt} x + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt}$$
$$+ 2!\, \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{da_2}{dt} + \dots + (m-1)!\, \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\frac{da_{m-1}}{dt} + m!\, \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = 0.$$

Le premier membre de cette équation qui a, en vertu des conditions (11), toutes les racines égales en x peut être identifié avec un polynome $(x+v)^m$, où v est une fonction de t. Il viendra donc

$$\frac{da_k}{dt} = C_m^k v^{m-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{df}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt} &+ 2!\,\frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{da_2}{dt} + \ldots \\ &+ (m-1)!\,\frac{\partial f}{\partial a_{m-1}}\frac{da_{m-1}}{dt} + m!\,\frac{\partial f}{\partial a_m} = v^m, \end{aligned} \right.$$

C_m^k désignant le nombre de combinaisons de m éléments à k. On a, par suite,

$$(13)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = (x+v)^m = \left(x + \sqrt[m]{\frac{df}{dt}}\right)^m = 0,$$

d'où

$$(14)\qquad x + v = x + \sqrt[m]{\frac{df}{dt}} = 0.$$

L'expression $\sqrt[m]{\frac{df}{dt}}$ ne doit perdre aucune des déterminations possibles; on déduit donc de (14)

$$(15)\qquad (-x)^m - \frac{df}{dt} = 0.$$

Éliminant v entre l'équation

$$\frac{da_{m-1}}{dt} = mv$$

et les autres équations du système (12), on obtient

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{da_k}{dt} = C_m^k\left(\frac{1}{m}\frac{da_{m-1}}{dt}\right)^{m-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-2), \\ &\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt} + \ldots + m!\,\frac{\partial f}{\partial a_m} = \left(\frac{1}{m}\frac{da_{m-1}}{dt}\right)^m. \end{aligned} \right.$$

Les intégrales de ce système de $m-1$ équations différentielles ordinaires nous donnent les $m-1$ fonctions cherchées a_{m-1}, a_{m-2}, ..., a_1 de t; en les substituant dans l'équation

$$(17)\qquad y = tx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + f(a_1, 2!\,a_2, \ldots, m!\,t),$$

on aura la famille cherchée des courbes intégrales. Éliminant t

entre les équations (17) et (15), on trouve l'enveloppe qui a le contact d'ordre m avec chaque courbe intégrale de la famille (17).

4. Chacune des enveloppes considérées satisfait, conformément avec la théorie générale des solutions singulières, à l'équation (2) [1] et, de plus, à l'équation (5). On a, en effet, d'après les formules (10), pour chaque enveloppe les identités

$$f(a_1, 2!\,a_2, \ldots, m!\,t) = \psi(0, t) = \psi(x - x, t)$$
$$= y - x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \ldots + \frac{(-x)^m}{m!}\frac{\partial^m y}{\partial x^m}$$
$$= y - xy' + \ldots + \frac{(-x)^m}{m!}y^{(m)} = \varphi_0,$$

$$k!\,a_k = \left[\frac{\partial^k\psi(x, t)}{\partial x^k}\right]_{x=0} = \psi^{(k)}(x - x, t)$$
$$= \frac{\partial^k\psi}{\partial x^k} - x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \ldots + \frac{(-x)^{m-k}}{(m-k)!}\frac{\partial^m\psi}{\partial x^m}$$
$$= y^{(k)} - xy^{(k+1)} + \ldots + \frac{(-x)^{m-k}}{(m-k)!}y^{(m)} = \varphi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$y^{(m)} = \frac{\partial^m y}{\partial x^m} = m!\,t,$$

d'où l'on déduit

$$\varphi_0 = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m).$$

D'autre part, on a

$$\frac{df(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{dx} = \left[\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\frac{(-x)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\frac{(-x)^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial\varphi_m}\right]\frac{dy^{(m)}}{dx}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\frac{(-x)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\frac{(-x)^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial\varphi_m} = \frac{df}{dy^{(m)}}.$$

On peut donc écrire l'équation (5) dans une forme abrégée

(18) $$\frac{(-x)^m}{m!} - \frac{df(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{dy^{(m)}} = 0.$$

Mais on a, pour chaque enveloppe, en s'appuyant sur les formules (15) et les identités précédentes,

$$\frac{(-x)^m}{m!} - \frac{df(a_1, 2!\,a_2, \ldots, m!\,t)}{d(m!\,t)} = 0$$

---

[1] *Cf.* PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. III.

ou

$$\frac{(-x)^m}{m!} = \frac{df(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{dy^{(m)}}.$$

On voit donc que l'équation (5) a aussi lieu.

5. Réciproquement, chaque intégrale de l'équation (2) qui satisfait, en outre, à l'équation (5) présente une enveloppe d'une certaine famille des solutions particulières qui a avec chaque enveloppée un contact d'ordre m.

En effet, on a, d'après les formules (1), l'identité

$$\begin{aligned} y = \varphi_0(0, y, y', \dots, y^{(m)}) &= \varphi_0(x - x, y, y', \dots, y^{(m)}) \\ &= \varphi_0 - x\frac{d\varphi_0}{dx} + \dots + \frac{(-x)^m}{m!}\frac{\partial^m \varphi_0}{\partial x^m} \\ &= \varphi_0 - x\varphi_1 + \frac{x^2\varphi_2}{2!} - \dots \pm \frac{x^m\varphi_m}{m!} \quad [1]. \end{aligned}$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{\varphi_k}{k!} = a_k \quad (k = 1, 2, \dots, m-1), \qquad \frac{\varphi_m}{m!} = \frac{y^{(m)}}{m!} = t,$$

l'équation (5) prendra la forme

(19) $$y = tx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + f(a_1, 2!\,a_2, \dots, m!\,t).$$

On suppose, de plus, que la fonction y satisfait à l'équation (5) ou à l'équation équivalente (18). On aura donc

$$(-x)^m - \frac{m!\,df(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{dy^{(m)}} = 0 \quad [2],$$

c'est-à-dire

(20) $$(-x)^m - \frac{df(a_1, 2!\,a_2, \dots, m!\,t)}{dt} = 0.$$

En écrivant les équations (3) dans la forme

$$\frac{d\varphi_k}{dy^{(m)}} = k!\,\frac{da_k}{dy^{(m)}} = \frac{k!}{m!}\,\frac{da_k}{dt} = \frac{(-x)^{m-k}}{(m-k)!},$$

---

[1] C'est la formule même dont M. Raffy fait usage pour donner une règle abrégée du calcul de l'intégrale générale.

[2] Il est admis sans démonstration que $y^{(m)}$ peut varier ou, ce qui est la même chose, que la fonction y qui satisfait simultanément aux équations (2) et (5) n'est pas une solution fournie par l'intégrale générale. Cette proposition est démontrée au commencement du n° 6.

il viendra

$$\frac{da_k}{dt} = C_m^k(-x)^{m-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-2)$$

et, dans le cas particulier, pour $k = m - 1$,

$$\frac{da_{m-1}}{dt} = m(-x).$$

On a donc

$$\frac{da_k}{dt} = C_m^k\left(\frac{1}{m}\,\frac{da_{m-1}}{dt}\right)^{m-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-2)$$

et, en vertu de (20),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial a_1}\,\frac{da_1}{dt} + 2!\,\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\,\frac{da_2}{dt} + \ldots + m!\,\frac{\partial f}{\partial \alpha_m} - \left(\frac{1}{m}\,\frac{da_{m-1}}{dt}\right)^m,$$

où

$$\alpha_k = k!\,a_k \qquad (k = 2, \ldots, m-1), \qquad \alpha_m = m!\,t.$$

On voit ainsi que les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ considérées comme fonctions de t satisfont au système des équations différentielles (16). De plus, la fonction y et la variable indépendante x sont liées par les formules (19) et (20) tout à fait identiques aux équations (17) et (15). Il en résulte que chaque solution commune des équations (2) et (5) coïncide avec l'une des enveloppes d'une famille des solutions particulières qui a, avec chaque enveloppée, un contact d'ordre m.

6. Chaque intégrale de l'équation (2) doit satisfaire à l'une des équations (4) ou (5).

Celles qui satisfont à l'équation (5) sont toutes singulières, c'est-à-dire aucune d'elles n'est contenue dans l'intégrale générale comme une solution particulière. En effet, pour une intégrale particulière qui satisfasse à l'équation (5) on aurait, pour une valeur arbitraire de x,

$$\frac{(-x)^m}{m!} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\,\frac{(-x)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\,\frac{(-x)^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} = 0,$$

où les coefficients $\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_m}$, d'après les formules (6), sont des constantes, ce qui est impossible.

En résumant tout ce qui a été dit plus haut, on peut dire que *les*

solutions singulières de l'équation de Raffy sont identiques avec les solutions communes des équations (2) *et* (5) *et que l'ensemble des solutions singulières coïncide, d'autre part, avec l'ensemble de telles enveloppes de certaines familles des intégrales particulières qui ont avec chaque enveloppée un contact d'ordre m.*

L'équation (2) n'a pas de solutions singulières, s'il est impossible d'éliminer t entre les équations (17) et (15), ce qui est équivalent à l'impossibilité de trouver des solutions communes des équations (2) et (5) [1]. Les intégrales générales du système (16) donnent pour les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des expressions avec $m-1$ constantes arbitraires; on voit donc que les solutions singulières de l'équation de Raffy ont, en général, $m-1$ constantes arbitraires (m étant toujours l'ordre de l'équation de Raffy).

7. Examinons maintenant un type spécial de l'équation (2) qui a la forme

$$\varphi_l = f(\varphi_{l+p}), \qquad l+p \leq m, \qquad p > 0.$$

Pour $l = 0$ on a

$$\varphi_0 = f(\varphi_p). \tag{21}$$

Pour $l > 0$ on ramène l'équation considérée, en posant

$$y^{(l)} = z, \qquad m - p = n,$$

$$\psi_0 = z - xz' + \ldots + \frac{(-x)^n}{n!} z^{(n)}, \qquad \frac{\partial^k \psi_0}{\partial x^k}(-1)^k = \psi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

à la forme

$$\psi_0 = f(\psi_p),$$

qui ne diffère de l'équation (21) que par les notations. On peut donc se borner à considérer l'équation (21). Dans ce cas, l'intégrale générale est

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + t x^m + f(p!\, a_p).$$

---

[1] On peut prendre comme exemple l'équation

$$y - xy' + \frac{x^2 y''}{2} - y''' = 0$$

sans solutions singulières.

et les intégrales singulières se trouvent par les quadratures. En effet, le système (13), qui est équivalent au système (16), nous donne

(22) $$\frac{da_k}{dt} = C_m^k v^{m-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

(23) $$p!\, f'(p!\, a_p) \frac{da_p}{dt} = v^m,$$

où $f'(\alpha_p)$ désigne $\frac{\partial f(\alpha_p)}{\partial \alpha_p}$. On obtient donc de (22), pour $k = p$,

(24) $$\frac{da_p}{dt} = C_m^p v^{m-p}.$$

En éliminant $\frac{da_p}{dt}$ entre les équations (23) et (24) et en déterminant v, il viendra

(25) $$v = \sqrt[p]{C_m^p\, p!\, f'(p!\, a_p)}.$$

Substituant cette valeur de v dans la formule (24), résolvant par rapport à dt et intégrant, on trouve

(26) $$dt = \frac{1}{(C_m^p)^{\frac{m}{p}}} [p!\, f'(p!\, a_p)]^{\frac{p-m}{p}} da_p,$$

$$t = \frac{1}{(C_m^p)^{\frac{m}{p}}} \int [p!\, f'(p!\, a_p)]^{\frac{p-m}{p}} da_p.$$

Éliminant dt entre les formules (22) et (24), on aura

$$\frac{da_k}{da_p} = \frac{C_m^k}{(C_m^p)^{\frac{k}{p}}} \int [p!\, f'(p!\, a_p)]^{\frac{p-k}{p}} da_p.$$

d'où

$$a_k = \frac{C_m^k}{(C_m^p)^{\frac{k}{p}}} \int [p!\, f'(p!\, a_p)]^{\frac{p-k}{p}} da_p \quad (k = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m-1).$$

Ainsi les intégrales du système (16) ont, dans le cas considéré, la forme

$$a_k = \theta_k(a_p) + c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m-1), \quad t = \theta_m(a_p) + c_m,$$

où $\theta_k(a_p)$, $\theta_m(a_p)$ sont des fonctions parfaitement déterminées et c_k, c_m sont des constantes arbitraires. Sans faire un usage

immédiat des solutions trouvées du système (16), on peut obtenir les solutions singulières de l'équation (21) au moyen d'une des relations (13).

Si l'on regarde x comme un paramètre invariable et si l'on intègre l'identité

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_p}\,\partial a_p = \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial a_p}\,\partial a_p = (x + c)^m\,\frac{\partial t}{\partial a_p}\,\partial a_p,$$

où

$$\psi(x, t) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + t x^m + f(p!\,a_p),$$

entre les limites α et a_p, on a, en s'appuyant sur les formules (25) et (26),

$$\int_\alpha^{a_p}\psi = \frac{1}{(C_m^p)^{\frac{m}{p}}}\int_\alpha^{a_p}\left\{x + [C_m^p\,p!\,f'(p!\,a_p)]^{\frac{1}{p}}\right\}^m [p!\,f'(p!\,a_p)]^{\frac{p-m}{p}}\,\partial a_p.$$

L'équation (17) prend donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} y = \int_\alpha^{a_p}\psi = {} & \frac{1}{(C_m^p)^{\frac{m}{p}}}\int_\alpha^{a_p}\left\{x + [C_m^p\,p!\,f'(p!\,a_p)]^{\frac{1}{p}}\right\}^m [p!\,f'(p!\,a_p)]^{\frac{p-m}{p}}\,\partial a_p \\ & + [\theta_1(\alpha) + c_1]x + [\theta_2(\alpha) + c_2]x^2 + \ldots + [\theta_{p-1}(\alpha) + c_{p-1}]x^{p-1} \\ & + [\theta_{p+1}(\alpha) + c_{p+1}]x^{p+1} + \ldots + [\theta_{m-1}(\alpha) + c_{m-1}]x^{m-1} \\ & + [\theta_m(\alpha) + c_m]x^m + \alpha x^p + f(p!\,\alpha). \end{aligned}$$

Comme les c_k $(k = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m)$ sont des constantes arbitraires, on peut écrire simplement

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{(C_m^p)^{\frac{m}{p}}}\int_\alpha^{a_p}\left\{x + [C_m^p\,p!\,f'(p!\,a_p)]^{\frac{1}{p}}\right\}^m [p!\,f'(p!\,a_p)]^{\frac{p-m}{p}}\,\partial a_p \\ & + \alpha x^p + f(p!\,\alpha) + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_{p-1} x^{p-1} \\ & + \gamma_{p+1} x^{p+1} + \ldots + \gamma_{m-1} x^{m-1} + \gamma_m x^m, \end{aligned}\right.$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p-1}, \gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_m$ sont aussi des constantes arbitraires. D'ailleurs, les formules (14) et (25) nous donnent

$$(28)\qquad x + [C_m^p\,p!\,f'(p!\,a_p)]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Les solutions singulières de l'équation (21) se trouvent donc par l'élimination de a_p entre les équations (27) et (28). Ces solutions ne contiennent que $m - 1$ constantes arbitraires. En effet,

dans la formule (27) le terme en x^p et le terme libre donnent, après réduction,

$$(a_p + c)x^p + f(p!\,a_p) + c' - (\alpha + c)x^p - f(p!\,\alpha) - c' + \alpha x^p + f(p!\,\alpha)$$
$$= a_p x^p + f(p!\,a_p).$$

Tous les autres termes provenant de la substitution à la limite inférieure de l'intégrale ne font que changer la valeur numérique des coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p-1}, \gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_m$, qui restent d'ailleurs arbitraires.

Dans le cas où l'on a $p = m$, les formules (27) et (28) donnent le résultat suivant :

On trouve les solutions singulières de l'équation

$$y - xy' + \ldots + \frac{(-x)^m}{m!} y^{(m)} = f(y^{(m)}),$$

en éliminant t entre les équations

$$y = \int_\alpha^t \left\{ x + [m!\,f'(m!\,t)]^{\frac{1}{m}} \right\}^m \partial t$$
$$+ \alpha x^m + f(m!\,\alpha) + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_{m-1} x^{m-1}$$

et

$$x + [m!\,f(m!\,t)]^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Exemple. — En intégrant l'équation

$$y - xy' + \frac{x^2 y''}{2} = -\frac{1}{y''^3},$$

on trouve l'intégrale générale

$$y = ax + tx^2 - \frac{1}{8t^3}$$

et l'intégrale singulière comme un résultat de l'élimination entre les équations

$$y = \int_\alpha^t \left(x + \frac{\sqrt{6}}{4t^2}\right)^2 dt + \alpha x^2 - \frac{1}{8\alpha^3} + c_1 x$$

et

$$x + \frac{\sqrt{6}}{4t^2} = 0.$$

En calculant les quadratures et éliminant, on a la solution sin-

gulière

$$y = \frac{4}{3} 6^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{2}} + c_1 x,$$

où c_1 est une constante arbitraire.

8. On doit, toutefois, remarquer que l'on peut immédiatement trouver les intégrales singulières de l'équation (21) par le calcul des fonctions implicites et par les quadratures. L'équation (5) nous donne, en effet, dans ce cas

(29) $$\frac{(-x)^m}{m!} + f'(\varphi_p)\frac{(-x)^{m-p}}{(m-p)!} = 0.$$

Résolvant par rapport à φ_p et différentiant, il viendra

$$\varphi_p = v(x), \qquad \frac{(-1)^{m-p}}{(m-p)!} y^{(m+1)} = v'(x),$$

d'où l'on trouve au moyen des quadratures y dans la forme

$$y = u(x) + c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \ldots + c_1 x + c_0.$$

En substituant cette valeur de y dans la première partie de l'équation (29), on doit trouver identiquement une fonction des constantes c_0, c_1, ..., c_m; en l'égalant à zéro, on obtient une relation entre les constantes et l'on trouve ainsi une solution avec m constantes arbitraires qui satisfait à l'équation (29). En substituant cette solution dans l'équation (21), on a, dans la première partie aussi, une fonction des constantes; en l'égalant à zéro, on trouve une relation nouvelle entre les constantes et l'on obtient ainsi une solution singulière de l'équation (21) avec $m - 1$ constantes arbitraires.

Exemple. — En intégrant l'équation

$$y - xy' + \frac{x^2 y''}{2} - \frac{x^3 y'''}{3!} = e^{y'' - xy'''},$$

on a une intégrale générale

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + e^{2b},$$

e désignant la base des logarithmes néperiens, et l'équation

$$\frac{x^3}{3!} - e^{y'' - xy'''} = 0$$

qui contient des solutions singulières. En l'écrivant dans la forme

$$y'' - xy''' = \log \frac{x^2}{6}$$

et différentiant, on a

$$y^{\text{IV}} = -\frac{2}{x^2},$$

d'où

$$y = x^2 \log x + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0.$$

Les substitutions successives dans les équations précédentes nous donnent

$$2 \log x + 1 + 2 c_2 = \frac{\log x^2}{6}, \quad c_2 = -\frac{(1 + \log 6)}{2}, \quad c_0 + \frac{x^2}{6} = \frac{x^2}{6}, \quad c_0 = 0.$$

On a ainsi l'intégrale singulière

$$y = x^2 \log x + c_1 x - \frac{(1 + \log 6)}{2} x^2 + c_3 x^3.$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Chappuis (J.), et A. Berget. — *Leçons de Physique générale*. 2ᵉ édit. T. I. In-8°, IX-673 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 18 fr.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique*. Traduit par *E. Davaux*, suivi de Notes sur la Physique théorique par *E. Cosserat*. T. I. 3ᵉ fasc. Paris, Hermann. 12 fr.

Lodge (Sir Oliver). — *Elektronen oder die Natur u. die Eigenschaften der negativen Elektrizität*. Aus dem Englischen übersetzt von G. Siebert. Gr. in-8°, X-203 p. avec 24 fig. Leipzig, Quandt et Händel. 6 m.; relié, 7 m.

Lorentz (H.-A.). — *Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauche bei akadem. Vorlesungen*. Aus dem Holländ. übersetzt von *G. Siebert*. 2. Bd. Gr. in-8°, III-621 p. avec 253 fig. Leipzig, Barth. 10 m.; relié, 11 m.

Mägis (A.). — *Beiträge zur Dynamik der Wirbelstürme*. Gr. in-8°, 56 p. Solothurn, Lüthy. 2 m.

Moriondo (E.). — *Principi di Termodinamica grafica.* In-8°. Torino. Societa tip.-editr. 3 l.

Schuster (Arth.). — *Einführung in die theoretische Optik.* Uebersetzt von *H. Konen.* Gr. in-8°, xiv-413 p. avec 185 fig. et 2 planches. Leipzig. Teubner. 12 m.; relié, 13 m.

Solar physics committee : Spectroscopic comparison of metals. London, Wyman. 3 sh.

Adhémar (R. d'). — *Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.* Petit in-8°, 86 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

Dini (U.). — *Lezioni di Analisi infinitesimale.* Vol. I. In-8°. Pisa, Fratelli Nistri. 22 l.

Dunér (N.-C.). — *Ueber die Rotation der Sonne.* 2. Abhandlg. In-8°, 64 p. Upsala. Akadem. Buchhdlg. 3 m. 40 pf.

Eggert (O.). — *Einführung in die Geodäsie.* In-8°, x-437 p. av. 237 fig. Leipzig. Teubner. Relié : 10 m.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendgn. III. Bd. *Geometrie.* Redig. von W. Fr. Meyer. 1. Tl. 1. Heft. In-8°, 220 p. av. fig. Leipzig. Teubner. 6 m. 40 pf.

— *Physik.* Red. von A. Sommerfeld. 1. Tl. 4. Heft. In-8°. Leipzig, Teubner. 3 m. 60 pf.

Fazzari (G.). — *Breve storia della matematica dai tempi antichi al medio evo.* In-16. Palermo, Sandron. 4 l.

Fouët (E.-A.). — *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* T. I : *Les fonctions en général.* In-8°, xiii-113 p. av. fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

Gasser (Max). — *Eine Basismessung mit Invardraht. Mikroskop u. Lupe.* Gr. in-8°, 71 p. av. 3 planches. München. Lindauer. 2 m.

Berliner astronomisches Jahrbuch, f. 1909 *m. Angaben über die Opposition der Planeten* (1-569) *für* 1907. Herausgeg. von J. Bauschinger. Gr. in-8°, x-605 p. Berlin. Dümmler. 12 m.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GINO LORIA. — VORLESUNGEN UEBER DARSTELLENDE GEOMETRIE. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Aufgabe von *Fritz Schütte*. Erster Teil : DIE DARSTELLUNGS-METHODEN, mit 163 Figuren im Texte. 1 volume in-8°; XI-219 pages. Leipzig et Berlin, Teubner, 1907.

Cette première partie des leçons de Géométrie descriptive de M. Gino Loria contient les matières qui figurent en France dans le programme du baccalauréat. Il est inutile de dire que l'exposition est excellente, claire et sagement limitée à ce qui est essentiel. L'auteur ne craint pas, d'ailleurs, lorsqu'il y trouve avantage, de faire parfois appel à quelques notions élémentaires de Trigonométrie, de Géométrie analytique, d'Homographie. Il est de ceux qui pensent que, dans l'enseignement élémentaire, les diverses parties de la Science doivent se pénétrer mutuellement.

La différence essentielle avec nos Traités français sur le même sujet consiste dans l'introduction de quelques Chapitres, fort intéressants et utiles, sur la projection centrale, l'axonométrie et la photogrammétrie. Ainsi, pour ce qui est de cette dernière discipline, M. Gino Loria traite les deux questions suivantes :

Étant données les projections d'une figure de deux centres donnés sur deux plans donnés, trouver la projection de cette figure d'un troisième centre sur un troisième plan.

On a n projections centrales d'une figure, faites de centres inconnus : quelles conclusions peut-on en tirer sur la forme, la position et les propriétés de cette figure? peut-on, en particulier, la reconstruire?

La portée théorique et pratique de ces problèmes est évidente, et les propositions géométriques que leur solution met en jeu sont de nature à intéresser vivement les élèves. J. T.

SIMON (M.). — DIDACTIK UND METHODIK DES RECHNENS UND DER MATHEMATIK. Zweite um gearbeitete und vermehrte Auflage. 1 volume in-8°, 206 pages. Munich, C.-H. Beck, 1908.

Le Livre de M. Max Simon s'adresse à tous ceux qu'intéresse la pédagogie des Mathématiques. Beaucoup de maîtres tireront certainement parti des réflexions et de l'expérience de l'auteur. Les maîtres français, en particulier, trouveront là beaucoup de renseignements sur l'organisation et les habitudes de l'enseignement mathématique en Allemagne; ils s'émerveilleront assurément du nombre de lectures de l'auteur; dans ce Volume de 200 pages, il y a bien un millier de noms cités. J. T.

SAMPACHI FUKIZAWA. — VIER MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN. 61 pages in-8°. Tokio, 1907.

L'auteur traite successivement de la représentation géométrique des valeurs imaginaires d'une fonction d'une variable réelle; de la déduction, au moyen de la théorie des vecteurs, de la série de Taylor pour une fonction d'une variable complexe; d'une série qui représente le nombre a ou le nombre b suivant la région où se trouve le point qui représente la variable; enfin de la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n [\cos a^n x \pi]^c,$$

où a et c sont des entiers positifs impairs, où b est une constante positive, et qui représente une fonction sans dérivée, pourvu que le produit ab soit inférieur à une certaine limite. C'est la généralisation d'une proposition bien connue de Weierstrass ($c = 1$).

J. T.

RAGSDALE (V.). — ON THE ARRANGEMENT OF THE REAL BRANCHES OF PLANE ALGEBRAIC CURVES. A dissertation presented to the Faculty of Bryn Mawr College for the degree of doctor of philosophy. 28 pages, in-4°, Baltimore, 1906.

M[lle] Virginia Ragsdale apporte une intéressante contribution à l'étude du nombre des branches réelles, des dispositions diverses

que peuvent présenter ces branches pour une courbe plane algébrique de degré donné, en particulier de la façon dont les ovales qui figurent dans une telle courbe sont, ou non, incluses les unes dans les autres, spécialement dans le cas où le nombre maximum de branches réelles est atteint.

Les principales recherches sur ce sujet sont dues à von Staudt ([1]), à M. Zeuthen ([2]), à Harnack ([3]), à M. Hilbert ([4]), à M. Hulburt ([5]). Le procédé de recherches de Harnack et de M. Hilbert consiste à étudier la déformation continue d'une courbe en partant d'une courbe décomposée, l'une des courbes composantes étant une droite ou une conique. C'est aussi cette méthode qu'applique M[lle] Ragsdale, de manière à avoir des renseignements précis sur les différents types de courbes qui dérivent de cette méthode.

J. T.

ROUSE BALL (W.-W.). — HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. Édition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par *L. Freund*. Tome II, avec des additions de *R. de Montessus*. LES MATHÉMATIQUES MODERNES DEPUIS NEWTON JUSQU'A NOS JOURS. Note complémentaire de M. *G. Darboux*. 1 volume in-8°, 271 pages. Paris, Hermann, 1907.

Nous avons déjà eu l'occasion de dire, à l'occasion du premier Volume de cette *Histoire des Mathématiques,* que la lecture en était très attachante. Le second Volume s'ouvre par un fort beau Chapitre sur Newton; personne ne reprochera à l'auteur la prédilection avec laquelle il s'est attaché à ce grand génie. S'il prend quelque peu parti pour lui, dans la fameuse querelle avec Leibnitz, il déclare que c'est là sa façon de sentir, mais que la question reste ouverte. Il est excessif de vouloir, au nom de l'objectivité, empêcher un historien de nous dire son sentiment, du moment qu'il ne le confond pas avec une démonstration, et qu'il expose les faits avec impartialité.

([1]) *Geometrie der Lage.*
([2]) *Math. Ann.,* t. VII, 1873.
([3]) *Math. Ann.,* t. X, 1876.
([4]) *Math. Ann.,* t. XXXVIII, 1890.
([5]) *Amer. Journ. of Math.,* t. XX, 189[illegible].

Ce sont les noms propres qui forment les divisions, dans le Livre de M. Rouse Ball. Ce mode de division est très naturel pour l'antiquité; il a aussi ses avantages, même dans les temps modernes, lorsqu'il s'agit d'hommes qui ont eu une influence considérable sur le développement de la Science, d'un Newton par exemple; il importe que leurs découvertes soient rapprochées, afin que leur physionomie et leur rôle scientifiques apparaissent mieux. M. Rouse Ball se plaît d'ailleurs à compléter la physionomie scientifique en esquissant le caractère et la vie. Sans doute, avec ce mode de division, l'évolution continue de la Science ne ressort pas bien; M. Rouse Ball pourrait répondre que, dans l'évolution même, ce sont les mutations qui importent. D'ailleurs, au lieu de s'astreindre complètement à l'ordre chronologique qui, lorsqu'il est absolu, introduit le désordre dans la matière, l'auteur s'est attaché à rapprocher les hommes qui se groupent naturellement, et que l'on peut regarder comme appartenant à une même école. Peut-être, dans le système adopté, aurait-il pu sacrifier les noms de certains mathématiciens, auxquels il ne consacre que quelques lignes; M. Rouse Ball s'excuse de ne pas être complet et demande presque pardon aux gens qu'il oublie : celui qui ouvre son Livre ne peut s'attendre à trouver une histoire complète des Mathématiques depuis Newton jusqu'à nos jours, dans un Volume qui n'a pas 300 pages; il ne peut demander à l'auteur que les traits principaux. Dans un Ouvrage où l'on s'attacherait surtout au développement des théories scientifiques, la place de quelques noms, sur lesquels M. Rouse Ball s'arrête un peu, serait dans une Note, à propos de la contribution qu'ont apportée ceux qui portaient ces noms.

M. de Montessus a enrichi le Livre de M. Rouse Ball de quelques additions, fort intéressantes en général, et qui étaient quelquefois nécessaires; je signalerai, parmi celles-là, les quelques pages qui concernent Cauchy. Ces additions font corps avec le texte de l'historien anglais; elles ont simplement été mises entre astérisques; c'est le procédé qu'a adopté M. Molk pour l'édition française de l'*Encyclopédie*.

Enfin, M. Hermann a eu l'excellente idée de reproduire la belle étude sur le développement des méthodes géométriques que M. Darboux a lue au Congrès de Saint-Louis et que les lecteurs du *Bulletin* connaissent bien. Après avoir relu cette étude, on

estimera peut-être que M. de Montessus aurait pu imiter la discrétion avec laquelle M. Darboux, qui s'est attaché à montrer l'enchaînement des idées, a su parler des mathématiciens vivants.

J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES SURFACES DE RÉVOLUTION ;

Par M. G. TZITZÉICA.

Étant donnée une surface S et un point fixe O dans l'espace, je me propose de démontrer que, si le long des lignes asymptotiques réelles ou imaginaires de S, on a la relation

(1) $$s = \pm f(r) + C,$$

s désignant l'arc de l'asymptotique compté à partir d'un point quelconque pris sur la courbe, r la distance de O au point mobile sur l'asymptotique, alors la surface S est de révolution.

De la relation (1) on déduit que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est pour les surfaces en question

(2) $$ds^2 = f'^2(r)\,dr^2.$$

Dans le cas où $f'(r) = 0$, la réponse est immédiate : la surface est une sphère. J'ai énoncé implicitement le cas où $f'^2(r) = 1$ dans une Note publiée dans ce même *Bulletin* (2e série, t. XXIII; juin 1899); alors les surfaces sont des quadriques de révolution ayant un foyer en O.

J'étudierai maintenant le cas général. Prenons sur S des coordonnées curvilignes quelconques u et v, pour lesquelles l'élément linéaire de la surface est donné par

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

et les lignes asymptotiques par

$$\text{(3)}\qquad D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

On tire immédiatement des équations (2) et (3)

$$\text{(4)}\qquad \frac{E - f'^2(r)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2}{D} = \frac{F - f'^2(r)\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}}{D'} = \frac{G - f'^2(r)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2}{D''}.$$

Il s'agit maintenant d'étudier les surfaces S qui vérifient ces relations (4).

1. Je démontrerai d'abord qu'une telle surface S est *applicable sur une surface de révolution*. Prenons sur S pour coordonnées curvilignes ses lignes de courbure. On a alors

$$D' = F = 0,$$

et (4) donne

$$\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} = 0.$$

On peut prendre

$$\frac{\partial r}{\partial v} = 0,$$

ou

$$\text{(5)}\qquad \sum x\frac{\partial x}{\partial v} = x\frac{\partial x}{\partial v} + y\frac{\partial y}{\partial v} + z\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

et les relations (4) se réduisent à

$$\text{(6)}\qquad G\frac{D}{D''} = E - f'^2(r)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2.$$

Désignons maintenant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la surface S. On connaît les formules fondamentales de la théorie des surfaces

$$\text{(7)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\dfrac{\partial x}{\partial u} + b\dfrac{\partial x}{\partial v} + D\alpha, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = a'\dfrac{\partial x}{\partial u} + b'\dfrac{\partial x}{\partial v} + D'\alpha, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = a''\dfrac{\partial x}{\partial u} + b''\dfrac{\partial x}{\partial v} + D''\alpha, \end{cases}$$

et les analogues en y et z, où a, b, a', b', a'', b'' dépendent de l'élément linéaire de S. Dans notre cas $D' = 0$.

Cela étant rappelé, dérivons (5) par rapport à u, on obtient

$$\sum x \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

qui devient, à l'aide de (7) et de $F = 0$,

$$a' \sum x \frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Or, $\sum x \frac{\partial x}{\partial u} \neq 0$, parce que S n'est pas une sphère; donc

$$a' = \frac{1}{2E}\,\frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

On peut alors, à l'aide d'un changement de la variable u, prendre $E = 1$ et alors (6) montre que

$$G\frac{D}{D''} = \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une certaine fonction de u.

En vertu de (5), on peut poser

(8) $$\sum x^2 = x^2 + y^2 + z^2 = U_0^2,$$

U_0 étant une fonction de u seulement; donc

$$\sum x \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = U_0 U_0'' + U_0'^2 - 1,$$

et à l'aide de (7),

$$a \sum x \frac{\partial x}{\partial u} + b \sum x \frac{\partial x}{\partial v} + D \sum \alpha x = U_0 U_0'' + U_0'^2 - 1.$$

Or, on a

$$a = \frac{1}{2E}\,\frac{\partial E}{\partial u} = 0, \qquad \sum x \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

par conséquent

(9) $$D \sum \alpha x = U_0 U_0'' + U_0'^2 - 1.$$

De même, en partant de (5), on tire

$$\sum x \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + G = 0.$$

qui, en tenant compte de (7), devient

$$a''\sum x\frac{\partial x}{\partial u}+b''\sum x\frac{\partial x}{\partial v}+D''\sum \alpha x+G=0,$$

qui se réduit, à cause de

$$a''=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\qquad \sum x\frac{\partial x}{\partial v}=0,\qquad \sum x\frac{\partial x}{\partial u}=U_0U_0',$$

à

$$(10)\qquad D''\sum \alpha x=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}U_0U_0'-G.$$

A l'aide de (9) et (10) on forme la relation

$$G\frac{D}{D''}=\frac{U_0U_0''+U_0'^2-1}{\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}U_0U_0'-1}.$$

Or, nous avons démontré que $G\frac{D}{D''}$ est une fonction de u. Il en résulte que $\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}$ est aussi une fonction seulement de u, c'est-à-dire G est le produit d'une fonction de u par une fonction de v. On peut alors, à l'aide d'un changement de la variable v, prendre

$$G=U^2,$$

U étant une fonction seulement de u. L'élément linéaire de S se réduit, par conséquent, à la forme

$$ds^2=du^2+U^2\,dv^2,$$

ce qui prouve que S *est applicable sur une surface de révolution.*

2. Je vais démontrer maintenant que S *est une surface de révolution.*

Remarquons tout d'abord que la deuxième des égalités (7) se réduit, dans notre cas, à

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=b'\frac{\partial x}{\partial v},$$

où

$$b'=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{U'}{U};$$

donc

$$(11)\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{U}\mathrm{V}'_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \mathrm{U}\mathrm{V}'_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \mathrm{U}\mathrm{V}'_3,$$

V'_1, V'_2, V'_3 étant les dérivées des fonctions V_1, V_2, V_3 de v seulement. Comme

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G} = \mathrm{U}^2,$$

on a de (11)

$$(12)\qquad \mathrm{V}'^2_1 + \mathrm{V}'^2_2 + \mathrm{V}'^2_3 = 1.$$

De plus, à l'aide de (11), la relation (5) devient

$$(13)\qquad \mathrm{V}'_1 x + \mathrm{V}'_2 y + \mathrm{V}'_3 z = 0,$$

qui donne en dérivant

$$\sum \mathrm{V}''_1 x + \sum \mathrm{V}'_1 \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

ou, à l'aide de (11) et (12),

$$(14)\qquad \mathrm{V}''_1 x + \mathrm{V}''_2 y + \mathrm{V}''_3 z + \mathrm{U} = 0.$$

En dérivant de nouveau celle-ci par rapport à v, on a, en tenant compte de (12),

$$(15)\qquad \mathrm{V}'''_1 x + \mathrm{V}'''_2 y + \mathrm{V}'''_3 z = 0.$$

Les équations (13), (14) et (15) donnent x, y, z comme fonctions de u et v. Je suppose le système compatible; autrement, avec les fonctions choisies V_1, V_2, V_3, le problème ne serait pas possible, c'est-à-dire la surface S n'existerait pas.

Supposons d'abord le système déterminé. On a alors, pour x, y, z, des expressions de la forme

$$x = \mathrm{U}\mathrm{W}_1, \qquad y = \mathrm{U}\mathrm{W}_2, \qquad z = \mathrm{U}\mathrm{W}_3,$$

où les W sont des fonctions de v. Or, on a de (11)

$$\mathrm{W}'_1 = \mathrm{V}'_1, \qquad \mathrm{W}'_2 = \mathrm{V}'_2, \qquad \mathrm{W}'_3 = \mathrm{V}'_3,$$

et l'on pourra prendre

$$\mathrm{W}_1 = \mathrm{V}_1, \qquad \mathrm{W}_2 = \mathrm{V}_2, \qquad \mathrm{W}_3 = \mathrm{V}_3.$$

et alors

$$x = UV_1, \qquad y = UV_2, \qquad z = UV_3;$$

comme

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

on tire

$$U' = 1, \qquad V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 1.$$

On pourra prendre $U = u$ et l'on voit alors que la surface S dans ce cas est un cône ayant le point O pour sommet.

Supposons maintenant le système des équations (13), (14) *et* (15) *indéterminé.* Ceci ne peut avoir lieu que si

$$\frac{V_1'''}{V_1'} = \frac{V_2'''}{V_2'} = \frac{V_3'''}{V_3'},$$

d'où, en intégrant,

$$V_2' V_3'' - V_3' V_2'' = \alpha_1, \qquad V_3' V_1'' - V_1' V_3'' = \alpha_2, \qquad V_1' V_2'' - V_2' V_1'' = \alpha_3,$$

α_1, α_2, α_3 étant des constantes. On tire de là

$$\alpha_1 V_1' + \alpha_2 V_2' + \alpha_3 V_3' = 0,$$

et à l'aide de (11)

$$\sum \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial v} = U \sum \alpha_1 V_1' = 0;$$

donc

$$(16) \qquad \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = U_1,$$

U_1 étant une fonction de u seulement.

Les équations (8) et (16) montrent que l'équation cartésienne de S est de la forme

$$F(x^2 + y^2 + z^2, \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) = 0;$$

par conséquent *la surface* S *est de révolution et son axe passe par le point fixe* O.

MANUSCRITS ET PAPIERS INÉDITS DE GALOIS [1];

PAR M. J. TANNERY.

(*Suite.*)

En dehors des quelques fragments que l'on trouvera plus loin, les écrits mathématiques de Galois que Liouville n'a pas publiés contiennent une cinquantaine de feuilles détachées [2] pleines de calculs qui, pour la plupart, concernent la théorie des fonctions elliptiques et remontent sans doute à un moment où Galois étudiait les Mémoires de Jacobi [3], quatre pages sur les équations aux

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXX, 1907, p. 226 et 255.

(2) Trois de ces feuilles comportent du texte; une se rapporte à la théorie de la transformation, une autre au théorème d'addition pour la fonction sin am, déduit de la formule fondamentale de trigonométrie sphérique, la troisième au théorème d'addition pour la fonction $\Pi(u, a)$.

(3) Les papiers que m'a remis Mme de Blignières contiennent un brouillon, couvert de ratures et de corrections, qui est de la main de Liouville, et qui porte en tête : Lettre d'Alfred Galois à M. Jacobi, 17 novembre 1847. Voici cette lettre :

MONSIEUR,

J'ai l'honneur de vous envoyer, en vous priant d'en agréer l'hommage, un exemplaire de la première Partie des Œuvres mathématiques de mon frère.

Il y a près d'un an qu'elle a paru dans le Journal de M. Liouville, et, si je ne vous l'ai pas adressée plus tôt, c'est que, sans cesse, j'espérais pouvoir vous faire remettre d'un jour à l'autre l'Ouvrage complet, dont la publication s'est trouvée retardée par diverses circonstances. Au reste, cette première Partie renferme ce que mon pauvre Évariste a laissé de plus important et nous n'avons guère à y ajouter que quelques fragments arrachés au désordre de ses papiers. Ainsi on n'a rien retrouvé concernant la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes ; on voit seulement qu'il s'était livré la plume à la main à une étude approfondie de vos Ouvrages. Quant à la théorie des équations, M. Liouville et d'autres géomètres que j'ai consultés affirment que son Mémoire, si durement repoussé par M. Poisson, contient les bases d'une doctrine très féconde et une première application importante de cette doctrine. « Ce travail, me disent-ils, assure pour toujours une place à votre frère dans l'histoire des Mathématiques. » Malheureusement étranger à ces matières, j'écoute avec plaisir de telles paroles : si votre précieux suffrage, qu'Évariste aurait ambitionné par-dessus tout, venait les confirmer, ce serait pour ma mère et pour moi une bien grande consolation ; il deviendrait pour notre Évariste un gage d'immortalité, et je croirais que mon frère n'est pas entré tout entier dans la tombe. Etc., etc.

dérivées partielles du premier ordre, quelques calculs, avec un commencement de rédaction, sur les intégrales eulériennes [1], huit lignes, dont plusieurs mots sont déchirés, qui paraissent se rapporter au groupe alterné et n'avoir pas grand intérêt, un cahier dont la plupart des pages sont blanches et dont je dirai tout à l'heure deux mots, enfin une vingtaine de lignes sur le théorème d'Abel.

Ces vingt lignes peuvent être regardées comme un résumé de la

---

[1] En posant

$$[m, n] = \int_0^1 (1-x)^{m-1} x^{n-1}\, dx,$$

Galois part de la relation

$$[m+1, n] = \frac{m}{m+n}[m, n];$$

il en déduit, en désignant par p un nombre entier positif quelconque,

$$[m, n] = \frac{[p, m]}{[p, m+n]}[m+p, n],$$

puis

$$[m, n] = \lim_{p=\infty} \frac{[p, m] \times [p, n]}{[p, m+n]};$$

en remplaçant $[p, n]$ par $\frac{1}{p^n}\int_0^p \left(1-\frac{x}{p}\right)^{p-1} x^{n-1}\, dx$, et en passant à la limite, il obtient

$$[m, n] = \frac{\Gamma m\, \Gamma n}{\Gamma(m+n)}.$$

Il établit ensuite la relation

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\, dx = \varphi(n) - \varphi(1),$$

où

$$\varphi(n) = \frac{d \log \Gamma(n)}{dn},$$

en partant de ce que l'on a, pour $m = 1$

$$\frac{d \log [m, n]}{dm} = \frac{\int_0^1 \log(1-x)\, x^{n-1}\, dx}{\int_0^1 x^{n-1}\, dx} = \int_0^1 \log(1-x)\, n x^{n-1}\, dx,$$

d'où, en intégrant le dernier membre par parties,

$$\varphi(1) - \varphi(n+1) = -\int_0^1 \frac{x^n - 1}{x-1}\, dx.$$

célèbre « Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes » (¹), qui est datée de 1829; elles occupent les deux tiers de la première page d'une feuille double de même format (30 × 15) que la lettre à Chevalier. On lit en haut de la page :

Théorie des fonctions de la forme $\int X\,dx$, X étant une fonction algébrique de x.

Les mots « fonctions de la... », jusqu'à la fin, sont biffés et Galois a écrit au-dessus

intégrales dont les différentielles est algébrique.

Le premier titre est presque identique à ceux qui ont été signalés précédemment (t. XXX_1, p. 242 et p. 247), dont l'un porte la mention « septembre 1831 ». L'énoncé du théorème d'Abel (qui n'est pas nommé) est précédé des mots « Lemme fondamental ». Après la démonstration on lit

Remarque. Dans le cas où

Le reste de la page, les deux pages qui suivent sont en blanc (²). Ces quelques lignes sont-elles tout ce qui reste du *troisième Mémoire qui concerne les intégrales,* que Galois résume dans la lettre à Chevalier? Ce troisième Mémoire a-t-il été rédigé? Je rappelle quelques termes de la lettre

On pourra faire avec tout cela trois Mémoires.
Le premier est écrit, et... je le maintiens...
... tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête.

Le premier est écrit semble indiquer que les autres ne sont pas

---

(¹) *Œuvres d'Abel,* édition Sylow, t. I, p. 515.

(²) La feuille a été pliée; sur la moitié de la quatrième page, on trouve quelques calculs relatifs à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-2\alpha x+\gamma^2)(x^2-2\beta x+\gamma^2)}},$$

où Galois fait la substitution

$$x+\frac{\gamma^2}{x}=2z.$$

rédigés. *On pourra faire avec tout cela trois Mémoires* porte à penser que Galois laissait des notes, dont on ne peut plus espérer aujourd'hui qu'elles soient retrouvées. Une seule chose est certaine, c'est que, la veille de sa mort, *il avait tout cela dans sa tête*.

Le cahier est du format 20×15 ; on lit sur la couverture : Notes de mathématiques, quatorze pages, seulement, sont utilisées. On trouve dans ce cahier et, parfois, sur la même page, deux sortes d'écriture : pour l'une, il n'y a pas de doute, c'est bien celle de Galois, avec son allure habituelle. L'autre, beaucoup moins lisible, est droite. Je me suis demandé si Galois ne s'était pas amusé à déformer son écriture ; mais M. Paul Dupuy, après un examen attentif des deux écritures, a constaté qu'elles révélaient des habitudes très différentes : elles ne sont pas de la même personne.

Au reste, ce cahier, par son contenu, n'offre qu'un intérêt médiocre. Les pages qui sont de Galois contiennent quelques remarques sur les asymptotes des courbes algébriques et un court essai sur les principes de l'Analyse, dont je citerai quelques lignes ; elles caractérisent un état d'esprit qui résultait sans doute de l'enseignement que Galois avait reçu ; on n'oubliera pas qu'il n'était sans doute alors qu'un écolier, un écolier qui, peut-être, avait approfondi déjà des problèmes singulièrement difficiles.

Après avoir expliqué comment il juge la méthode de Lagrange, où le développement de Taylor tient le rôle essentiel, préférable à la méthode qui consiste à partir de la notion de dérivée considérée comme la limite de l'expression

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x},$$

limite qui ne peut être constamment nulle ou infinie, et comment le raisonnement de Lagrange ne tient pas debout, il propose de lui substituer le suivant :

Considérons d'abord une fonction $\varphi(z)$ qui devienne nulle pour la valeur o de la variable. Je dis que l'on pourra toujours déterminer un seul nombre positif et fini n de manière que $\frac{\varphi(z)}{z^n}$ ne soit ni nulle ni infinie, à moins que $\frac{\varphi(z)}{z^n}$ ne soit nul quand $z = 0$ pour toute valeur finie de n.

Car si $\frac{\varphi(z)}{z^n}$ n'est pas nul quand $z = 0$ pour toute valeur finie de n, soit m une valeur telle que $\frac{\varphi(z)}{z^m}$ ne soit pas nul quand $z = 0$. Si $\frac{\varphi(z)}{z^m}$ acquiert alors une valeur finie, la proposition est démontrée. Si non $\frac{\varphi(z)}{z^m}$ étant infini et $\varphi(z)$ nul pour $z = 0$, en faisant croître n depuis $n = 0$ jusqu'à $n = m$, les valeurs de $\frac{\varphi(z)}{z^n}$ pour $z = 0$ devront être infinies à partir d'une certaine limite. Soit p cette limite. $\frac{\varphi(z)}{z^p}$ ne sera pas infini pour $z = 0$ mais $\frac{\varphi(z)}{z^{p+\mu}}$ le sera, quelque petite que soit la quantité μ. Donc $\frac{\varphi(z)}{z^p}$ ne saurait être nul pour $z = 0$. La proposition est donc démontrée.

De cette proposition ainsi « démontrée », Galois conclut qu'une fonction $\varphi(z)$, qui ne devient pas infinie pour $z = 0$, peut se mettre sous la forme

$$\varphi(z) = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,z^n + \mathrm{C}\,z^m + \ldots + \mathrm{P}\,z^p + z^k\,\Psi(z),$$

où les exposants positifs n, m, ..., p, k vont en croissant, l'exposant k étant aussi grand qu'on veut et la fonction $\Psi(z)$ n'étant ni nulle ni infinie pour $z = 0$.

De la formule du binome il déduit ensuite le développement de Taylor.

Quant aux fragments qui suivent, j'ai cru devoir les reproduire tels quels, avec une exactitude minutieuse, en conservant l'orthographe, la ponctuation ou l'absence de ponctuation, sans les quelques corrections qui se présentent naturellement à l'esprit. Cette minutie m'était imposée pour les quelques passages où la pensée de Galois n'était pas claire pour moi; sur cette pensée, les fragments informes que je publie jetteront peut-être quelque lueur. Je me suis efforcé de donner au lecteur une photographie sans retouche.

II

[Première feuille] (¹).

Permutations. Nombres de lettres m.

Substitutions. Notation.

Période. Substitutions inverses. Substitutions semblables. Substitutions circulaires. Ordre. Autres substitutions.

Groupes. Groupes semblables. Notation.

Théorème I. Les Permutations communes à deux groupes forment un groupe.

Théorème II. Si un groupe est contenu dans un autre, celui-ci sera la somme d'un certain nombre de groupes semblables au premier, qui en sera dit un *diviseur*.

Théorème III. Si le nombre des permutations d'un groupe est divisible par p (p étant premier), ce groupe contiendra une substitution dont la période sera de p termes.

Réduction des groupes, dépendants ou indépendants. Groupes irréductibles.

Des groupes irréductibles en général.

Théorème. Parmi les permutations d'un groupe, il y en a toujours une où une lettre donnée occupe une place donnée, et, si l'on ne considère dans un groupe irréductible que les permutations où une même lettre occupe une même place et qu'on fasse abstraction de cette lettre, les permutations qu'on obtiendra ainsi formeront un groupe. Soit n le nombre des permutations de ce dernier mn (²).

Nouvelle démonstration du théorème relatif aux groupes alternes.

Théorème. Si un groupe contient une substitution complète de l'ordre m et une de l'ordre $m-1$, il sera irréductible.

(¹) Ce fragment occupe deux feuilles, écrites sur les deux faces, du format 23×18.

(²) Cette phrase elliptique a été ajoutée dans une fin de ligne et dans l'interligne au-dessous.

Discussion des groupes irréductibles. Groupes, primitif et non primitif. Propriété des racines (¹).

On peut supposer que le groupe ne contienne que des substitutions paires.

Il y aura toujours un système conjugué complet de m permutations quand $m = 4n$ et $4n+1$, un système conjugué complet de $\frac{m}{2}$ permutations quand $m = 4n+2$.

Donc $t = m - 2$ dans le premier cas, $t = \frac{m-2}{2}$ dans le second (²).

[Deuxième feuille.]

Application à la théorie des fonctions et des équations algébriques. Fonctions semblables. Combien il peut y avoir de fonctions semblables entre elles. Mr Cauchy. Groupes appartenant aux fonctions. Théorème plus général, quand $m > 4$. Quelles sont les fonctions qui n'ont que m valeurs, ou qui ne contenant que des substitutions paires, n'ont que $2m$ valeurs.

Théorème. Si une fonction de m indéterminées est donnée par une équation de degré inférieur à m dont tous les coéfficients soient des fonctions symmetriques permanentes ou alternées de ces indéterminées, cette fonction sera elle meme symmetrique, quand $m > 4$.

Théorème. Si une fonction de m indéterminées est donnée par une équation de degré m dont tous les coéfficients, etc.; cette fonction sera symmetrique permanente ou alternée par rapport à toutes les lettres ou du moins par rapport à $m - 1$ d'entre elles.

Théorème. Aucune équation algebrique de degré superieur à 4 ne saurait se résoudre ni s'abaisser.

Du cas ou une fonction des racines de l'équation dont le groupe est G est connu [e].

Théorème. Soit H le groupe d'une fonction φ des racines, G est

(¹) La première page finit ici; les six lignes qui suivent sont au verso.

(²) Un peu plus bas, on lit : Discussion des groupes irréductibles; le texte de la page est couvert de calculs, ecrits en renversant la page de haut en bas.

un diviseur de H, φ ne dépendra [plus que d'une] (1) équation du $n^{\text{ième}}$ degré.

On peut ramener à ce cas celui où on supposerait plusieurs fonctions connues.

Premier cas. Quand le groupe appartenant à la fonction connue est réductible. Cas où une seule permutation lui appartient.

2e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est irréductible non primitif.

3e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est primitif m étant premier (2).

4e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est primitif et que $m = p^2$.

5e cas. Quand le groupe est primitif $m - 1$ étant premier ou le carré d'un nombre premier (3).

Note sur les équations numériques.

Ce qu'on entend par l'ensemble des permutations d'une équation.

---

(1) Les mots mis ici entre crochets sont barrés; au reste tout ce passage, à partir de « Du cas ou » jusqu'à « plusieurs fonctions connues » est couvert de ratures et de surcharges; on lit, par exemple, sous une rature : « Si D est le commun diviseur à ce groupe et à celui de la fonction supposée »; tout ce passage est un renvoi placé au bas de la page, de façon à être substitué à trois lignes qui sont barrées, et dont voici le texte :

Du cas où une fonction des racines est censée connue.
Remarque. On peut réduire à ce cas celui où on supposerait plusieurs connues.

(2) Au-dessous en interligne :

Jusqu'ici on avait cru

(3) Les deux fragments qui suivent sont sur l'autre face de la feuille; ils sont séparés par un blanc laissé au milieu de la page; au-dessus de l'avant-dernière ligne du premier passage et dans le blanc, on trouve les mots suivants dont le premier est couvert d'une rature et dont les autres sont bâtonnés; la lecture du mot *Présenté* est douteuse.

Mémoire
sur la théorie des fonctions et sur celle
des équations littérales.
Présenté à l'Institut par
E. Galois.

Octobre 1829.

Du cas où cet ensemble constitue un groupe.

Il n'y a qu'une circonstance où nous avons reconnu que celà doit nécessairement avoir lieu. C'est celui où toutes les racines sont des fonctions rationnelles d'une quelconque d'entre elles. Démonstration.

C'est improprement, etc. Du reste, tout ce que nous avons dit est applicable à ce changement près. 1°. théorème. Si une équation jouit de la propriété énoncée, toute fonction des racines invariable par les $m-1$ substitutions conjuguées sera connue, et réciproquement. 2° Théorème découlant de la réciproque précédente [1]. Toute équation dont les racines seront des fonctions rationnelles de la première; jouira de la même propriété. 3° Corollaire. Si a est une racine imaginaire d'une pareille équation et que fa en soit la conjuguée, fx sera en general la conjuguée d'une racine quelconque imaginaire, x.

On peut passer aisément de ce cas à celui où une racine étant connue, quelques unes en dépendent par des fonctions rationnelles. Car soient

$$x,\quad \varphi_1 x,\quad \varphi_2(x),\quad \ldots.$$

Ces racines, si l'on prend, etc.

Il est aisé de voir que la même méthode de décomposition s'applique au cas où dans l'ensemble des permutations d'une équation, n memes lettres occupent toujours n mêmes places (abstraction faite de l'ordre) quand une seule de ces lettres occupe une de ces places, et il n'est pas nécessaire pour celà que l'ensemble de ces permutations constitue un groupe.

---

[1] Mots placés en interligne et presque illisibles; on pourrait aussi bien lire *remarque* que *réciproque*.

I

([1])

On appele groupe un système de permutations tel que etc. Nous representerons cet ensemble par G.

GS est le groupe engendré lorsqu'on opère sur tout le groupe G la substitution S. Il sera dit semblable;

Un groupe peut être fort différent d'un autre et avoir les mêmes substitutions. Ce groupe en général ne sera pas GS.

Groupe réductible est un groupe dans les permutations duquel n lettres ne sortent pas de n places fixes. Tel est le groupe

abcde	*abdec*	*abecd*
bacde	*badec*	*baecd*

Un groupe irréductible, etc.

Un groupe irréductible est tel qu'une lettre donnée occupe une place donnée. Car, supposons qu'une place ne puisse appartenir qu'à n lettres. Alors toute place occupée par l'une de ces lettres jouira de la même propriété. Donc etc.

Groupe irréductible non-primitif est celui où l'on a n places et n lettres telles que une des lettres ne puisse occuper une de ces places, sans que les n lettres n'occupent les n places.

On voit que les lettres se partageront en classes de n lettres telles que les n places en question ne puissent etre occupees à la fois que par l'une de ces places [classes] ([2]).

([1]) Une feuille du format 23×17, écrite sur les deux faces.

([2]) En renversant la page, on trouve quelques lignes relatives à la décomposition d'un groupe, que l'absence de contexte rend inintelligibles, puis le commencement d'une question, qu'on retrouve en entier sur un petit fragment de papier, comme il suit :

Étant donnée une substitution S et deux permutations A et A′ on demande une substitution S′ telle que la lettre située au $k^{\text{ième}}$ rang dans A prennant le $\varphi k^{\text{ième}}$ rang dans AS, la lettre située au k^{eme} rang dans A′ prenne le $\varphi k^{\text{ième}}$ dans A′S′.

Supposons le problème résolu. Soit A′ = AT, on aura évidemment

$$A'S' = AST$$

d'où

$$TS' = ST$$
$$S' = T^{-1}ST$$

Sur l'autre face du même fragment, on lit :

Si l'on représente les n lettres par n indices

$$1.2.3....n$$

toute permutation pourra être représentée

$$\varphi 1 \quad \varphi 2 \quad \varphi 3 \quad \ldots \quad \varphi n$$

φ étant une fonction convenablement choisie la substitution par laquelle on passe de la première perm. à l'autre sera $(k, \varphi k)$, k désignant un indice quelconque.

Au lieu de représenter les lettres par des nombres on pourrait représenter les places par des nombres.

J

. . . .

équations ([1]). Nous nous contenterons donc d'avoir exposé les définitions indispensables pour l'intelligence de la suite et nous allons montrer la liaison qui existe entre les deux théories.

§ 2. *Comment la théorie des Equations dépend de celle des Permutations.*

6. Considérons une équation à coëfficients quelconques et regardons comme rationnelle toute quantité qui s'exprime rationnellement au moyen des coëfficients de l'équation, et même au moyen d'un certain nombre d'autres quantités irrationnelles *adjointes* que l'on peut supposer connues à priori.

Lorsqu'une fonction des racines ne change pas de valeur numériques par une certaine substitution opérée entre les racines, elle est dite invariable par cette substitution. On voit qu'une fonction peut très bien être invariable par telle ou telle substitution entre les racines, sans que sa forme l'indique. Ainsi, si $F(x) = 0$ est l'équation proposée, la fonction $\varphi[F(a), F(b), F(c), \ldots]$, ($\varphi$ étant une fonction quelconque, et a, b, c .. les racines) sera une fonction de ces racines invariable par toute substitution entre les racines, sans que sa forme l'indique généralement.

Or c'est une Question dont il ne paraît pas qu'on ait encore la solution, de savoir si, étant donnée une fonction de plusieurs

---

([1]) Ce fragment comporte trois feuilles du format 20 × 15, du même papier que le fragment M ; la troisième feuille, dont il est question dans une note ultérieure, est intacte ; les deux autres sont déchirées, à droite, de haut en bas ; il manque quelques lettres et, parfois, des mots entiers ; d'où les crochets que l'on trouvera dans le texte imprimé. La déchirure a pu se faire en détachant les trois feuilles d'un cahier pareil à celui qui porte le titre « Notes de mathématiques » et dont j'ai parlé plus haut.

Cet essai est sans doute antérieur à la rédaction du Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, et de la feuille relative à la proposition I de ce Mémoire, dont j'ai parlé précédemment (*Bulletin*, t. XXX, p. 236); les deux rédactions sont interrompues ; pour l'une et l'autre, la fin de la page reste blanche : l'essai n'a pas été achevé.

quantités numériques, on peut trouver un groupe qui contienne toutes les substitutions par lesquelles cette fonction est invariable, et qui n'en contienne pas d'autres.

Il est certain que celà a lieu pour des quantités littérales, puisqu'une fonction de plusieurs lettres invariables par deux substitutions est invariable par leur produit. Mais rien n'annonce que la même chose ait toujours lieu quand aux lettres on substitue des nombres.

On ne peut donc point traiter toutes les équations comme les équations littérales. Il faut avoir recours à des considérations fondées sur les propriétés particulières de chaque équation numérique. C'est ce que je vais tacher de faire

Des cas particuliers des équations [1]

7 Remarquons que tout ce qu'une équation numérique peut avoir de particulier, doit provenir de certai[nes] relations entre les racines. Ces relations seront ratio[nnelles] dans le sens que nous l'avons entendu, c'est à dir[e] qu'elles ne contiendront d'irrationnelles que les coëfflci[ents] de l'équation et les quantités adjointes. De plus [ces] relations ne devront pas être invariables par to[ute] substitution opérée sur les racines, sans quoi on [n'aurait] rien de plus que dans les équations littérales.

Ce qu'il importe donc de connaitre, c'est par quelles substitutions peuvent être invari[ables] des relations entre les racines, ou ce qui revient a[u même,] des fonctions des racines dont la valeur numéri[que] est déterminable rationnellement.

A ce sujet, nous allons démontrer un théorème de la dernière importance dans cette matière et dont l'énoncé suit : « *Etant donnée une équation avec un certain nombre de quantités adjointes, il existe toujours un certain groupe de permutations dont les substitutions sont telles* [2] *que toute fonction des ra-*

---

(1) Ces mots sont mis en marge.

(2) La page se termine au mot « telles », le reste se continue sur deux feuilles distinctes; l'une de ces deux feuilles est écrite sur le recto et le verso, c'est celle dont le texte est imprimé ci-dessus ; l'autre feuille n'est écrite que sur le recto, jusqu'au milieu de la page : le verso contient quelques calculs relatifs à la résolution algébrique de l'équation du troisième degré. Les deux feuilles contiennent le même texte jusqu'à la fin de l'alinéa « ... sont seules connues ». A partir de ces mots, on lit dans la seconde feuille :

Mais, avant de développer la démonstration complete de cette proposition.

cines invariable par ces substitutions est rationnellement connue, et telle réciproquement qu'une fonction ne peut être rationnellement déterminable, à moins d'être invariable par ces substitutions que nous nommerons substitutions de l'équation. » (Dans le cas des équations littérales, ce groupe n'est autre chose que l'ensemble de toutes les permutations des racines, puisque les fonctions symmétriques sont seules connues).

Pour plus de simplicité, nous supposerons dans la démonstration de notre théorème, qu'il ait été reconnu pour toutes les équations de degrés inférieurs; ce qu'on peut toujours admettre puisqu'il est évident pour les équations du second degré.

Admettons donc la chose pour tous les degrés inférieurs à m; pour la démontrer dans le $m^{\text{ième}}$, nous distinguerons quatre cas :

1er Cas. L'équation se décomposant en deux ou en un plus grand nombre de facteurs.

Soit $U = o$ l'équation, $U = VT$, V et T étant des fonctions dont les coëfficients se déterminent rationnellement au moyen des coëfficients de la proposée et des quantités adjointes.

Je vais faire voir que, dans l'hypothèse, on pourra trouver un groupe qui satisfasse à la condition énoncée.

Remarquons ici que dans ces sortes de questions, comme il ne s'agit que des substitutions par les quelles des fonctions sont invariables, si un groupe satisfait à la condition, tout groupe qui aurait les mêmes substitutions y satisfera aussi. Il convient donc de partir toujours d'une permutation arbitraire, mais fixe, afin de déterminer les groupes que l'on aura à considérer. De cette manière, on évitera toute ambiguité.

Celà posé, dans le cas actuel, il est clair que si l'on adjoignait à l'équation $U = o$, toutes les racines de l'équation $V = o$, l'équation $U = o$ se décomposerait en facteurs dont l'un serait $T = o$, et les autres seraient les facteurs simples de V.

Soit H le groupe que l'on obtient en opérant [sur] une permutation arbitraire A des racines de l'équati[on] $U = o$, toutes les

---

nous ferons voir qu'il suffit de la donner dans le cas où l'équation proposée ne se décompose pas en facteurs dont les coëfficients se déduisent rationnellement de ses coëfficients et des quantités qui lui sont adjointes, plus brièvement, dans le cas où l'équation n'a pas de diviseurs rationnels. Admettons en effet que la chose ait été démontrée dans ce cas, et supposons qu'une équation se décompose en deux facteurs qui n'aient eux-mêmes aucun diviseur rationnel.

substitutions qui sont relatives à l'équation $T = o$ quand on [lui] adjoint les racines de $V = o$.

Soit K le groupe que l'obtient en opérant sur [toutes] les substitutions qui sont relatives à $V = o$ q[uand on] ne lui adjoint que les quantités [adjoin]tes primitivement à la proposée.

Combinez en tous sens toutes les substitutions du groupe H avec [celles] du groupe K. Vous obtiendrez un groupe réductible [que] je dis jouir de la condition éxigée relativement [à la] question proposée.

En effet toute fonction invariable par les substi[tutions] du groupe (1)

---

(1) Un fragment qui semble un morceau déchiré (hauteur, 9^{cm}) d'une feuille de papier du même format contient le texte suivant, d'un côté :

Soit G un groupe correspondant à l'équation $\psi = o$ et A, B, C.... les permutations du groupe G. Pour obtenir un pareil groupe, il faut opérer sur une permutation A toutes les substitutions de l'équation ψ. Nous supposons que la permutation A contienne toutes [les] racines de $F(x) = o$.

Prennons une fonction $\Phi(A\Sigma)$ invariable par les substitutions Σ relatives aux racines de φ,

et de l'autre côté :

qui correspondent aux substitutions indiquées quand aux racines de l'équation φ on substitue leurs expressions en fonction de celles de ψ. Je dis qu'il viendra un groupe de Permutations qui relativement à la proposée $F(x) = o$ satisfera à la condition exigée. En effet, toute fonction des racines invariable par les substitutions de ce groupe pourra d'abord s'exprimer en fonction des seules racines de l'équation ψ. De plus, comme cette fonction transformée sera encore invariable par les substitutions de l'équation ψ on voit que sa valeur numérique

K

(¹)

Soit donc $\varphi(H)$ une certaine fonction invariable par les substitutions du groupe H et non par celles du groupe G. On aura donc

$$\varphi(H) = f(r)$$

la fonction f ne contenant dans son expression que les quantités antérieurement connues.

Éliminons algébriquement r entre les équations

$$r^p = A \qquad f(r) = z$$

On aura une équation irréductible du $p^{\text{ième}}$ degré en z. (Si non z serait fonction de r^p : ce qui est contre l'hypothèse). Maintenant soit S une des substitutions du groupe G qui ne lui soient pas communes à H. On voit que $\varphi(HS)$ sera encore racine de l'équation ci-dessus en z, puisque les coëfficients de cette équation sont invariables par la substitution S.

On aura donc

$$\varphi(HS) = f(\alpha r)$$

α étant une des racines de l'unité.

Ces deux équations

$$\varphi(H) = f(r) \qquad \varphi(HS) = f(\alpha r)$$

Donneront par l'élimination de r une relation entre

$$\varphi(H) \quad \varphi(HS) \quad \text{et} \quad \alpha$$

indépendante de r, et la même relation aura par conséquent lieu entre

$$\varphi(H) \quad \text{et} \quad \varphi(HS^2)$$

Donc : comme

$$\varphi(HS) = f(\alpha r)$$

on en déduit

$$\varphi(HS^2) = f(\alpha^2 r)$$

(¹) Feuille déchirée (18 × 17), écrite sur les deux faces.

et ainsi de suite, jusqu'à

$$\varphi(\mathrm{HS}^{p}) = f(r) = \varphi(\mathrm{H})$$

Ainsi la connaissance de la seule quantité r, donne à la fois toutes les fonctions correspondantes aux groupes

$$\mathrm{H}, \quad \mathrm{HS}, \quad \mathrm{HS}^2, \quad \ldots\ldots$$

la somme de ces groupes est évidemment G, puisque toute

L.

Étant donnée (¹) une équation avec tant de quantités adjointes que l'on voudra, on peut toujours trouver quelque fonction des racines qui soit numériquement invariable par toutes les substitutions d'un groupe donné et ne le soit pas par d'autres substitutions.

Si le groupe d'une équation se décompose en n groupes semblables H, HS, HS (²), et qu'une fonction $\varphi(H)$ soit invariable par toutes les substitutions du groupe H par aucune autre substitution du groupe G, cette fonction est racine d'une équation irréductible du $n^{\text{ième}}$ degré dont les autres racines sont $\varphi(HS)$, ...

(¹) Cet énoncé est écrit sur un morceau de papier (10 × 18); l'écriture, parfois malaisée à déchiffrer en raison des ratures et des surcharges, trahit une certaine nervosité; au-dessous, Galois a mis son nom, écrit à main posée, avec une certaine complaisance.

(²) Il n'est guère utile de dire qu'il faut lire HS^2: ce passage est à demi effacé.

M

Note (¹).

On appèle équations non-primitives les équations qui, étant, par exemple du degré mn se décomposent en m facteurs du degré n au moyen d'une seule équation du degré m. Ce sont les Equations de Mr Gauss. Les équations primitives sont celles qui ne jouissent pas d'une pareille simplification. Je suis, à l'égard des Equations primitives, parvenu aux résultats suivants :

1° Pour qu'une équation primitive de degré m soit résoluble par radicaux, il faut que $m = p^{\nu}$, p étant un nombre premier

2° Si l'on excepte le cas de $m = 9$ et $m = p^{p}$, l'équation devra être telle que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement.

3° Dans le cas de $m = p^{p}$, deux des racines étant connues, les autres doivent s'en déduire du moins par un seul radical du degré p.

4° Enfin dans le cas de $m = 9$, l'équation doit être du genre de celles qui déterminent la trisection des fonctions Elliptiques.

La démonstration de ces propositions est fondée sur la théorie des permutations.

(¹) Une seule page de format 20 × 15. Ce fragment et le suivant doivent être rapprochés de l'*Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations*, qui a été publiée dans le *Bulletin de Férussac* (*Œuvres*, p. 11), et dont les premières lignes sont identiques à celles du fragment M.

N

(1)

Addition au mémoire sur la résolution des équations.

Lemme I. Soit un groupe G de $mt.n$ permutations, qui se décompose en n groupes semblables à H. Supposons que le groupe H se décompose en t groupes de m permutations, et semblables à K.

Si, parmi toutes les substitutions du groupe G, celles du groupe H sont les seules qui puissent transformer l'une dans l'autre quelques substitutions du groupe K, on aura $n \equiv 1$ (mod. m) ou $tn \equiv t$ (mod. m).

Lemme II. Si μ est un nombre premier, et p un entier quelconque on aura

$$(x-p)(x-p^2)(x-p^3)\ldots(x-p^{\mu-1}) \equiv \frac{x^{\mu}-1}{x-1} \left(\text{mod. } \frac{p^{\mu}-1}{p-1}\right).$$

Ces deux lemmes permettent de voir dans quel cas un groupe primitif de degré p^{ν} (où p est premier) peut appartenir à une équation résoluble par radicaux.

En effet, appelons G un groupe qui contient toutes les substitutions linéaires possibles par les $\frac{p^{\nu}-1}{p-1}$ lettres. (Voyez le mémoire cité.) Soit, s'il est possible, L un groupe qui divise G et qui se partage lui-même en p groupes semblables à K, K ne comprenant pas deux permutations où une lettre occupe la même place. On peut prouver 1° que s'il y a dans le groupe G et hors du groupe L, quelque substitution S qui transforme l'une dans l'autre quelques substitutions du groupe K, cette substitution sera de r termes, r étant un diviseur de $p-1$.

D'après celà, comme le nombre de permutations du groupe G est

$$\frac{p^{\nu}-1}{p-1}\cdot(p^{\nu}-p^{\nu-1})(p^{\nu}-p^{\nu-2})\ldots\ldots(p^{\nu}-p^{2})(p^{\nu}-p)$$

d'après le lemme I, on devra avoir (2)

$$(p^{\nu}-p^{\nu-1})(p^{\nu}-p^{\nu-2})\ldots\ldots(p^{\nu}-p^{2})(p^{\nu}-p) \equiv p^{k} r \left(\text{mod. } \frac{p^{\nu}-1}{p-1}\right)$$

(1) Une feuille (18 × 15), écrite des deux côtés.

(2) Relativement au premier membre de la congruence qui suit, je dois signaler

D'où L'on voit que ν doit être un nombre premier([1]). (Lemme II)

$$pr \equiv \nu \left(\operatorname{mod} \frac{p^\nu - 1}{p-1}\right)$$

On en déduit quand $\nu > 2$ $pr = \mu$, savoir $p = \nu$, puisque p et μ sont premiers.

Ainsi, le théorème que j'avais énoncé dans mon mémoire sera vrai dans tout autre cas que dans celui où p serait élevé à la puissance p.

Toujours devra-t-on avoir $r = 1$, et $L = H$. Ainsi même dans le $p^{p\text{ème}}$ degré le groupe de l'équation réduite du degré $\frac{p^p - 1}{p-1}$ devra être de $\frac{p^p - 1}{p-1}p$ permutations. La règle est donc encore fort simple dans ce cas.

il faut comme on voit 1° que $\nu = 1$; 2° que le groupe de la réduite soit de $\frac{p^p - 1}{p-1}p$ permutations

---

l'énoncé que voici, écrit sur la première page d'une feuille double ([illegible] 18) :

Le produit

$$(p^\nu - p)(p^\nu - p^2)(p^\nu - p^3)\ldots(p^\nu - p^{\nu-1})$$

n'admet point de facteur premier $> \frac{p^\nu - 1}{\partial(p-1)}$, ∂ étant le plus grand commun diviseur entre ν et $p - 1$, à moins que $\nu = 2$.

Cet énoncé est placé au milieu de calculs dont quelques-uns concernent la transformation des fonctions elliptiques. Sur les autres pages, d'autres formules se rapportent à l'équation $\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dt^2}$, aux fonctions trigonométriques, à la résolution des équations binomes, à la décomposition des fonctions trigonométriques en produits ou en fractions simples, etc.

([1]) Dans la ligne qui suit et, un peu plus loin, dans l'égalité $p = \nu$, la lettre ν a été mise en surcharge sur la lettre μ; ensuite, la correction n'a pas été faite. Au reste, la lecture de ce fragment est, par endroits, assez difficile.

( )

([1])

Dans un mémoire sur la théorie des Équations, j'ai fait voir comment on peut résoudre une équation algébrique de degré premier m, dont les racines sont $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, quand on suppose connue la valeur d'une fonction des racines qui ne demeure invariable que par les substitutions de la forme (x_k, x_{ak+b}). Or il arrive, par un hasard que nous n'avions pas prévu, que la Méthode proposée dans ce mémoire s'applique avec succès à la division d'une fonction elliptique de première classe en un nombre premier de parties égales. Nous pourrions, à la rigueur, nous contenter de donner cette division, et le problème de la section des fonctions de première classe pourrait être considéré comme résolu.

Mais, afin de rendre cette solution plus générale, nous nous proposerons de diviser une fonction elliptique de première classe en m parties égales, m étant $= p^n$ et p premier.

Pour celà nous étendons d'abord la méthode exposée dans le mémoire cité, au cas où le degré de l'équation serait une puissance de nombre premier. Nous supposerons toujours que les racines soient $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$, et que l'on connaisse la valeur d'une fonction de ces racines qui ne demeure invariable que pour des substitutions de la forme $(k, ak+b)$.

Dans cette expression, k et $ak+b$ signifieront les restes minima de ces quantités par rapport à m. Parmi les substitutions de cette forme, que, pour abréger, nous appelerons substitutions linéaires, il est clair que l'on ne peut admettre que celles où a est premier avec m, sans quoi une même $ak+b$ remplacerait à la fois plusieurs k.

Celà posé, passons à la resolution de la classe d'équations indiquée.

§ 1. *Résolution de l'équation algébrique de degré p^n en y supposant connue la valeur d'une fonction qui n'est invariable que par des substitutions linéaires.*

La congruence $k = ak+b$ n'étant pas soluble pour plus d'une

([1]) Trois feuilles ([illegible]) écrites sur les deux faces.

seule valeur, on voit clairement que la fonction qu'on suppose connue n'est invariable par aucune substitution dans laquelle deux lettres garderaient un même rang.

Si donc, mutatis mutandis, on applique à ce cas les raisonnements employés dans le mémoire cité, on vérifiera l'énoncé de la proposition qui suit :

« Étant supposée connue la valeur de la fonction en question, une racine s'exprimera toujours au moyen de deux autres, et l'égalité qu'on obtiendra ainsi sera invariable par les substitutions telles que $(k, ak + b)$. »

Soit donc $x_2 = f(x_1, x_0)$, on en déduira en général,

$$x_{2a+b} = f(x_{a+b}, x_b),$$

équation qui, appliquée de toutes manières, donnera l'expression d'une quelconque des racines de deux autres quelconques, si l'on a soin d'y substituer successivement les expressions des racines qui entrent dans cette équation.

Celà posé, prenons une fonction symmétrique Φ des racines $x_0, x_p, x_{2p}, x_{3p}, \ldots\ldots, x_{(p^{n-1}-1)p}$; il vient

$$\Phi(x_0, x_p, x_{2p}, \ldots\ldots) = \Phi_0$$
$$\Phi(x_1, x_{p+1}, x_{2p+1}, \ldots\ldots) = \Phi_1$$
$$\Phi(x_2, x_{p+2}, x_{2p+2}, \ldots\ldots) = \Phi_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\Phi(x_{p-1}, x_{2p-1}, \ldots\ldots) = \Phi_{p-1}$$

et supposons qu'en général $\Phi_{k+p} = \Phi_k$. Toute fonction des quantités Φ, qui sera invariable par les substitutions linéaires de ces quantités, sera évidemment une fonction invariable par les substitutions linéaires de $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Ainsi l'on connaitra à priori toute fonction des quantités, $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1}$, invariable par les substitutions linéaires de ces quantités. On pourra donc 1° former l'équation dont ces quantités sont racines (puisque toute fonction symmétrique est à plus forte raison invariable par les substitutions); 2° résoudre cette équation.

Il suit de là, qu'on pourra toujours, au moyen d'une équation de degré p, algébriquement soluble, diviser l'équation proposée

en facteurs dont les racines seront respectivement

$$\begin{array}{lllll} x_0 & x_p & x_{2p} & x_{3p} & \ldots\ldots \\ x_1 & x_{p+1} & x_{2p+1} & x_{3p+1}, & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \end{array}$$

Comme dans chaque facteur on aura l'expression d'une racine au moyen de deux autres, par éxemple, dans le premier,

$$f(x_p, x_0) = x_{2p}$$

et que cette expression sera invariable par toute substitution linéaire, on voit que chaque facteur pourra se traiter comme l'équation donnée, et que le problème, s'abaissant successivement, sera enfin résolu.

On peut en conséquence regarder comme solubles les équations dans les quelles on connaitrait la valeur d'une fonction des racines qui ne serait invariable que par des substitutions linéaires, quand le degré de l'équation est une puissance de nombre premier.

Nous pouvons donc passer à la solution du problème général de la section des transcendantes de première classe, puisque, toute fraction étant la somme de fractions dont les dénominateurs sont des puissances de nombres premiers, il suffit d'apprendre à diviser ces transcendantes en p^n parties égales.

§ 2. *Division des transcendantes de première espèce en $m = p^n$ parties égales.*

Nous déterminerons chaque transcendante par le sinus de son amplitude. On pourrait de la même manière prendre le cosinus ou la tangente, et il n'y aurait rien à changer à ce que nous allons dire.

Nous désignerons par (x, y) le sinus de la transcendante somme des transcendantes dont les sinus sont x et y. Si x est le sinus d'une transcendante, $(x)^k$ désignera celui d'une transcendante k fois plus grande.

Il est clair que $(x, -y)$ sera le sinus de la différence des transcendantes qui ont pour sinus, d'après la notation indiquée pour les sommes.

Celà posé, nous commencerons par une remarque sur la nature des quantités qui satisfont à l'équation $(x)^m = 0$.

Si l'on désigne par p l'une de ses racines, il est clair que $(p)^k$ en sera une autre. L'on aura donc une suite de racines exprimée par p, $(p)^2$, $(p)^3$, ..., $(p)^{m-1}$. Le nombre des racines étant $> m$, soit q une des racines qui ne sont pas comprises dans cette suite, $(q)^l$ sera une autre racine différente de q et des premières. Car, si l'on avait $(p)^k = (q)^l$ on en déduirait $q = (p)^g$, g étant un nombre entier.

Prennant donc les deux suites p, $(p)^2$, ... et q, $(q)^2$, ... on trouvera pour la formule générale des racines de l'équation $(x)^m = 0$, cette expression

$$((p)^k, (q)^l)$$

Celà posé, supposons que l'on donne à résoudre l'équation $(x)^m = \sin A$, m étant impair et toujours de la forme p^n. Si x est une des racines, il est clair que toutes les autres seront

$$(x, (p)^k, (q)^l)$$

Posons donc en général

$$(x, (p)^k, (q)^l) = x_{k.l}$$

en faisant $x = x_{00}$, nous en déduirons généralement

$$(x_{2a+b.2c+d}) - (x_{a+b.c+d}) = (x_{a+b.c+d}) - (x_{b.d})$$

d'où

$$(x_{2a+b.2c+d}) = ((x_{a+b.c+d})^2) - (x_{b.d})$$

Or il est aisé de tirer de cette égalité une expression rationnelle de $x_{2a+b.2c+d}$ en fonction de $x_{a+b.c+d}$ et de $x_{b.d}$. Car si φ est l'arc correspondant à l'un quelconque des sinus qui satisfont à l'équation $(x)^m = \sin A$ pour avoir $\cos\varphi$ en fonction de $\sin\varphi$, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre les équations $x^2 + y^2 = 1$ et $f(y) = \cos A$, $f(y)$ étant le cosinus de la transcendante m fois plus grande que celle dont le cosinus est y. On trouverait de même $\Delta\varphi$ en fonction rationnelle de $\sin\varphi$.

On pourra donc, par les formules connues, exprimer

$$x_{2a+b.2c+d} = f(x_{a+b.c+d}, x_{b.d})$$

en fonction rationnelle de $x_{a+b.c+d}$ et de $x_{b.d}$.

Ce principe posé, démontrons la proposition suivante :

« Toute fonction rationnelle de $x_{0.0}$ $x_{1.0}$ $x_{0.1}$ .... invariable par les substitutions de la forme $(x_{k.l}, x_{ak+b.cl+d})$ est immédiatement connue. »

En effet, on pourra d'abord rendre cette fonction fonction de $x_{0.0}$, $x_{0.1}$, $x_{1.0}$ seuls, par l'élimination des autres racines. Cette fonction ne changerait pas de valeur si à la place de $x_{0.0}$, $x_{0.1}$, $x_{1.0}$ on mettait $x_{0.0}$, $x_{0.1}$, $x_{k.l}$, k n'étant pas nul.

Or, comme toute racine de la forme $x_{0.l}$ s'exprime en fonction rationnelle de $x_{0.0}$ et $x_{0.1}$, il s'ensuit que toute fonction symmetrique des racines dans les quelles le premier indice n'est pas nul sera connue en fonction rationnelle et entière de $x_{0.0}$ et de $x_{0.1}$. Donc la fonction que nous considérions tout à l'heure ne variant pas quand on met pour $x_{1.0}$ l'une quelconque des racines dont le premier indice n'est pas nul, cette fonction sera une fonction de $x_{0.0}$ et de $x_{0.1}$ seuls. On éliminera encore $x_{0.1}$ de cette fonction qui deviendra fonction de $x_{0.0}$ et enfin une quantité connue.

Le principe est donc démontré.

Celà posé soit F une fonction symmétrique de certaines racines de l'équation proposée. Posons

$$F(x_{0.0}, x_{0.1}, x_{0.2}, \ldots) = y_0$$
$$F(x_{1.0}, x_{1.1}, x_{1.2}, \ldots) = y_1$$
$$F(x_{2.0}, x_{2.1}, x_{2.2}, \ldots) = y_2$$

Prennons une fonction de y_0 y_1 y_2... invariable par les substitutions linéaires de ces quantités. Il est clair que cette fonction sera une fonction des racines x invariable par toute substitution telle que [1] $(x_{k.l, ak+b.ck+d})$. Cette fonction sera donc connue. On pourra donc, par la méthode que j'ai indiquée, trouver les valeurs de y_0 y_1 y_2 ... et par conséquent décomposer l'équation proposée en facteurs dont l'un ait pour racines $x_{0.0}$ $x_{0.1}$ $x_{0.2}$ ...

On trouverait de même un facteur de la même équation dont les racines seraient $x_{0.0}$ $x_{1.0}$ $x_{2.0}$ .... On pourra donc en cherchant le plus grand commun diviseur de ces deux facteurs avoir $x_{0.0}$ qui est l'une des solutions cherchées. Il en serait de même des autres racines.

---

(1) Il faut lire sans doute

$$(x_{k.l,\, ak+b.cl+d}).$$

P

(1)

Note I.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Soit l'équation linéaire à coefficients variables

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + S\frac{dy}{dx} + Ty = V$$

Pour l'intégrer supposons que nous connaissions n solutions

$$y = u_1, \quad = u_2, \quad = u_3, \quad \ldots, \quad = u_n$$

de cette équation privée de second membre. La solution complète

$$y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_n u_n$$

qui convient à l'équation privée de second membre, satisfera encore quand on supposera se second membre, si au lieu de regarder $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n$ comme constantes, on les considère comme déterminés par les équations suivantes en $\frac{d\alpha_1}{dx}\ \frac{d\alpha_2}{dx} \cdots \frac{d\alpha_n}{dx}$

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & u_1\frac{d\alpha_1}{dx} + u_2\frac{d\alpha_2}{dx} + u_3\frac{d\alpha_3}{dx} + \ldots + u_n\frac{d\alpha_n}{dx} = 0 \\ & \frac{du_1}{dx}\cdot\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{du_2}{dx}\cdot\frac{d\alpha_2}{dx} + \frac{du_3}{dx}\frac{d\alpha_3}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx}\frac{d\alpha_n}{dx} = 0 \\ & \frac{d^2 u_1}{dx^2}\cdot\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{d^2 u_2}{dx^2}\frac{d\alpha_2}{dx} + \frac{d^2 u_3}{dx^2}\frac{d\alpha_3}{dx} + \ldots + \frac{d^2 u_n}{dx^2}\frac{d\alpha_n}{dx} = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \frac{d^{n-1} u_1}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{d^{n-1} u_2}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_2}{dx} + \frac{d^{n-1} u_3}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_3}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1} u_n}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_n}{dx} = V \end{aligned} \right.$$

Il importe d'abord de reconnaître si le dénominateur commun aux valeurs tirées de ces équations peut ou non être nul.

Pour celà j'observe que ce dénominateur est le même que celui

(1) Deux pages et demie d'une feuille double (23 × 18).

des n équations suivantes résolues par rapport à P Q .... S T

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^n u_1}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \ldots + S\frac{du_1}{dx} + Tu_1 = 0\\
&\frac{d^n u_2}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}u_2}{dx^{n-2}} + \ldots + S\frac{du_2}{dx} + Tu_2 = 0\\
&\frac{d^n u_3}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}u_3}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}u_3}{dx^{n-2}} + \ldots + S\frac{du_3}{dx} + Tu_3 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^n u_n}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}u_n}{dx^{n-2}} + \ldots + S\frac{du_n}{dx} + Tu_n = 0
\end{aligned}\right.$$

Or ces équations doivent être parfaitement déterminées, puisque la forme d'une équation différentielle dépend uniquement de celle de l'équation intégrale.

Donc le dénominateur en question n'est jamais nul.

Mais on peut de plus le calculer d'avance. Soit D le dénominateur. Il est aisé de voir que l'on aura

$$\frac{dD}{dx} = D_n + D_{n-1} + D_{n-2} + D_{n-3} + \ldots + D_1$$

D_n étant ce que devient D quand on y substitue partout $\frac{d^n u}{dx^n}$ à la place de $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$,

D_{n-1} ce que devient D quand on y met $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ au lieu de $\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}$ et ainsi de suite

enfin D_1 ce que devient D par la substitution de $\frac{du}{dx}$ à la place de u

Et comme toutes les parties sont nulles excepté D_n, il reste

$$\frac{dD}{dx} = D_n$$

Mais on a d'ailleurs

$$P = -\frac{D_n}{D}$$

Puisque $-D_n$ est le numérateur de l'expression de P tirée de (2).

Donc $D = e^{-\int P dx}$ valeur cherchée du dénominateur.

On pourrait de cette dernière formule déduire celle que nous avons trouvée plus haut, en considérant une équation linéaire de

l'ordre n, comme remplaçant n équations simultanées seulement du premier ordre. Quant à la détermination des numérateurs des quantités inconnues, et à l'examen du cas où l'on n'aurait qu'une partie des solutions de la question, nous n'entrerons pas dans ces détails aux quels le lecteur suppléera au moyen des principes émis plus haut.

Q

RECHERCHE SUR LES SURFACES DU 2[d] DEGRÉ [1].

Problème [2]. Étant données dans un parallélépipède les trois arêtes m, m', m'', et les angles θ, θ', θ'', que font entre elles respectivement m' et m'', m et m'', m et m', trouver l'expression des angles de la diagonale avec les arêtes.

Soit $m = \mathrm{OM}$, $m' = \mathrm{OM}'$, $m'' = \mathrm{OM}''$. Si l'on cherche l'angle POM que la diagonale OP forme avec OM, on aura dans le triangle OPM

$$\cos \mathrm{POM} = \frac{m^2 + \mathrm{OP}^2 - \overline{\mathrm{PM}}^2}{2\, m . \mathrm{OP}}$$

Mais on a par la géométrie

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 + 2\, m' m'' \cos\theta + 2\, m m'' \cos\theta' + 2\, m m' \cos\theta''$$

$$\overline{\mathrm{PM}}^2 = m'^2 + m''^2 + 2\, m' m'' \cos\theta$$

d'où l'on tire

$$m^2 + \overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{PM}}^2 = 2\, m\,(m + m'' \cos\theta' + m' \cos\theta'')$$

---

(1) Malgré son caractère élémentaire, j'ai cru devoir publier cette note, qui n'est pas sans intérêt pour l'histoire de la Géométrie analytique et de la théorie des invariants. En raison de son contenu, on peut supposer qu'elle remonte au temps où Galois était élève de M. Richard, dans la classe de Mathématiques spéciales, ou au moment où il sortait de cette classe pour entrer à l'École Normale. Toutefois, la première supposition semble devoir être écartée : s'il en avait eu connaissance, M. Richard aurait sans doute fait pénétrer dans son enseignement les idées de son élève, qui se seraient diffusées immédiatement. Quoi qu'il en soit, cette note a, comme le morceau précédent, l'aspect d'une copie d'écolier, avec la signature en haut et à gauche ; elle ressemble tout à fait à quelques-unes des copies de Galois, que M. Richard avait conservées et données à Hermite. M. Émile Picard a retrouvé ces copies de Galois dans les papiers d'Hermite ; il a bien voulu me les remettre pour qu'elles soient jointes au précieux trésor que M[me] de Blignières donne à l'Académie des Sciences. L'une de ces copies contient un petit travail, que Galois a sans doute fait librement et remis à son maître, et où son esprit philosophique se manifeste déjà ; j'en extrais cette curieuse réflexion :

Un auteur me dit : « l'arithmétique est la base de toutes les parties des Mathématiques, puisque c'est toujours aux nombres qu'il faut ramener les résultats des calculs. » D'après la dernière phrase de l'auteur, il serait plus naturel de croire que l'arithmétique est le terme et le complément de l'Analyse ; et c'est ce qui a lieu.

Toutes ces copies, comme la présente note, sont sur du papier de format 23 × 18.

(2) Il y a une figure en marge, dans le texte de Galois.

et enfin

$$\cos \mathrm{POM} = \frac{m + m'' \cos\theta' + m' \cos\theta''}{\mathrm{OP}}.$$

On trouvera de même pour les cosinus des angles M′OP et M″OP

$$\frac{m' + m'' \cos\theta + m \cos\theta''}{\mathrm{OP}} \quad \text{et} \quad \frac{m'' + m' \cos\theta + m \cos\theta'}{\mathrm{OP}}.$$

Le problème est donc résolu.

Problème. Trouver pour des axes quelconques la condition de perpendicularité d'une droite et d'un plan.

Prennons à partir de l'origine et suivant certaine direction OP = 1. Appelons m, m', m'' les coordonnées du point P. Les équations de toute droite parallèle à OP, seront de la forme

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{m'} = \frac{z - c}{m''}.$$

Les quantités m, m', m'' étant liées par la relation

$$1 = m^2 + m'^2 + m''^2 + 2 m' m'' \cos\theta + 2 m m'' \cos\theta' + 2 m m' \cos\theta''.$$

Cherchons de même l'équation d'un plan perpendiculaire à OP.

Il est evident que si on appele x, y, z les coordonnées de ce plan, et que l'on projette orthogonalement sur OP ces coordonnées la somme des projections devra être constante. Or on connait, par le problème précédent, les cosinus des angles de la droite OP avec les axes. L'équation du plan sera donc.

$$(m + m' \cos\theta'' + m'' \cos\theta') x + (m' + m \cos\theta'' + m'' \cos\theta) y$$
$$+ (m'' + m \cos\theta' + m' \cos\theta) z + p = 0$$

Et il est remarquable que le premier membre de cette équation exprime aussi la distance à ce plan d'un point quelconque dont les coordonnées sont x, y, z. Ce qui est evident puisque ce premier membre n'est autre chose que la somme des projections des coordonnées d'un point sur la droite OP, augmentée de la distance du plan à l'origine.

Celà posé, soit l'équation d'une surface du second degré rapportée à des axes obliques

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy$$
$$+ 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} = \varphi(x, y, z) = 0$$

Lorsqu'on cherche l'équation du plan qui divise également toutes les cordes parallèles à une droite donnée, on substitue l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$, à la place de x, y, z,

$$x + \rho m \quad y + \rho m' \quad z + \rho m''$$

et les racines de l'équation en ρ qu'on obtient ainsi, expriment les distances du point (x, y, z) aux deux points où une corde parallèle à la droite $\frac{x}{m} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{m''}$ menée par le point (x, y, z) coupe la surface du second degré. Ces deux distances devant être égales et de signe contraire, il suffira de faire dans l'équation en ρ le second terme nul pour avoir l'équation du plan diamétral.

Or l'équation en ρ est en faisant

$$\mathrm{M} = \varphi(m, m', m'')$$

$$\begin{aligned}\mathrm{MP} = (\mathrm{A}m + \mathrm{B}''m' + \mathrm{B}'m'')x + (\mathrm{A}'m' + \mathrm{B}''m + \mathrm{B}m'')y \\ + (\mathrm{A}''m'' + \mathrm{B}'m + \mathrm{B}m')z + \mathrm{C}m + \mathrm{C}'m' + \mathrm{C}''m''\end{aligned}$$

de la forme

$$\rho^2 + 2\mathrm{P}\rho + \mathrm{Q} = 0$$

Si l'on cherche l'équation d'un plan principal, il faudra de plus que le plan représenté par $\mathrm{P} = 0$ soit perpendiculaire à la droite $\frac{x}{m} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{m''}$ et par conséquent que son équation soit de la forme

$$\begin{aligned}(m + m'\cos\theta'' + m''\cos\theta')x + (m' + m\cos\theta'' + m''\cos\theta)y \\ + (m'' + m\cos\theta' + m''\cos\theta)z - p = \mathrm{S} = 0\end{aligned}$$

Il faudra donc que les coefficients de MP et ceux de S soient proportionnels et que l'on ait

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{S}} = \text{const} = s$$

La quantité étant telle que l'on ait

$$(\mathrm{A} - s)m + (\mathrm{B}'' - s\cos\theta'')m' + (\mathrm{B}' - s\cos\theta')m'' = 0$$

$$(\mathrm{A}' - s)m' + (\mathrm{B}'' - s\cos\theta'')m + (\mathrm{B} - s\cos\theta)m'' = 0$$

$$(\mathrm{A}'' - s)m'' + (\mathrm{B}' - s\cos\theta')m + (\mathrm{B} - s\cos\theta)m' = 0$$

On en déduit l'équation en s,

$$0 = (A - s)(B - s\cos\theta)^2 + (A' - s)(B' - s\cos\theta')^2 + (A'' - s)(B'' - s\cos\theta'')^2$$
$$- (A - s)(A' - s)(A'' - s) - 2(B - s\cos\theta)(B' - s\cos\theta')(B'' - s\cos\theta'')$$

qui est du troisieme degré parce qu'en effet il existe trois plans principaux.

Mais la quantité s et l'équation qui la détermine jouissent d'une propriété fort remarquable que personne jusqu'ici ne parait avoir observée.

Supposons que l'on transforme les coordonnées en exprimant les anciennes coordonnées d'un point en fonction des nouvelles. Si on substitue les valeurs de x, y, z en x', y', z' dans la fonction $\varphi(x, y, z)$ on obtient une fonction $\varphi'(x', y', z')$ d'une autre forme, et qui est telle que dans la fonction φ on substitue les anciennes coordonnées d'un point déterminé, et dans la fonction φ' les nouvelles, les deux résultats ainsi obtenus sont égaux.

Celà posé reprennons l'expression de s, $s = \frac{MP}{S}$, la quantité M étant le resultat de la substitution des coordonnées du point pris sur une droite fixe à une distance $= 1$ de l'origine c'est à dire d'un point fixe, dans l'équation de la surface, ne variera quand on transformera les coordonnées.

La quantité P exprimant la demi-somme des distances d'un point (x, y, z) à la surface distances comptées suivant une droite fixe, est aussi invariable par la transformation des coordonnées. Enfin la quantité S exprimant la distance d'un point à un plan déterminé, ne saurait non plus varier.

La quantité s est donc elle même invariable pour un même plan principal, et l'équation qui donne ses trois valeurs aura des coëfficients invariables. Or en la développant, on a

$$(1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta'')s^3$$
$$- s^2[A\sin^2\theta + A'\sin^2\theta' + A''\sin^2\theta'' + 2B(\cos\theta'\cos\theta'' - \cos\theta)$$
$$+ 2B'(\cos\theta\cos\theta'' - \cos\theta') + 2B''(\cos\theta\cos\theta' - \cos\theta'')]$$
$$+ s(A'A'' + AA'' + AA' - 2AB\cos\theta - 2A'B'\cos\theta' - 2A''B''\cos\theta'' - B^2 - B'^2 - B''^2$$
$$+ 2B'B''\cos\theta + 2BB''\cos\theta' + 2BB'\cos\theta'')$$
$$+ AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0$$

Divisant tous les coefficients par le premier ou par le dernier on

aura trois fonctions des constantes qui entrent dans l'équation de la surface, invariables par la transformation des coordonnées. Si l'on suppose $\cos\theta$, $\cos\theta'$ et $\cos\theta''$ nuls on aura pour tous les systèmes d'axes où celà peut être c'est à dire d'axes rectangulaires, les équations

$$A + A' + A'' = \text{const}$$
$$B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - AA'' - AA' = \text{const}$$
$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2\,BB'B'' = \text{const}$$

Également si l'on suppose encore dans l'équation en s, B, B', B'' nuls, c'est à dire qu'on suppose la surface rapportée à des diamètres conjugués, en divisant toute l'équation par le dernier terme, on trouvera pour tous les systèmes semblables

$$\frac{1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''}{AA'A''} = \text{const}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{A'A''} + \frac{\sin^2\theta'}{AA''} + \frac{\sin^2\theta''}{AA'} = \text{const}$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} = \text{const}$$

Et comme $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A'}$, $\frac{1}{A''}$ expriment dans ce cas les quarrés des diamétres, on retrouve ici les théorèmes connus.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GEORGE BRUCE HALSTED. — Rational Geometry, a text-book for the science of space. 1 volume in-12, VIII-285 pages, 247 figures. New-York, John Wiley and Sons, 1904. 2e édition, VIII-273 pages, 1907.

Tous les géomètres connaissent aujourd'hui les remarquables travaux de M. D. Hilbert sur les fondements de la Géométrie. Ils les ont lus dans le Livre original, *Grundlagen der Geometrie*, ou en ont apprécié la substance dans les articles que M. Poincaré lui a consacrés, soit dans la *Revue des Sciences*, soit dans le *Rapport* sur le troisième concours du Lobatchefsky (1903). Ces travaux constituent, au point de vue philosophique, une des œuvres les plus intéressantes et les plus profondes de ces dernières années; dans l'entreprise délicate que s'était proposée M. Hilbert, il est hors de doute que le but visé a été pleinement atteint.

Pour constituer une Géométrie vraiment rationnelle, deux choses étaient également indispensables : en premier lieu, établir une liste complète des axiomes en s'efforçant de n'en oublier aucun et de n'en énoncer aucun d'inutile, ensuite supprimer totalement le rôle de l'intuition qui a occupé jusqu'à ce jour en Géométrie tant de place que nous faisons presque à chaque instant usage de propositions intuitives, ou jugées telles, sans nous en apercevoir le moins du monde. A ces deux conditions, l'œuvre du savant professeur de Gœttingue satisfait d'une façon presque parfaite. Aussi n'est-il point surprenant que dès sa publication elle ait été accueillie dans le monde savant avec beaucoup de faveur, et encouragé de nouvelles recherches en indiquant la voie à suivre. Parmi les Livres qu'elle a inspirés, nous voulons particulièrement nous occuper ici de celui que M. George Bruce Halsted, directeur mathématique de la grande École normale de Greeley (Colorado), a publié récemment sous le titre de *Rational Geometry*. M. Halsted, rompant résolument avec les habitudes et les traditions de plus de vingt siècles,

s'est efforcé de créer un Traité didactique de Géométrie en harmonie avec les idées nouvelles; la tâche était loin d'être aisée, mais sa difficulté même devait être un attrait particulier pour le professeur érudit qui s'est fait, depuis de longues années, le vaillant champion de la Géométrie générale aux États-Unis, qui a publié dans les Revues scientifiques américaines de nombreux articles de vulgarisation, et dont les belles traductions anglaises de Saccheri, Bolyai et Lobatchefsky ont consacré la réputation.

La *Rational Geometry* de l'auteur, encouragée par M. Hilbert, marque une époque dans l'histoire des Livres destinés à l'enseignement. Sans doute ne pourrait-on la mettre actuellement entre les mains des élèves de nos écoles secondaires ou de nos lycées; dans ces établissements, la timidité voulue des programmes n'a pas fait pénétrer encore les traces de l'évolution profonde accomplie en Géométrie à la suite des découvertes de Lobatchefsky; à l'étranger, où le cycle des études n'a pas la même forme que chez nous, on a été, je crois, un peu plus hardi; mais, en tous cas, l'Ouvrage a certainement sa place marquée dans toutes les bibliothèques scientifiques et doit être lu avec profit par tous ceux qui, ne se contentant pas de parcourir les vieux sentiers jadis tracés par Euclide, s'intéressent assez à la Géométrie pour subir l'attrait de curiosité et d'enthousiasme que suscite toujours l'ouverture d'une voie nouvelle.

« La Géométrie, dit M. Halsted dans le début de son Livre, est la Science créée pour nous donner la compréhension et la connaissance des relations externes des objets, pour nous rendre aisées l'explication et la description de ces relations, et nous faciliter la transmission de cette connaissance. »

D'accord avec M. Hilbert, nous imaginons trois systèmes différents d'objets; le premier système est celui des *points*, le deuxième renferme les *droites*, et enfin les objets du troisième système sont appelés *plans*. Nous imaginons en outre que ces points, droites et plans soient liés entre eux par certaines relations mutuelles, et nous désignons ces relations par des mots tels que : *être situé sur, entre, congruent, parallèle*. La description complète de ces relations s'accomplit par le moyen d'axiomes, c'est-à-dire de postulats fondamentaux de notre intuition, qui sont répartis en cinq groupes.

Premier groupe : *Axiomes de connexion ou d'association.*

1. Deux points distincts A et B déterminent une droite a.

2. Deux points quelconques d'une droite déterminent cette droite, et sur cette droite il y a au moins deux points.

3. Trois points A, B et C non en ligne droite déterminent toujours un plan α.

4. Trois points quelconques A, B et C d'un plan α déterminent ce plan.

5. Si deux points A et B d'une droite a sont sur un plan α, tout point de a est aussi sur le plan.

6. Si deux plans α et β ont un point commun A, ils ont aussi au moins un autre point commun B.

7. Sur chaque plan il y a au moins trois points non en ligne droite, et il existe au moins quatre points qui ne sont ni sur une même droite ni sur un même plan.

Ces axiomes sont énoncés dans les termes mêmes choisis par M. Hilbert, et sous une forme incapable de laisser à l'intuition la plus petite place; ils pourraient être automatiquement appliqués, soit par une personne qui, n'ayant jamais vu ni points, ni droites, ni plans, n'en pourrait comprendre le sens, soit encore par une machine à raisonner qui pourrait fabriquer pièce par pièce tous les théorèmes de la Géométrie.

Par exemple, il est aisé d'en déduire les propositions qui suivent :

Deux droites distinctes ne peuvent avoir deux points communs; elles n'en ont qu'un ou n'en ont aucun.

Deux plans n'ont aucun point commun ou ont une droite commune.

Un plan et une droite non située sur le plan ont un point commun ou n'en ont aucun.

Par une droite et un point non situé sur la droite, par deux droites sécantes, par trois points non en ligne droite, il y a toujours un plan et un seul.

Deuxième groupe : *Axiomes de l'ordre* (*Betweenness*). — Les axiomes de ce groupe précisent l'idée d'ordre qui sert de base à l'arrangement des points par l'emploi conventionnel du terme *entre*.

1. Si A, B, C sont trois points d'une droite et que B soit entre A et C, B est aussi entre C et A et n'est ni C ni A.

2. Si A et C sont deux points d'une droite, il y a au moins un point B de la droite entre A et C, et aussi un point D tel que C est entre A et D.

3. De trois points d'une droite il y en a toujours un et un seul entre les deux autres.

Définition du segment AB ou BA.

4. Axiome de Pasch : Si A, B, C sont trois points non en ligne droite et a une droite du plan ABC ne renfermant aucun des points, lorsque a contient un point du segment AB, elle doit contenir un point du segment BC ou du segment AC.

Il y a ici un fait digne d'être remarqué. Dans ses *Grundlagen der Geometrie*, M. Hilbert énonce explicitement cinq axiomes de l'ordre; les trois premiers sont identiques à 1, 2 et 3; le cinquième est l'axiome de Pasch et le quatrième est formulé ainsi :

4'. Quatre points A, B, C et D d'une droite peuvent toujours être disposés de sorte que B soit entre A et C, ainsi qu'entre A et D, et qu'en outre C soit entre A et D et aussi entre B et D.

Dans une lettre adressée à M. Halsted, le savant géomètre de Gœttingue reconnaît la possibilité de prouver l'axiome 4' en mettant à sa place celui-ci plus simple :

4''. Si B est entre A et C et C entre A et D, B est aussi entre B et D.

Mais, en réalité, les deux propositions 4' et 4'' sont des théorèmes renfermés dans les axiomes 1, 2, 3, 4 du Livre de M. Halsted, et c'est à un de ses élèves, M. R.-L. Moore, qu'est due leur démonstration élégante reproduite dans la *Rational Geometry*, Appendix I, p. 253-256. (*Voir* aussi *American mathematical Monthly*, 1902, p. 98-101.)

Troisième groupe : *Axiomes de congruence*. — Ceci est la matière du Chapitre III qui développe les axiomes de congruence pour les segments, les angles et les triangles.

Voici d'abord les trois axiomes relatifs aux segments :

1. Si A et B sont deux points d'une droite a, A' un point de la droite ou d'une autre droite a', il y a sur a' d'un côté donné de A' un point et un seul B' tel que $AB \equiv A'B'$.

2. Si AB est congruent à A′B′ et à A″B″, A′B′ et A″B″ sont congruents.

3. Si B est entre A et C, ainsi que B′ entre A′ et C′, et que $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, on a aussi $AC \equiv A'C'$.

Une simplification inattendue jusqu'ici et qui nous a été révélée dans le Mémoire présenté par M. Halsted, au Congrès de l'Exposition de Saint-Louis, sous le titre *Non Euclidean Spherics*, se fait jour à propos de l'axiome 1. Dans cet axiome, l'auteur, à l'exemple de M. Hilbert du reste, énonce explicitement ceci : Tout segment est congruent à lui-même, ainsi qu'à lui-même renversé. Or c'est une proposition démontrée par M. Moore, sous une forme extrêmement instructive, qui montre combien il faut être prudent en fait d'axiomes, et fait comprendre d'une façon précise tout ce que les axiomes contiennent et doivent contenir. Il faut se hâter d'ajouter d'ailleurs que, dans un Livre élémentaire, ces démonstrations délicates et laborieuses doivent être évitées, et qu'il vaut mieux, ainsi que le fait remarquer avec beaucoup de raison M. Halsted, en énoncer les résultats sous forme de postulats non nécessaires mais commodes.

Après les segments, on passe aux angles et aux triangles par les axiomes 4, 5 et 6.

4. D'un côté donné du rayon donné h' il y a un et un seul rayon k' faisant avec lui un angle congruent à un angle donné h, k.

Tout angle est congruent à lui-même et à son inverse.

5. Deux angles congruents à un troisième le sont entre eux.

6. Si dans deux triangles on a les congruences

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad BAC \equiv B'A'C',$$

on a également

$$ABC \equiv A'B'C', \qquad ACB \equiv A'C'B'.$$

Ces axiomes conduisent sans difficulté à toutes les conclusions que nous tirons dans la Géométrie ordinaire des cas d'égalités des triangles, mais on voit combien la différence des méthodes est profonde. En convenant d'appeler *triangles congruents* deux triangles ABC, A′B′C′ qui satisfont aux congruences

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad BC \equiv B'C',$$
$$A \equiv A', \qquad B \equiv B', \qquad C \equiv C',$$

il n'est plus besoin de faire une distinction entre les deux sortes d'égalité des figures planes et, en particulier, il n'est plus besoin de sortir du plan pour justifier la congruence des angles à la base dans le triangle isoscèle, ni l'existence de la perpendiculaire d'un point à une droite.

L'auteur termine le Chapitre en formulant dans ces termes précis le théorème général de congruence :

Si ABC..., A'B'C'... *sont deux figures congruentes et que* P *désigne un point quelconque de la première, on peut toujours trouver, et d'une façon univoque, dans la deuxième un point* P' *tel que les figures* ABC...P *et* A'B'C'...P' *soient congruentes.*

Ce théorème exprime l'existence d'une certaine transformation unique et réversible qui nous est familière sous le nom de *déplacement* ou de *mouvement*. Ainsi l'idée de mouvement est basée sur celle de la congruence. En réalité, nous avons toujours suivi jusqu'ici, dans l'enseignement, la voie inverse et déduit les théorèmes de congruence du mouvement de superposition effectué dans l'espace à deux ou à trois dimensions. Il est bien permis de se demander si cette voie, tout habituelle qu'elle soit et tout intuitive qu'elle nous paraisse, est bien conforme à la rigoureuse logique. Qu'est-ce donc que le mouvement, sinon l'enchaînement des positions successives d'un corps dans toutes les parties immédiatement contigues d'une distance quelconque, enchaînement qui suppose et nécessite avant tout la préexistence d'une série de figures congruentes lui servant de raison d'être et, en quelque sorte, de *substratum* géométrique?

Le quatrième Chapitre est consacré à l'axiome de la parallèle unique (IV) et aux propositions qui en sont la conséquence, propositions classiques sur lesquelles il n'y a pas lieu d'insister. Toutefois, il y a certains théorèmes que nous avons eu jusqu'ici l'habitude de considérer comme intuitifs et qui, dans une Géométrie vraiment rationnelle, ne le sont pas; il faut donc les démontrer. Par exemple, ceux-ci : Tout segment a un point milieu, tout angle a un rayon bissecteur; sur tout segment AB il y a deux points C et D tels que $AC \equiv CD \equiv DB$.

Toute la Géométrie ordinaire des écoles peut être construite avec

les seuls groupes d'axiomes I-IV, et il n'est point besoin de leur adjoindre la moindre idée de continuité. En conséquence, M. Halsted bannit entièrement de sa Géométrie rationnelle l'axiome d'Archimède (V) qui rend possible l'introduction de cette idée, parfaitement inutile pour démontrer, par exemple (*voir* p. 58-59), que les angles inscrits dans un même segment de cercle sont égaux, et que ceux inscrits dans deux segments opposés sont supplémentaires. La même observation s'applique à ce que nous convenons d'appeler les *problèmes de construction*. En réalité, ces problèmes ne sont autre chose que des théorèmes qui déclarent que l'existence de certains points, segments, angles, cercles, etc., est une déduction rigoureusement logique des existences formulées par nos axiomes; et, d'un autre côté, ils se rapportent aux opérations pratiques en aidant à dessiner sur un plan une figure qui peut servir à représenter, avec une certaine approximation graphique, les données et les résultats des théorèmes d'existence. Les problèmes de construction géométrique découlant des théorèmes basés sur les cinq groupes d'axiomes peuvent être graphiquement résolus par la règle et le transporteur de segments (*Streckenübertrüger* de M. Hilbert), et ramenés à ces deux tracés fondamentaux: Tracer une droite, prendre sur une droite donnée un segment donné.

Nous arrivons maintenant au moment de montrer (Chap. VIII et IX) comment les opérations de l'Arithmétique s'introduisent dans la Géométrie. Dans nos procédés habituels, cette introduction s'opère en substituant aux grandeurs géométriques des nombres; elle provient naturellement de la mesure des droites ou des arcs et suppose, par conséquent, l'emploi de l'axiome d'Archimède. Pourrait-on, en mettant ce dernier systématiquement de côté, ainsi qu'on l'a fait dans tout ce qui précède, et en se basant uniquement sur les axiomes des groupes I-IV, arriver à créer, indépendamment de toute préoccupation métrique, un calcul de segments où les opérations soient identiques à celles des nombres? Cela ne paraît point au premier abord très aisé, au moins en ce qui concerne la multiplication. M. F. Schur a tourné la difficulté à l'aide de l'artifice suivant : à partir du point de rencontre O de deux droites perpendiculaires, on prend sur la première un segment déterminé OU qui demeure invariable et qui est repré-

senté par 1, et sur la deuxième, de part et d'autre, les segments OA et OB. Le cercle qui passe par les trois points U, A, B coupe de nouveau la première droite au point P, et l'on convient de dire que le segment OP représente le *produit* OA × OB; il faut ensuite montrer que l'opération qui vient d'être de la sorte définie est bien, ainsi que son homonyme sur les nombres, commutative, associative et distributive. Le quotient de deux segments se définit d'une manière analogue. Ceci nous amène aux proportions. Deux triangles sont dits *semblables* quand leurs angles sont respectivement congruents; l'existence de tels triangles est évidente. On prouve que leurs côtés sont proportionnels, ce qui conduit naturellement au théorème de Thalès et à ses conséquences. Le calcul des segments et les quatre premiers groupes d'axiomes suffisent donc pour établir en toute rigueur la théorie des lignes proportionnelles de la Géométrie euclidienne.

Il en est de même pour la théorie de l'équivalence dans le plan, au Chapitre IX. Nommons *polygones équivalents* deux polygones qui peuvent être considérés comme sommes algébriques de triangles en même nombre et deux à deux congruents, disposés d'ailleurs de manière quelconque. Si l'on convient d'appeler, *par définition, aire d'un triangle* le demi-produit de la base par sa hauteur, résultat indépendant de la base choisie, deux polygones équivalents ont même aire et réciproquement. La notion d'aire amène au théorème de Pythagore et aux carrés construits sur les côtés d'un triangle.

Dans les Chapitres X à XV, M. Halsted aborde ensuite la Géométrie de l'espace. Rien de particulièrement nouveau à signaler dans l'étude des plans, qui diffère peu de notre cinquième Livre usuel. Le Chapitre XII est consacré aux polyèdres et aux volumes. De même que les polygones sont des assemblages de triangles, les polyèdres sont aussi des assemblages de tétraèdres, et c'est par le tétraèdre, envisagé comme figure élémentaire, que l'auteur commence. Dans le tétraèdre, le produit de l'aire de chaque face par la hauteur correspondante est constant; le tiers de ce produit sera appelé, *par définition*, le *volume du tétraèdre*. Quand un tétraèdre est coupé par un plan renfermant un sommet (section transversale), son volume est la somme des volumes des tétraèdres partiels, et la section d'un tétraèdre par un plan quelconque peut

être ramenée à une suite de sections transversales. Cette proposition avait déjà été utilisée par M. Veronese (*Instituto Veneto*, 1894-1895).

Donc, si un tétraèdre est partagé d'une façon quelconque en un certain nombre fini de tétraèdres, son volume est aussi la somme de leurs volumes. L'auteur, suivant la méthode de M. Schatunovsky, d'Odessa, examine successivement dans tous leurs détails quatre modes de division particuliers; la division la plus générale peut être obtenue au moyen de ces derniers, et il en est de même pour un polyèdre. Au sujet du prismatoïde, d'où l'on déduira facilement ensuite le prisme et le tronc de la pyramide, on démontre la formule

$$V = \frac{a}{4}(B + 3S),$$

dans laquelle a représente la hauteur, B la base et S la section parallèle à cette base menée aux deux tiers de la hauteur. Cette formule est beaucoup plus simple que celle dont nous avons l'habitude de nous servir, et il pourrait être avantageux de l'introduire dans la pratique. Nous voulons même aller plus loin. On sait combien il est difficile de faire pénétrer dans les jeunes cerveaux la démonstration compliquée du théorème sur l'équivalence de deux pyramides triangulaires; cela seul, à notre avis, suffirait pour condamner la méthode. Beaucoup d'esprits sérieux n'ont pas craint de l'affirmer hautement, et, au lieu de masquer par des artifices cousus de fil blanc une intégration inévitable, ne vaut-il pas mieux, et n'est-il pas plus conforme à la vraie doctrine de l'enseignement rationnel de définir le volume de la pyramide par son expression même? A ce point de vue, la lecture de l'Ouvrage remarquable que nous analysons est de nature à provoquer de sérieuses réflexions.

Les Chapitres XIII et XIV nous donnent l'étude de la sphère, du cylindre et du cône, avec l'expression de leurs surfaces et volumes. Pour les volumes, on fait usage de l'axiome de Cavalieri : *Si deux solides compris entre deux plans parallèles sont coupés par un plan quelconque parallèle aux deux premiers suivant des aires égales, ils ont même volume.*

Chapitre XV : *Sphérique pure* ou *Géométrie à deux dimensions sur la sphère.* — Ce Chapitre est un des plus intéressants du

Livre et l'un de ceux qui nous aident le mieux à saisir la pensée de l'auteur, pensée magistralement rendue dans le beau Mémoire précédemment cité, *Non Euclidean Spherics* (Congrès de Saint-Louis 1904). La création de la Géométrie non euclidienne ayant mis en évidence l'indépendance de la Trigonométrie sphérique à l'égard du postulat des parallèles, la Géométrie des figures tracées sur la sphère, ou Sphérique pure, ne peut être que non euclidienne. Ceci montre la nécessité de s'affranchir, si l'on veut la traiter convenablement, de tout théorème de Géométrie ordinaire solide qu'on transporterait ensuite à la surface de la sphère. Donc, plus de ligne droite, plus de grand cercle, mais à leur place un être géométrique nouveau qui n'est autre que la géodésique sphérique et que M. Halsted nomme *straightest* [1]. On pourrait la définir comme la ligne que déterminent deux points suffisamment rapprochés; mais, ce dernier terme n'étant pas clair, l'auteur préfère lui substituer l'axiome d'association :

I. — A tout point A on peut associer un point B et un seul qui avec A ne détermine pas une straightest. B est dit *opposé* à A.

Les trois points A, B, C d'un certain circuit présentent ou ne présentent pas d'ordre déterminé suivant que le circuit est ouvert ou fermé : de là les trois axiomes d'ordre :

II. — 1. Aucun point de la sphère n'est *entre* deux points opposés.

2. Aucun point n'est entre son opposé et un troisième point.

3. Entre deux points non opposés il y a toujours un troisième point.

Ces axiomes sont complétés par six autres dont plusieurs sont analogues aux axiomes de l'ordre sur le plan. Viennent ensuite les axiomes de congruence. La théorie des triangles sphériques, congruents ou symétriques, est traitée avec beaucoup de soin, et suivie de la notion d'équivalence, d'après la même méthode que sur le plan. De l'étude des polygones sphériques on peut déduire celle des angles polyèdres, ou angloïdes, par une voie toute naturelle.

Trois Notes terminent le Livre et sont relatives à un théorème de l'ordre au compas, et à la solution des problèmes.

---

[1] Ce mot est impossible à traduire en français autrement que par un néologisme : nous proposerions *recte*.

On voit par cet exposé combien l'Ouvrage de M. Halsted est curieux et intéressant; indépendamment de sa portée philosophique, il constitue une tentative de vulgarisation méritant un sérieux examen. Beaucoup d'excellentes idées peuvent lui être empruntées et introduites avec profit dans notre enseignement élémentaire, sans qu'il soit pour cela besoin de rien modifier aux programmes actuels; le choix intelligent et judicieux des professeurs saurait bien suffire. Il convient donc de féliciter hautement de son initiative le savant géomètre de Greeley et de le remercier du service que son Livre nous aura rendu.

P. Barbarin (Bordeaux).

G. DARBOUX. — Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Tome I. Grand in-8. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

On sait comment l'étude de la Chaleur et celle de l'Élasticité ont conduit Lamé à concevoir les systèmes orthogonaux dans l'espace et à établir sur de tels systèmes des systèmes de coordonnées ponctuelles. La théorie de l'Élasticité n'a peut-être pas profité autant qu'on aurait pu l'espérer de l'idée de Lamé, car l'existence d'un trièdre trirectangle remarquable tel que celui des axes principaux d'élasticité ne suffit malheureusement pas pour assurer celle d'un système triple orthogonal. Mais l'idée de Lamé a eu du moins le résultat de poser en Géométrie un problème de tout premier ordre qui, par son degré de difficulté, par la multiplicité des questions qu'il évoque, rivalise avec les plus ardus et les plus féconds. D'habiles géomètres contemporains y ont apporté leur contribution. Après Lamé, on peut citer Dupin, J.-A. Serret, Bonnet, Bouquet, Joseph Bertrand, Maurice Levy, Combescure, Cayley, Williams Roberts, Ribaucour, Rouquet, Bianchi, sans compter l'auteur lui-même du présent Ouvrage, qui, dans sa Thèse inaugurale, introduisit déjà dans la question des éléments essentiels. Il lui appartenait de réunir en un corps homogène l'ensemble des résultats acquis à ce grand problème.

I. Pour qu'une famille de surfaces représentée par une équation

$$u(x, y, z) = \alpha = \text{const.}$$

soit une *famille de Lamé*, c'est-à-dire soit l'une des trois familles d'un système triple orthogonal, il faut que u, considérée comme fonction de x, y, z, vérifie une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Ce résultat capital fut obtenu pour la première fois par M. Darboux lui-même en 1866, dans sa Thèse de doctorat. La première Partie du Livre actuel (qui en comprend deux) est consacrée à cette équation du troisième ordre, à l'examen des formes variées qu'on peut lui faire prendre, et à la déduction des diverses solutions du problème qui se rattachent le plus directement à chacune de ces formes.

La première forme que donne l'auteur met en jeu un symbolisme spécial : en posant

$$\delta_u = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad u_3 = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \ldots,$$

$$A_{ik} = \delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k,$$

on trouve que l'équation du troisième ordre se met sous la forme du déterminant nul

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{31} & A_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{31} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme première application, cette équation permet de retrouver aisément les résultats dus à M. Bouquet sur les familles de Lamé dont l'équation a la forme

$$u = X(x) + Y(y) + Z(z) = \text{const.}$$

Une seconde forme de l'équation du troisième ordre est celle qui a été trouvée par Cayley et qui, dans le déterminant précédent, fait intervenir, au lieu des A_{ik}, les H_{ik} dérivées partielles du

second ordre par rapport à x, y, z $\left(H_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, H_{12} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \ldots\right)$ de la fonction

$$H = \frac{1}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}}.$$

M. Darboux fait la remarque que sous cette forme l'équation du troisième ordre n'est autre que le déterminant égalé à zéro des six dérivées partielles du second ordre des six fonctions H, $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$, ux, uy, uz, u.

Après avoir présenté quelques remarques sur les caractéristiques de cette équation, l'auteur fait observer qu'elle rend intuitive l'existence de certaines solutions du problème et que toute famille de plans, toute famille de sphères est une famille de Lamé. Du reste, l'inversion permet de passer de l'un de ces deux cas à l'autre.

2. Le cas d'une famille de plans est des plus simples. Il donne comme surfaces orthogonales les surfaces moulures générales, engendrées chacune par un profil de forme invariable tracé dans le plan mobile. Ces profils forment dans le plan lui-même un système double orthogonal.

Le cas d'une famille de sphères donne lieu à une notion intéressante due à M. Rouquet, celle des familles de sphères *similaires*. Si (a, b, c, r) sont les coordonnées du centre et le rayon d'une sphère, (a', b', c', r') les éléments analogues d'une sphère d'une famille similaire de la famille dont fait partie la première, on a

$$\frac{da_1}{da} = \frac{db_1}{db} = \frac{dc_1}{dc} = \frac{r_1}{r}.$$

Quand on connaît une famille particulière de sphères, on peut, sans intégration, trouver l'ensemble des familles similaires. Parmi les familles similaires, il y en a toujours une infinité dont les sphères passent par un point fixe et qui se présentent ainsi comme les inverses d'une famille de plans.

L'auteur complète ce sujet en faisant voir que la détermination des trajectoires orthogonales d'une famille de sphères *donnée* se ramène à l'intégration de deux équations de Riccati. Il étend ensuite tous ces résultats au cas des sphères dans un espace à

n dimensions, problème qui avait déjà attiré l'attention de O. Bonnet et de J.-A. Serret, à l'occasion des surfaces dont les lignes de courbure d'une famille sont sphériques.

3. La seconde forme de l'équation du troisième ordre que nous avons signalée plus haut permet de mettre en évidence ce fait important que, si l'on considère l'équation du premier ordre

$$(E)\quad \left\{ \begin{aligned} H = & \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} \\ & = \varphi(u)(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(u)x + \varphi_2(u)y + \varphi_3(u)z + \varphi_4(u) \end{aligned} \right.$$

(où φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des fonctions quelconques de u), toutes les solutions de cette équation (E) vérifient l'équation du troisième ordre, en sorte que l'intégration de cette équation du premier ordre (E) fournira toute une classe de familles de Lamé et de systèmes triples. Le cas le plus simple est celui des surfaces parallèles pour lequel tous les φ sont nuls sauf $\varphi_4 = 1$. Mais il y a un cas particulier moins banal et dont la considération intéresse le cas général, c'est celui où tous les φ sont constants. Ce cas a été considéré par Ribaucour; il se trouve décrit dans la proposition suivante :

Étant données une surface quelconque (Σ) *et une sphère* (S) *réelle ou imaginaire, on construit tous les cercles normaux à* (S) *et à* (Σ). *Tous ces cercles sont orthogonaux à une famille de surfaces* (Σ') *dont* (Σ) *fait partie et qui est une famille de Lamé. On peut construire par points chaque surface* (Σ') *en déterminant sur chaque cercle le point où il est normal à* (Σ), *les deux points où il est normal à* (S) *et en construisant le quatrième point qui forme avec les trois précédents, pris dans le même ordre, un rapport anharmonique constant.*

Il est clair que, pour avoir les surfaces des deux autres familles, il faudra associer tous les cercles normaux qui coupent une même ligne de courbure de (Σ). Ces surfaces ont naturellement une famille de lignes de courbure circulaires.

M. Darboux introduit ici la remarque que la transformation qui fait passer d'une surface (Σ) à une surface (Σ') est une transfor-

mation de contact, et qui plus est, une transformation de contact qui conserve les lignes de courbure, qui transformera, par conséquent, une sphère en une sphère.

Une cyclide de Dupin sera aussi transformée en une cyclide de Dupin et, si l'on prend pour la surface (Σ) une telle cyclide, on voit aussitôt que la famille de Lamé correspondante sera tout entière formée de cyclides de Dupin; il y a même plus : on peut se rendre compte que les surfaces des deux autres familles seront aussi des cyclides de Dupin. Il existe ainsi un système triple orthogonal exclusivement composé de cyclides de Dupin.

Un cas spécial avait été déjà signalé par M. Williams Roberts; l'auteur l'expose en une forme purement géométrique d'une rare élégance.

4. Du moment où la transformation de Ribaucour conserve les lignes de courbure, elle rentre dans la catégorie générale des transformations de contact qui possèdent cette propriété et que Sophus Lie a déterminées. Une telle transformation se ramène à la transformation (L) de Lie qui change les droites en sphères et à une transformation par homographie ou par réciprocité. Ces considérations donnent à penser qu'il y aurait profit à introduire dans la question les six coordonnées hexasphériques surabondantes d'une sphère. Les transformations de contact les plus générales qui conservent les lignes de courbure se représentent alors par les substitutions linéaires effectuées sur ces six coordonnées qui conservent la relation quadratique existant entre ces coordonnées. Cela étant, et ces nouvelles variables étant introduites dans l'équation (E), la détermination d'un système de sphères qui en est l'intégrale complète s'effectue au moyen de l'intégration d'un système de six équations différentielles (F) linéaires et du premier ordre admettant une intégrale quadratique. La méthode habituellement suivie pour déduire une intégrale générale de l'intégrale complète s'applique ici et l'on obtient ainsi cette proposition :

Étant donnée une surface (Σ), *appliquons-lui les transformations de contact qui conservent les lignes de courbures et qui dépendent de quinze constantes.*

En intégrant certains systèmes d'équations différentielles

telles que (F), *on pourra former avec ces surfaces une infinité de familles de Lamé, qui dépendront de quatre fonctions arbitraires d'une variable et pourront comprendre la surface proposée.*

L'interprétation géométrique de l'équation (E) est des plus remarquables; elle se rattache à la considération des cercles osculateurs des courbes trajectoires. On remarque d'abord que, si dn est la petite longueur interceptée sur la normale par la surface infiniment voisine du système, on a

$$H = \frac{dn}{du},$$

en sorte que donner H revient à donner cette surface voisine et par suite la loi de succession des surfaces de la famille. D'autre part, si l'on considère la courbe $H = \text{const.}$ sur la surface (Σ), la normale principale du cercle osculateur de la trajectoire est normale à cette courbe; enfin, en désignant par ∂H la variation de H si l'on se déplace sur cette normale principale, on aura, ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial s}.$$

Il ressort donc de là avec précision que les éléments du second ordre ne dépendent que des valeurs de H *sur la surface* (Σ).

L'auteur aboutit en outre à cette conclusion : *Les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles coupent une même surface* (Σ) *de la famille sont orthogonaux à une sphère fixe qui peut varier d'ailleurs quand on passe d'une surface de la famille à une autre.*

On voit donc que le cas général de l'équation (E) où les ρ sont tous variables résulte du cas particulier où ils sont constants par voie d'enveloppe, puisque les cercles osculateurs du cas général, quand on prend tous ceux qui correspondent aux points de rencontre des trajectoires avec une même surface (Σ), forment précisément le système de cercles rencontré dans le cas particulier de Ribaucour.

Par le moyen des transformations infinitésimales, M. Darboux met cette relation remarquable entre le cas particulier et le cas

général dans un jour saisissant. Considérons la transformation de Ribaucour ci-dessus, qui se définit au moyen d'une sphère (S), qu'on peut appeler *principale*, et d'un rapport anharmonique : à tout point M d'une surface (Σ) on fait ainsi correspondre un point (M′) d'une surface (Σ') de façon que, sur le cercle normal à (S) et normal en M à (Σ), les points M, M′ forment avec les points A, B où le cercle coupe (S) un rapport anharmonique donné ρ. Si ρ est voisin de 1, la transformation est infinitésimale. Alors, pour construire les surfaces de Lamé correspondant à l'équation (E), la plus générale, on prend une surface (Σ) quelconque et une succession de sphères infiniment voisines (S_0), (S_1), (S_2), ... On effectue la transformation de (Σ) en (Σ_1) au moyen de la sphère principale (S_0), puis de (Σ_1) en (Σ_2) au moyen de (S_1) et ainsi de suite; on obtient ainsi la suite des surfaces (Σ), (Σ_1), (Σ_2), ..., qui forment la famille de Lamé.

5. Dans le quatrième Chapitre, l'auteur poursuit l'étude des diverses formes que peut recevoir l'équation du troisième ordre : deux de ces formes ont été données plus haut. Dans la seconde l'invariant H intervient par ses dérivées secondes. Mais on peut faire intervenir d'une autre façon l'invariant H et donner ainsi en fait une autre forme à l'équation du troisième ordre.

Soient ρ et ρ_1 les paramètres des lignes de courbure sur la surface (Σ) faisant partie d'une famille de Lamé; on sait que les coordonnées x, y, z d'un point de la surface et $(x^2+y^2+z^2)$ vérifient une même équation de Laplace, de la forme

$$(G) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} = a\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + b\frac{\partial \theta}{\partial \rho};$$

le théorème consiste en ce que $dn = \mathrm{H}\, du$ *est aussi une solution de cette équation*. Si l'on observe que le carré de la distance du point x, y, z à un point fixe (x_0, y_0, z_0) est une fonction linéaire de $x^2+y^2+z^2, x, y, z, 1$, qui sont cinq solutions de (G), on peut dire que $\mathrm{H}\, du$ vérifie la même équation de Laplace que le carré de la distance d'un point M de la surface à un point fixe quelconque. Cette remarque est une clé qui ouvre l'accès à un grand nombre de résultats, les uns déjà connus, comme celui qui concerne les systèmes cycliques de Ribaucour, les autres nou-

veaux. A cette même propriété se rattache aisément l'équation du troisième ordre formée par M. Maurice Levy (1) dans l'hypothèse où l'on suppose l'une des coordonnées, z par exemple, exprimée en fonction des deux autres coordonnées x, y et du paramètre u de la famille. En premier lieu, si l'on prend x, y comme variables, il est aisé de former l'équation de Laplace, qui admet les cinq solutions $x, y, z, x^2+y^2+z^2$ et 1; on trouve

$$[(1+q^2)s - pqt]\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + [(pqr - (1+q^2)s]\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0.$$

On obtient ensuite aisément la valeur de

$$H = \frac{\dfrac{\partial z}{du}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que H vérifie l'équation de Laplace pour obtenir l'équation de M. Maurice Levy.

M. Darboux fait ici une remarque, à savoir que l'équation ainsi obtenue, où H seul changera, s'applique au cas où x, y, z seraient des coordonnées relatives à des axes qui seraient les mêmes pour tous les points d'une même surface, mais qui varieraient avec u. De cette remarque si simple M. Darboux en tire une méthode pour étudier les familles de Lamé qu'on peut obtenir par le simple déplacement d'une figure de forme invariable.

L'auteur termine ce Chapitre en donnant une quatrième forme de l'équation du troisième ordre relative au cas où la famille est définie par une équation implicite

$$\varphi(x, y, z, u) = 0.$$

Le résultat n'est pas beaucoup plus compliqué que dans le cas où l'équation est résolue par rapport à u.

6. Dans le Chapitre suivant (Chapitre V), l'auteur utilise cette forme d'équation pour étudier ce problème important : trouver les familles de Lamé composées de quadriques. Il considère d'abord le

(1) *Comptes rendus*, t. LXXVII.

cas, en apparence très spécial, où les quadriques ont les mêmes plans de symétrie et retrouve la condition de M. Maurice Levy, à savoir : que *le lieu des ombilics doit être une trajectoire orthogonale de ces surfaces.*

Du reste, M. Maurice Levy a d'une façon générale montré que le lieu des ombilics des surfaces d'une famille de Lamé est une trajectoire orthogonale de ces surfaces. Il en résulte aussitôt que, si des quadriques forment une surface de Lamé, leurs plans principaux coïncident, en sorte que le cas particulier envisagé au début était, au fond, le cas le plus général.

Généralisant ces résultats, M. Darboux fait voir que, si une surface de Lamé est composée de surfaces ayant chacune un plan de symétrie, tous ces plans de symétrie coïncident. Il y a toutefois un cas spécial qui fait exception.

La symétrie étant un cas particulier d'inversion, un théorème analogue existe qui concerne les familles de Lamé composées de surfaces anallagmatiques. Ces surfaces ont les mêmes sphères principales, sauf exception qu'on peut prévoir. L'auteur termine ce Chapitre en résolvant le problème suivant :

On considère les surfaces lieux des points dont la somme ou la différence des distances à deux surfaces fixes (A), (B) *est constante; on obtient ainsi un système de deux familles orthogonales; peut-il exister une troisième famille orthogonale à ces deux premières et formant ainsi avec elles un système triple orthogonal?* M. Darboux remarque que, si l'on considère un point M et les normales issues de M sur (A) et (B), la surface (Σ) du troisième système qui passe en M doit contenir les normales et, par conséquent, les surfaces (Σ) sont des quadriques. Le problème rentre ainsi dans l'objet même du Chapitre.

7. La première Partie se clôt par un sixième Chapitre qui traite de l'extension des considérations précédentes au cas de l'espace à n dimensions.

L'auteur rappelle d'abord les coordonnées elliptiques généralisées que Jacobi a fait connaître aux *Vorlesungen;* il donne ensuite un second exemple auquel on est conduit par une extension des coordonnées surabondantes hexasphériques et où figurent les $n+2$ variables homogènes $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$, liées par l'é-

quation

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n+2}^2 = 0.$$

Les coordonnées elliptiques nouvelles sont alors définies par l'équation

$$\sum_1^{n+2} \frac{y_i^2}{\lambda - a_i} = 0.$$

Si l'on pense que les y_i s'expriment en fonction des n coordonnées rectangulaires ordinaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des formules linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$, on reconnaît que l'équation précédente contient les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au quatrième degré.

L'auteur passe ensuite au cas le plus général et constate aussitôt que des différences essentielles se présentent au regard du cas de trois variables.

Par exemple, on peut bien, sur toute surface, définir $(n-1)$ familles de lignes de courbure qui se croisent à angle droit en tout point de la surface; mais si, pour chaque famille F_i de ces lignes, on considère le système S_i des $(n-2)$ équations différentielles qui lui correspond, il est nécessaire, pour que la surface fasse partie d'un système (n^{ple}) orthogonal, que si l'on associe $(n-2)$ des $(n-1)$ systèmes d'équations S_i, ces $(n-2)$ systèmes aient toujours une intégrale en commun. Lorsqu'une pareille circonstance se présentera, on dira que les lignes de courbure sont *coordonnées*. Cette condition suffit, d'ailleurs, pour que la surface fasse partie d'un système orthogonal.

Une application immédiate consiste à généraliser le problème que Bouquet et J.-A. Serret s'étaient posé et à trouver une famille d'un système orthogonal où l'on aurait

$$u = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \text{const.},$$

X_i ne dépendant que de x_i. M. Darboux développe à fond ce problème; il y trouve des résultats du plus grand intérêt.

8. L'Ouvrage comporte une seconde Partie, qui traite particulièrement des coordonnées curvilignes.

Reprenant par la méthode de Lamé l'étude générale (déjà traitée

par l'auteur en 1866 et 1878) des coordonnées curvilignes orthogonales à n variables, l'auteur introduit, à côté des invariants classiques H_i de Lamé, les fonctions β_{ik}, à deux indices, définies par les équations

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}, \qquad \beta_{ii} = 0,$$

où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sont les n paramètres des coordonnées curvilignes ; il introduit aussi les fonctions

$$U_k = \frac{1}{H_k}\frac{\partial u}{\partial \rho_k} = H_k\frac{\partial \rho_k}{\partial u},$$

formules où il faut tour à tour remplacer u par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et simultanément U_k par $X_{1k}, X_{2k}, \ldots, X_{nk}$.

Les n^2 fonctions U_k sont les coefficients d'une substitution orthogonale et vérifient un système linéaire du premier ordre d'équations différentielles que j'appellerai, pour abréger, $\Sigma(U)$, et dont les β_{ik} sont les coefficients.

La compatibilité des équations $\Sigma(U)$ entraîne pour les β_{ik} un système $\Sigma(\beta)$ d'équations différentielles du premier ordre et du premier degré, par rapport aux dérivées partielles des β_{ik}. Toutes les solutions des équations $\Sigma(U)$ se déduisent de l'une d'elles par une substitution orthogonale, fait entièrement analogue à celui d'après lequel, lorsque dans un mouvement à plusieurs paramètres les rotations sont données, le mouvement est déterminé.

Ensuite, les équations $\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}$ font connaître les H_k; seulement ici des fonctions arbitraires s'introduisent au cours de l'intégration. Il en résulte, remarque déjà faite par Combescure dans le cas de trois variables, que d'un système triple orthogonal donné on en peut faire dériver une infinité d'autres pour lesquels les β_{ik} et les U_k seront les mêmes que pour le proposé, mais où les H_k seront différents.

9. En dehors des applications à la Mécanique et à la Physique mathématique, les systèmes orthogonaux à n variables peuvent avoir leur utilité dans la recherche des systèmes triples orthogonaux. L'auteur donne une première idée de la manière dont cela peut se faire par la considération de la représentation sphérique

et en s'aidant d'une inversion. Mais cette méthode n'est pas la seule. Par exemple, si l'on mène des sphères tangentes à une surface fixe et à une sphère fixe, et que l'on fasse se correspondre sur les deux surfaces les points de contact simultanés, aux lignes de courbure de la surface il correspond sur la sphère un réseau orthogonal. Cette propriété peut être étendue. M. Darboux fait voir que les surfaces tracées dans un espace à n dimensions, pour lesquelles les lignes de courbure sont *coordonnées* (*voir* plus haut), se ramènent en première analyse à la détermination de tous les systèmes orthogonaux dans l'espace à $(n-1)$ dimensions : c'est la considération de la représentation sphérique généralisée qui facilite l'accès de cette conclusion.

10. On sait quel parti M. Darboux a tiré, dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces,* de l'emploi d'un trièdre trirectangle mobile. Dans le problème des coordonnées orthogonales, le trièdre formé par les normales aux surfaces de coordonnées, qui sont aussi les tangentes aux courbes de coordonnées, s'offre naturellement pour appliquer cette méthode. Comme on pouvait s'y attendre, d'après ce qui précède, les translations du trièdre se réduisent aux H_i et les rotations aux β_{ik}, en sorte que le système d'équations $\Sigma(\beta)$ n'est autre que celui qu'on rencontre à propos des rotations dans le mouvement à plusieurs paramètres d'un corps solide, de même que les équations $\Sigma(U)$ ne sont autres que celles que vérifient les cosinus directeurs d'une direction fixe dans l'espace absolu.

On peut donner un sens plus géométrique aux formules en y introduisant les rayons de courbure principaux des surfaces coordonnées, et l'on retrouve ainsi des résultats dus à Lamé.

11. Ici se présentent naturellement les paramètres différentiels du premier ordre considérés par ce géomètre.

En premier lieu,

$$\Delta U = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho_2}\right)^2,$$

d'où l'on tire l'invariant simultané $\Delta(U, V)$. Pour définir $\Delta_2 U$, l'auteur a recours à une formule élégante qui généralise en coor-

données curvilignes la formule de Stokes et de Neumann,

$$\int\int\int\left(\frac{\partial A}{\partial \rho}+\frac{\partial B}{\partial \rho_1}+\frac{\partial C}{\partial \rho_2}\right) d\rho\, d\rho_1\, d\rho_2$$
$$=\int\int\left(\frac{A\cos\alpha}{H_1 H_2}+\frac{B\cos\beta}{H_2 H}+\frac{C\cos\gamma}{H H_1}\right) d\sigma,$$

où l'intégrale triple s'étend à tout un volume, l'intégrale double à la surface qui limite le volume, A, B, C étant trois fonctions arbitraires de ρ, ρ_1, ρ_2, et enfin, α, β, γ les angles que la normale extérieure à la surface fait avec les axes du trièdre mobile de coordonnées. Alors, si l'on pose

$$\Delta_2 U=\frac{1}{H H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{H_1 H_2}{H}\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{H_2 H}{H_1}\frac{\partial U}{\partial \rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{H H_1}{H}\frac{\partial U}{\partial \rho_2}\right)\right],$$

on peut tirer de la formule précédente cette autre

$$\int\int\int\Delta(U, V)\, dm-\int\int\int V\,\Delta_2 U\, dm=\int\int V\frac{dU}{dn}\, d\sigma,$$

dans laquelle dm est l'élément de volume, $d\sigma$ l'élément de surface et $\frac{dU}{dn}$ la dérivée de U prise suivant la normale extérieure. Cette dernière formule, où tout est invariant, met bien en évidence l'invariance de $\Delta_2 U$.

D'une façon plus générale, on peut démontrer que les coefficients de l'équation du troisième degré en λ

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\lambda & \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\lambda & \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

sont des invariants, et l'auteur parvient à donner à cette équation une origine telle qu'on peut la former aisément si l'on fait usage, au lieu de x, y, z, des coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2.

L'auteur termine ce Chapitre en montrant que l'emploi d'un trièdre en translation, dont le sommet est au point de rencontre des trois surfaces coordonnées, permet d'étendre les formules de Lamé au cas où ces coordonnées, cessant d'être orthogonales, deviendraient obliques.

12. Le Chapitre III de la deuxième Partie a pour titre : *Recherche d'un système triple particulier.*

On sait que l'on appelle *isotherme* une famille de surfaces dont le paramètre convenablement choisi [car, au lieu de u, on peut prendre $\varphi(u)$] vérifie l'équation de la chaleur

$$\Delta_2 u = 0 ;$$

u est alors le *paramètre thermométrique* de la famille. Une famille de Lamé peut-elle être isotherme ? Les quadriques homofocales permettent de répondre affirmativement et même avec cette particularité que les trois familles du système sont toutes trois isothermes. En cherchant la condition générale lorsque cette particularité se présente, Lamé a trouvé qu'on devait avoir $H = \sqrt{S_1 S_2}$, $H_1 = \sqrt{S_2 S}$, $H_3 = \sqrt{S S_1}$, où S ne dépend pas de ρ, S_1 ne dépend pas de ρ_1, S_2 ne dépend pas de ρ_2. M. Joseph Bertrand en a conclu que *les surfaces du système sont divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure.* Mais, ainsi que le remarque l'auteur, la réciproque n'est pas vraie. Des surfaces d'une famille de Lamé peuvent être décomposées en carrés par leurs lignes de courbure, sans être pour cela isothermes. Tel est le cas des cyclides homofocales. Chacune de ces surfaces est bien *isothermique,* mais le système triple orthogonal qu'elles forment n'est pas, pour cela, isotherme. Il est, du reste, aisé de trouver les expressions de H telles que les surfaces d'un système triple (non forcément isotherme) soient toutes isothermiques : on trouve, pour les H_i, ces expressions

$$H = \frac{S_1 S_2}{M}, \qquad H_1 = \frac{S_2 S}{M}, \qquad H_2 = \frac{S S_1}{M},$$

où M est une fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, et S, S_1, S_2 trois fonctions qui ne dépendent pas S de ρ, S_1 de ρ_1, S_2 de ρ_2.

13. On est, du reste, conduit à ces mêmes systèmes triples particuliers en cherchant à étendre un problème célèbre de Lamé. Ayant adopté les coordonnées elliptiques et formé avec ces coordonnées l'expression de $\Delta_2 V$, Lamé a cherché les solutions de l'équation de la chaleur $\Delta_2 V = 0$ qui sont de la forme

$$V = \varphi(\rho) . \varphi_1(\rho_1) . \varphi_2(\rho_2).$$

On sait que Lamé aboutit ainsi, pour chacune des fonctions φ, à une équation du second ordre linéaire, d'un type devenu fameux par les recherches d'Hermite et les découvertes d'analyse auxquelles il a donné lieu.

M. Darboux généralise ce problème en cherchant les systèmes triples pour lesquels l'équation de la chaleur admet une solution de la forme

$$V = P.f(\rho).f_1(\rho_1).f_2(\rho_2),$$

où P devra être une fonction déterminée de ρ, ρ_1, ρ_2. Il se trouve que le système triple doit avoir ce caractère particulier indiqué plus haut que toutes ses surfaces soient isothermiques (sans qu'il soit pour cela isotherme).

14. C'est donc la recherche de ces systèmes triples particuliers que M. Darboux va poursuivre : sa recherche occupe la fin de ce Chapitre et le Chapitre suivant. Le problème comporte la discussion d'un système d'équations différentielles, compliqué en apparence, mais où l'auteur trouve une voie élégante qui lui permet de dénouer et de ramener à une forme simple cette complication. Une première série de cas lui donne :

1° Une famille de plans parallèles avec cylindres orthogonaux et isothermes et les dérivés par inversion de ce système ;

2° Une famille de sphères concentriques avec cônes orthogonaux et isothermes et les dérivés par inversion de ce système ;

3° Les plans menés par un axe et deux familles de surfaces de révolution autour de cet axe, orthogonales et isothermes, les méridiens formant dans l'un quelconque des plans méridiens un réseau orthogonal et isotherme.

Une seconde série de cas fait intervenir la valeur d'une quantité numérique h qui peut être égale à $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 ou 2. Le cas $h = -\frac{1}{2}$ donne les cyclides homofocales et les variétés dérivées par inversion. Pour ce qui concerne les trois autres cas, l'auteur indique une méthode générale applicable à tous et développe seulement le cas de $h = 1$, renvoyant pour les autres au Mémoire original qu'il a publié autrefois sur la matière. Ce cas de $h = 1$ conduit à un système triple intéressant uniquement composé de cyclides de Dupin.

15. Ayant ainsi déterminé les systèmes triples à surfaces isothermiques, l'auteur s'occupe, au Chapitre V, de démêler parmi ces systèmes : 1° ceux qui sont isothermes; 2° ceux qui se prêtent à une extension du problème de Lamé.

Pour les systèmes triples isothermes, leur déduction se fait aisément. On retrouve les cas connus de Lamé et, en outre, un cas signalé mais non déterminé par Combescure et dans lequel les surfaces sont imaginaires : on peut regarder ce cas comme une dégénérescence d'un système triple composé de cyclides.

La seconde question, concernant la généralisation du problème de Lamé, est singulièrement simplifiée par l'emploi judicieux d'un théorème de Lord Kelvin d'après lequel, si $V(x, y, z)$ est une solution de l'équation $\Delta_2 V = 0$, la fonction $\frac{1}{r'} V\left(\frac{k^2 x'}{r'^2}, \frac{k^2 y'}{r'^2}, \frac{k^2 z'}{r'^2}\right)$ est une solution de la même équation, après qu'on a fait l'inversion définie par les formules

$$r'r = k^2, \qquad x' = \frac{k^2 x}{r^2}, \qquad y' = \frac{k^2 y}{r^2}, \qquad z' = \frac{k^2 z}{r^2}.$$

De là résulte que toute solution du problème proposé conserve son caractère par inversion et qu'on peut se borner à étudier les solutions sous la forme la plus simplifiée que l'inversion permette de leur donner : on peut même faire intervenir les inversions imaginaires et ramener ainsi, par exemple, à des cônes de même sommet une famille de surfaces de révolution autour du même axe.

16. Dans le sixième et dernier Chapitre de la seconde Partie, l'auteur se propose de développer l'étude des systèmes triples de M. Bianchi. Le point de départ réside en un théorème de Ribaucour d'après lequel, *étant donnée une surface à courbure constante négative* $-\frac{1}{a^2}$, *si, dans un plan tangent et du point de contact comme centre, avec a pour rayon, on décrit un cercle, tous les cercles ainsi obtenus sont orthogonaux à une famille de Lamé composée de surfaces de courbure constante négative* $-\frac{1}{a^2}$.

On a déjà eu l'occasion de montrer quel rôle joue en la matière la distance dn interceptée sur la normale par une surface voisine de la famille; cette longueur vérifie, on le sait, la même équation de

Laplace que les coordonnées x, y, z, et les quantités x^2, y^2, z^2 et 1.

En généralisant alors, comme l'a fait Weingarten, l'expression de dn, qui se rapporte au cas spécial de Ribaucour, on peut arriver à une autre loi de variation de la surface (Σ), de façon que, tout en gardant une courbure constante $-\frac{1}{a^2}$, elle engendre une famille de Lamé. On obtient de la sorte des familles de Lamé contenant quatre fonctions arbitraires d'une variable. Du reste, la construction de M. Weingarten offre ce caractère essentiel d'être indépendante de la forme de la surface et de persister si l'on déforme celle-ci. Ce fait soulève le problème réciproque, traité par M. Darboux, de savoir, étant donnée une surface (S) sur les normales de laquelle on porte une petite longueur MM', variable avec M, dans quel cas le lieu (S') de M' appartiendra avec (S) à une famille de Lamé, lorsque (S) se déformera de toutes les manières possibles, en entraînant la petite longueur normale MM'.

On est conduit au résultat suivant : *Considérons une surface* (S) *et imaginons qu'on porte sur ses normales des longueurs* MM' *infiniment petites, de manière à obtenir une surface infiniment voisine* (S'), *qui forme avec* (S) *une famille de Lamé. Pour que cette propriété subsiste lorsque* (S) *se déforme de toutes les manières possibles en entraînant toutes les petites normales* MM', *il faut, ou bien que* MM' *soit une constante, ou bien que* (S) *soit applicable sur une surface de révolution* (Σ). *Alors, pour définir toutes les longueurs* MM', *on portera sur chaque normale à* (Σ) *une longueur proportionnelle à l'aire comprise entre un parallèle fixe et le parallèle qui passe par le pied de cette normale.*

Les résultats de M. Weingarten ont été grandement étendus par M. Bianchi : ce géomètre a mis en évidence l'existence d'une infinité d'autres familles de Lamé encore composées de surfaces de courbure constante, mais la courbure constante, pour chaque surface, varie d'une surface à l'autre suivant une loi quelconque. M. Darboux expose les résultats les plus essentiels dus à M. Bianchi, renvoyant pour les détails au Mémoire original de cet auteur.

Dans cette analyse déjà longue, nous avons dû passer sur une foule de remarques, de rapprochements, qui éclairent à chaque pas les questions les unes par les autres et rendent si attrayantes ces Leçons.

Nous avons surtout insisté sur les points saillants que M. Darboux excelle à choisir à propos et à mettre en lumière. A cet égard, le rôle de l'invariant H dans la question des familles de Lamé est tout à fait caractéristique.

Suivant sa coutume, l'imprimerie Gauthier-Villars a édité l'Ouvrage dans la forme la plus correcte et la plus agréable pour les yeux du lecteur. G. Koenigs.

OCAGNE (M. d'). — Calcul graphique et Nomographie. 1 volume in-12, xxvi-398 pages, 146 figures. Paris, O. Doin, 1908.

Ce Volume fait partie de l'*Encyclopédie scientifique* dont le Dr Toulouse dirige la publication. Le *Bulletin* a déjà eu l'occasion de signaler les deux intéressants Volumes sur la Balistique dus au commandant Charbonnier, qui font partie de cette collection. Le Volume que nous annonçons inaugure une *Bibliothèque de Mathématiques appliquées*, que dirige M. Maurice d'Ocagne et qui comprendra divers Ouvrages sur la science du Calcul, sur l'Analyse et la Géométrie appliquée.

Depuis longtemps, M. d'Ocagne s'est fait une spécialité des diverses méthodes de Calcul graphique; il les a singulièrement perfectionnées et développées : grâce à lui, et au talent avec lequel il sait exposer ces méthodes dans un ordre clair et systématique, leurs applications se multiplient; le Livre qu'il publie aujourd'hui contribuera certainement à faire entrer ces méthodes dans le domaine des notions classiques de Mathématiques, à l'usage des techniciens.

Ce Livre est divisé en deux Parties à peu près égales : la seconde est consacrée à cette Nomographie dont le nom, l'extension et la systématisation sont dus à M. d'Ocagne ; la première Partie comprend la description d'épures, où les données numériques sont remplacées par des segments de droite et où les constructions conduisent à la solution, exacte ou approchée, de problèmes concernant ces données. Les solutions *approchées* sont d'ailleurs, dans les conditions qu'indique l'auteur, suffisamment approchées pour qu'il n'y ait pas lieu, dans la pratique, de les distinguer des solu-

tions qu'on qualifie d'*exactes* et qui ne le sont qu'au point de vue théorique. Il est manifeste qu'une solution approchée peut être assez simple pour être préférable à une méthode compliquée, théoriquement exacte, où, lorsqu'on la réalise, les erreurs se multiplient avec les constructions.

On trouvera en particulier, dans le premier Chapitre, la résolution générale d'un système d'équations linéaires, la résolution des équations à une inconnue de degré quelconque, l'interpolation parabolique graphique et l'application à la représentation de résultats d'observations physiques.

Mais, si importantes que soient ces diverses questions, le Chapitre le plus intéressant de cette première Partie est celui où l'auteur traite de l'intégration graphique. M. d'Ocagne y a exposé très clairement, sous une forme didactique qui contribuera certainement à la répandre, la méthode que M. Massau a développée, avec de nombreuses et importantes applications, dans une suite de Mémoires qui remonte à 1878. Pour ce qui est des équations différentielles du premier ordre, M. d'Ocagne précise sur un point la méthode de M. Massau et montre, d'après M. Runge, comment elle permet d'approcher de la courbe intégrale, par une suite d'approximations successives.

Dans la seconde Partie de son Livre, M. d'Ocagne a repris, sous une forme nouvelle, et en les complétant sur divers points, les principes fondamentaux de la Nomographie, qu'il n'a pas cessé de perfectionner depuis la publication, en 1899, du Traité classique qu'il lui a consacré. Je ne reviendrai pas sur ces principes, dont le *Bulletin* a eu plusieurs fois l'occasion de parler, et je me bornerai à signaler, parmi les sujets nouveaux traités par l'auteur, l'étude des *valeurs critiques* dans le nomogramme à échelles rectilignes qui représente l'équation

$$\mathrm{A} f_1 f_2 f_3 + \Sigma \mathrm{B} f_j f_k + \Sigma \mathrm{C} f_i + \mathrm{D} = 0,$$

c'est-à-dire des valeurs de f_1, f_2, par exemple, pour lesquelles l'équation précédente, considérée comme une équation en f_3, est indéterminée. La considération de ces valeurs critiques, qui s'introduisent de la façon la plus naturelle, éclaire d'une façon remarquable la construction du nomogramme, et l'auteur en tire d'intéressantes applications.

Les trois Volumes parus de l'*Encyclopédie scientifique*, les noms de ceux qui la dirigent ou qui y collaborent, les titres des Volumes annoncés, donnent une excellente idée de cette publication. En particulier, il est difficile, tant aux techniciens qu'aux professeurs qui, sans se spécialiser dans les applications, désirent cependant s'y initier, d'arriver à connaître, sans trop d'efforts et de recherches, les développements récents des Mathématiques appliquées. La *Bibliothèque* que dirige M. d'Ocagne sera précieuse aux uns et aux autres. J. T.

DANIELS (M. F.). — ESSAI DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE EN COORDONNÉES PROJECTIVES. 1 volume in-8°, VIII-279 pages (17e fascicule des *Collectanea friburgensia*). Fribourg (Suisse), Librairie de l'Université, 1907.

La Préface que l'auteur a mise en tête de cet *Essai* contient un intéressant résumé historique sur les diverses méthodes employées par Th.-St. Davies, C. Gudermann, Charles Graves, Möbius, Cayley, Salmon pour étudier analytiquement les courbes tracées sur une sphère.

La méthode que propose M. Daniels consiste à représenter un point de la sphère par le vecteur unité r qui part du centre et passe par le point; tout vecteur obtenu en multipliant r par un nombre positif représente le même point; un vecteur obtenu en multipliant r par un nombre négatif représenterait le point diamétralement opposé. Un grand cercle (ou droite sphérique) est déterminé par le vecteur unité l qui représente son pôle, choisi de manière à fixer un sens de parcours sur le cercle. Dans ces conditions, le produit vectoriel (ou extérieur) de deux vecteurs r_1, r_2, ou l_1, l_2, représente le grand cercle qui passe par deux points, ou le point d'intersection de deux grands cercles.

Toutes les propositions et formules se présenteront de même sous une forme dualistique.

Ceci posé, si l'on considère sur la sphère un triangle sphérique de référence dont les sommets et les côtés soient déterminés par les vecteurs r_1, r_2, r_3 d'une part, l_1, l_2, l_3 de l'autre, les vecteurs d'un point quelconque et d'un grand cercle quelconque peuvent

s'écrire

$$\mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3,$$
$$\nu_1 u_1 l_1 + \nu_2 u_2 l_2 + \nu_3 u_3 l_3;$$

les x_i sont les coordonnées projectives du point; les u_i sont les coordonnées projectives du grand cercle; les constantes μ_i, ν_i sont liées par la relation $\mu_i \nu_i = \sin A_i$, où A_i est un angle du triangle de référence. Dans ces conditions, si l'on désigne par E le point de la sphère dont les coordonnées sont 1, 1, 1 et qu'on projette du centre de la sphère sur un plan quelconque les sommets A_1, A_2, A_3 du triangle de référence et le point E en A'_1, A'_2, A'_3, E', les coordonnées d'un point de la sphère sont les mêmes que les coordonnées de la perspective de ce point par rapport au triangle de référence $A'_1 A'_2 A'_3$, où l'on suppose que les coordonnées du point E' sont aussi 1, 1, 1.

M. Daniels, après avoir rappelé brièvement les propositions de l'analyse vectorielle dont il aura besoin et développé les formules fondamentales de Trigonométrie sphérique, en donnant leur sens le plus général aux mots *triangle sphérique*, traite successivement de la droite sphérique et du cercle, des propriétés du triangle, des coniques sphériques, de leurs propriétés les plus intéressantes, en particulier des propriétés projectives et de leurs invariants. Enfin deux Notes intéressantes terminent ce Volume. La première traite de la quadrature et de la rectification des courbes sphériques et contient quelques applications simples; dans la seconde, l'auteur montre de quelle manière les méthodes qu'il a développées s'appliquent à la Cristallographie; voici le sommaire de cette seconde Note :

« Application des coordonnées sphériques projectives à la Cristallographie géométrique. Loi fondamentale de la Cristallographie. Les indices d'un plan et les indices d'une arête sont les coordonnées de la droite sphérique et du point sphérique correspondants. Les rapports anharmoniques rationnels. Changements de coordonnées. Rapports des nouveaux paramètres μ'_i. Angles de deux faces, de deux arêtes, etc. » J. T.

MÉLANGES.

SUR DE NOUVELLES FORMULES DE SOMMABILITÉ ;

PAR M. A. BUHL.

J'ai déjà étudié dans ce *Bulletin* (juin 1907), au moyen du calcul des résidus, des formules de sommabilité qui peuvent remplacer et même prolonger analytiquement la série de Taylor.

Je suis parvenu depuis à des résultats analogues concernant les séries de Laurent, résultats résumés dans les *Comptes rendus* (14 octobre 1907) et que je désire réétudier ici plus en détail.

Les formules (6), (7) et (8) de ce Mémoire sont celles qui me semblent surtout dignes d'attention.

Les seconds membres de (6) et (7) sont les expressions bien connues que l'on forme pour développer une fonction méromorphe $F(x)$ en série de fractions rationnelles; les premiers membres des mêmes formules sont, à mon avis, tout à fait nouveaux.

Les présentes démonstrations sont peut-être légèrement plus longues que celles des *Comptes rendus*, mais elles permettent une étude plus aisée de points laissés primitivement dans l'ombre.

1. Soit C une couronne de Laurent formée de cercles C′ et C″ ayant l'origine pour centre et dont les rayons respectifs sont $r' > r''$. Soit $F(x)$ une fonction uniforme holomorphe dans C. On aura dans cette couronne (formule de Laurent)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} F(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots\right) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_{C''} F(z)\left(\frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \ldots\right) dz. \end{aligned}\right.$$

Soient

$$s'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} F(z)\left(\frac{1}{z} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}}\right) dz$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\int F(z)\,\frac{z^{n+1} - x^{n+1}}{z - x}\,\frac{dz}{z^{n+1}},$$

$$s''_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C''} F(z)\left(\frac{1}{x} + \ldots + \frac{z^n}{x^{n+1}}\right) dz$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{C''} F(z)\,\frac{x^{n+1} - z^{n+1}}{x - z}\,\frac{dz}{x^{n+1}}.$$

Considérons maintenant une autre couronne Γ formée de cercles Γ' et Γ'' ayant l'origine pour centre dans un champ complexe différent de celui considéré en premier lieu et dont les rayons respectifs sont $\rho' > \rho''$. Soit $f(\xi)$ une autre fonction uniforme holomorphe dans Γ. J'aurai pour $f(\xi)$ un développement laurentien identique à (1) aux notations près et, considérant les termes de ce développement, je poserai

$$(2)\qquad c'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'} f(\zeta)\,\frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta, \qquad c''_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma''} f(\zeta)\,\frac{\zeta^{n+1}}{\xi^{n+2}}\,d\zeta.$$

Or (*loc. cit.*), avec les hypothèses $|\xi| < \rho'$, $|\xi x| < r'\rho'$, on a

$$(3)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c'_n s'_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{C'}\int_{\Gamma'} \frac{F(z)\,f(\zeta)\,dz\,d\zeta}{(\zeta - \xi)\left(z - \frac{\xi x}{\zeta}\right)}.$$

Avec les hypothèses $|\xi| > \rho''$, $|\xi x| > r''\rho''$ et par un calcul analogue on a

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c''_n s''_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{C''}\int_{\Gamma''} \frac{F(z)\,f(\zeta)\,dz\,d\zeta}{(\zeta - \xi)\left(z - \frac{\xi x}{\zeta}\right)}.$$

Remarquons la similitude des formules (3) et (4); elles ne diffèrent formellement que par les accents qui sont simples dans (3), doubles dans (4).

2. Étudions la formule (3). Supposons pour simplifier que $F(x)$ n'ait à l'intérieur de C'' que des pôles simples a'_k de résidus A'_k. En vertu des hypothèses relatives à (3), $\frac{\xi x}{\zeta}$ est toujours

dans C' et l'intégration par rapport à z donne

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n=\infty} c'_n s'_n = {} & \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'} \mathrm{F}\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\xi} \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'}\sum_k \frac{\zeta}{a'_k}\,\frac{\mathrm{A}'_k f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\xi)\left(\zeta-\dfrac{\xi x}{a'_k}\right)}. \end{aligned}\right.$$

L'intégration par rapport à ζ n'est pas beaucoup plus difficile, à condition de la bien préciser. Je suppose à $\mathrm{F}(x)$ hors de C' des pôles simples a_k de résidus A_k. Dans ces conditions $\mathrm{F}\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)$ possède des pôles $\zeta_k = \frac{\xi x}{a_k}$ toujours dans Γ'. De plus, je suppose que $f(\zeta)$ possède dans Γ'' et, par suite, dans Γ' des pôles simples b_h de résidus B'_h. Alors les deux intégrales du second membre de la formule précédente deviennent respectivement

$$\mathrm{F}(x)f(\xi) - \sum f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)\frac{x\,\mathrm{A}_k}{a_k(x-a_k)} - \sum \mathrm{F}\left(\frac{\xi x}{b'_h}\right)\frac{\mathrm{B}'_h}{\xi-b_h},$$

$$+\sum \frac{\mathrm{A}'_k f(\xi)}{x-a'_k} + {\sum}^{*} f\left(\frac{\xi x}{a'_k}\right)\frac{x\,\mathrm{A}'_k}{a'_k(x-a'_k)} + \sum\sum \frac{\mathrm{A}'_k \mathrm{B}'_h}{(b'_h-\xi)\left(a'_k-\dfrac{\xi x}{b'_h}\right)},$$

le sigma marqué d'un astérisque n'existant que si $\frac{\xi x}{a'_k}$ est dans Γ'.

Transportant définitivement les termes qui viennent d'être calculés dans le second membre de (5) puis divisant par $f(\xi)$ tous les termes de l'égalité ainsi obtenue, on aura une formule que j'appellerai la formule (A). Des deux conditions de validité de cette formule, la seconde, $|\xi x| < r'\rho'$, peut être remplacée par $|x| \leqq r'$, si bien que (A) est valable non seulement pour x dans C', mais aussi lorsque x est sur la circonférence limitant ce cercle.

Imaginons maintenant que le rayon ρ' croisse jusqu'à ce que le cercle Γ' passe par le point singulier le plus voisin, soit β', et que, sans sortir de Γ', on rapproche indéfiniment ξ du pôle β'. Alors tous les dénominateurs $f(\xi)$ de (A) deviennent infinis et il reste seulement

$$(6)\qquad \lim_{\xi=\beta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c'_n s'_n}{f(\xi)} = \mathrm{F}(x) - \sum \frac{\mathrm{A}'_k}{x-a'_k}.$$

3. Le mode de raisonnement qui vient d'être employé paraît

être en défaut pour $\xi x = a_k b'_h$, car les termes à dénominateur infini ont aussi dans ce cas un numérateur infini. Au fond, la difficulté n'existe qu'en apparence; si l'on examine tous les termes pour lesquels elle semble se présenter, on voit facilement que ces termes peuvent ne pas être nuls, mais qu'alors ils se détruisent entre eux.

4. Étudions la formule (4). Avec les hypothèses particulières à cette formule, $\frac{\xi x}{\zeta}$ est toujours hors de C'' et, par suite, les pôles a'_k de $F(z)$ interviennent seuls dans l'intégration par rapport à z qui donne

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c''_n s''_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma''} \sum_k \frac{\zeta}{a'_k} \frac{A'_k f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - \xi)\left(\zeta - \frac{\xi x}{a'_k}\right)}.$$

L'intégration par rapport à ζ est beaucoup plus simple que celle du n° 2. Il n'y a sûrement dans Γ'' que les pôles b'_h de $f(\xi)$; la singularité $\frac{\xi x}{a'_k}$ y est peut-être, ξ n'y est pas. On trouve

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c''_n s''_n}{f(\xi)} &= \sum{}^{\star} \frac{f\left(\frac{\xi x}{a'_k}\right)}{f(\xi)} \frac{x A'_k}{a'_k(x - a'_k)} \\ &\quad + \sum\sum \frac{A'_k B'_h}{f(\xi)(b'_h - \xi)\left(a'_k - \frac{\xi x}{b'_h}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Le sigma marqué d'un astérisque n'existe que si $\frac{\xi x}{a'_k}$ est dans Γ''.

Des deux conditions de validité de cette formule, la seconde, $|\xi x| > r''\rho''$, peut être remplacée par $|x| \geq r''$, si bien que (B) est valable non seulement pour x hors de C'', mais aussi lorsque x est sur la circonférence C'' elle-même.

Imaginons maintenant que le rayon ρ'' décroisse jusqu'à ce que le cercle Γ'' passe par le point singulier le plus voisin, soit β'', et que, tout en restant à l'extérieur de Γ'', on rapproche indéfiniment ξ du pôle β''. Alors le premier sigma du second membre de (B) est nul. Le second aura aussi tous ses termes nuls sauf ceux indépendants de h, ce qui provient de ce que le produit $f(\xi)(\xi - b'_h)$ pour ξ tendant vers $b'_h = \beta''$ est précisément le

résidu B'_h. En résumé, il viendra

$$(7)\qquad \lim_{\zeta \to \beta''} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c''_n s''_n}{f(\xi)} = \sum \frac{A'_k}{x - a'_k}.$$

5. *Extensions possibles des formules* (6) *et* (7). — Les formules (6) et (7) sont susceptibles de différentes extensions que je me bornerai à indiquer brièvement. Tout d'abord les coefficients c peuvent être associés aux sommes s plus généralement qu'on ne l'a fait jusqu'ici. On pourrait déplacer les c à la condition de les prendre toujours dans le même ordre, ce qui revient à les déplacer tous également. Alors, les intégrales (3) et (4) se compliquent de facteurs en ζ et ξ qui n'altèrent pas cependant leurs propriétés fondamentales.

Ainsi, supposons qu'on remplace la seconde formule (2) par

$$c''_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma''} f(\zeta) \frac{\zeta^n}{\xi^{n+1}}\, d\zeta.$$

Il faut alors, dans l'intégrale double de (4), ajouter le facteur $\frac{\zeta}{\xi}$. Les intégrations sont peu différentes des précédentes et même légèrement plus simples. Finalement on retombe sur la formule (7). Ce qui nous a déterminé, au n° 1, à partir des formules (2) c'est parce que ce sont elles qui semblent donner la plus grande simplicité possible à (3) et (4) et, en particulier, la même structure aux deux formules.

Dans un autre ordre d'idées on peut observer que les raisonnements des n°s 2 et 4 sont absolument indépendants, si bien que la fonction auxiliaire f qui figure dans (6) et (7) n'est pas forcément la même dans ces deux formules; il est plus élégant toutefois de prendre la même. A toute fonction méromorphe f correspond une infinité de couronnes laurentiennes, c'est-à-dire une infinité de développements laurentiens différents. Les formules (6) et (7) sont donc, en réalité, une double infinité de formules pour la représentation de $F(x)$ dans une seule couronne C.

Observons encore que, si les pôles simples de F étaient remplacés par des pôles multiples ou par des singularités essentielles limites d'un ensemble dénombrable de pôles, les raisonnements

précédents resteraient vrais, les résultats se compliquant dans des formes connues.

6. L'addition des formules (6) et (7) donne

$$(8)\qquad F(x) = \lim_{\xi=\beta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c'_n s'_n}{f(\xi)} + \lim_{\xi=\beta''} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c''_n s''_n}{f(\xi)}.$$

Cette formule est valable dans la couronne C au même titre que le développement laurentien (1). Elle peut, de plus, être valable sur les circonférences C′ et C″.

Parmi les formules connues qui peuvent lui être comparées, je n'ai vu d'abord que celle de Cesàro qui correspond au développement taylorien de $f(\xi) = \frac{1}{1-\xi}$, et n'en est, par suite, qu'un cas extrêmement particulier. Cesàro ne s'est d'ailleurs occupé que du cas où F, holomorphe dans le voisinage de l'origine, était considérée dans un cercle taylorien.

Alors n'existent ni les c'', ni les s'', ni β''; on a $c'_n = \xi^n$ et il vient

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s'_0 + \xi s'_1 + \xi^2 s'_2 + \ldots}{1 + \xi + \xi^2 + \ldots}$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s'_0 + s'_1 + \ldots + s'_{n-1}}{n},$$

formule valable, comme on sait, dans le cercle où s'_n tend vers $F(x)$ et aussi sur la circonférence limitant ce cercle.

Je terminerai par une application un peu plus compliquée de (8).

Soient a et b deux points tels que $|a| < |b|$ et la fonction

$$f(\xi) = \frac{b-a}{(\xi-a)(b-\xi)} = \ldots + \frac{a^2}{\xi^3} + \frac{a}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{b} + \frac{\xi}{b^2} + \ldots.$$

La formule (8) devient

$$F(x) = \lim_{\xi=b} \frac{1}{f(\xi)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\xi^n}{b^{n+1}} s'_n + \lim_{\xi=a} \frac{1}{f(\xi)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a^{n+1}}{\xi^{n+2}} s''_n.$$

Remplaçant $f(\xi)$ par sa valeur, on obtient quelques réductions

évidentes; si l'on observe ensuite que ξ doit tendre vers b par valeurs inférieures en module à $|b|$ et vers a par valeurs supérieures en module à $|a|$, on peut écrire

$$F(x) = \lim_{\xi = b} \frac{\sum \frac{\xi^n}{b^n} s'_n}{\sum \frac{\xi^n}{b^n}} + \lim_{\xi = a} \frac{\sum \frac{a^{n-1}}{\xi^{n-1}} s''_n}{\sum \frac{a^n}{\xi^n}},$$

ou finalement

$$(9) \qquad F(x) = \lim_{n = \infty} \frac{s'_0 + s'_1 + \ldots + s'_{n-1}}{n} + \lim_{n = \infty} \frac{s''_0 + s''_1 + \ldots + s''_{n-1}}{n}.$$

Si l'on suppose que $F(x)$ soit holomorphe non seulement dans la couronne comprise entre C' et C'' mais dans tout le cercle C', les s'' n'ont plus de raison d'être et l'on retrouve la formule de Cesàro. La formule complète (9) peut être rapprochée de celle donnée par M. Fejér dans ses *Untersuchungen über Fouriersche Reichen* (*Mathematische Annalen*, t. LVIII, 1904). Ce n'en est même qu'une extension au champ analytique. On sait, en effet, que la substitution $z = e^{i\omega}$ transforme la formule de Laurent (1) en la formule de Fourier. Par suite, la même substitution doit transformer (9) en une formule de sommabilité relative à la série de Fourier. Comme, de plus, (9) n'est qu'un cas très particulier de (8), on doit pressentir que la formule de M. Fejér n'est aussi qu'un cas très particulier d'une formule de sommabilité très générale concernant les séries trigonométriques; c'est un point sur lequel je reviendrai lorsque je m'occuperai spécialement de ces dernières séries.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Nautisches Jahrbuch, oder Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1910 *zur Bestimmg. der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtungen.* Herausgeg. vom Reichsamt des Innern unter Leitg. von C. Schrader. Gr. in-8°, XXIV-318 p. Berlin, C. Heymann. Cart. : 1 m. 50 pf.

Kohlrausch (F.-L.). — *Einführung in die Differential- u. Integralrechnung, nebst Differentialgleichungen.* In-8°, VII-191 p. av. 100 fig. Berlin, Springer. 6 m.; relié : 6 m. 80 pf.

Nernst (W.) u. A. Schönflies. — *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechng. m. besond. Berücksichtigg. der Chemie.* 5. Aufl. Gr. in-8°, XII-371 p. av. 69 fig. München, Oldenbourg. 11 m.; relié : 12 m. 50 pf.

Sachs (J.). — *Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).* 3. Tl. Gr. in-8°, IV-334 p. av. 172 fig. Bremerhaven, v. Vangerow. 8 m.

Wirth (H.). — *Beiträge zur Theorie der Abbildungen durch reciproke radii Vectores.* In-8°, av. 6 pl. Wolgast, Cleppien. 1 m. 50 pf.

Le Bon (G.). — *L'Évolution des forces.* In-18, 390 p. av. 42 fig. Paris, Flammarion. 3 fr. 50 c.

Poincaré (L.). — *The new Physics and its evolution.* In-8°, 360 p. London, Paul. 5 sh.

Rey (A.). — *La théorie de la Physique chez les physiciens contemporains.* In-8°, v-417 p. Paris, Alcan et Guillaumin. 7 fr. 50 c.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Begründet von Mor. Cantor. Gr. in-8°. 25. Heft. Leipzig, Teubner. (Festschrift zur Feier des Geburtstages Leonhard Eulers. Herausgeg. vom Vorstande der Berliner mathemat. Gesellschaft). IV-137 p. av. 2 portraits. 5 m.

Aller (C. van). — *Beginselen der analytische meetkunde.* Gr. in-8°, IV-310 p. av. 6 pl. Breda, Kon. Mil. Academie. 3 fl.

Barbarin (P.). — *La Géométrie non euclidienne.* 2e édit. Petit in-8°, 92 p. av. fig. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Bd. IV, 2, II. *Mechanik.* Red. von F. Klein u. C.-H. Müller. 1. Heft. In-8°, 124 p. Leipzig, Teubner. 3 m. 60 pf.

— VI. Bd. 1. Tl. *Geodäsie u. Geophysik.* Red. von P. Furtwängler u. E. Wiechert. 2. Heft, m. Fig. In-8°. Leipzig, Teubner. 3 m. 60 pf.

Fourrey (E.). — *Récréations arithmétiques.* 4e édit. In-8°, VIII-263 p. av. 106 fig. Paris, Vuibert et Nony.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique.* Traduit par E. Davaux. T. I, 2e fasc. 6 fr.; t. II, 2e et 3e fasc. 19 fr. Paris, Hermann.

Crémieu (V.). — *Recherches comparées sur les forces de gravitation dans les gaz et les liquides.* In-8°, 16 p. av. 2 fig. Tours, imprimerie Deslis frères.

Cramer (F.-H.). — *Ueber die Erniedrigung des Geschlechts Abelscher Integrale, insbesondere elliptischer und hyperelliptischer, durch Transformation.* (Dissert.) In-8°, 36 p. Nürnberg, Korn. 50 pf.

Falk (M.). — *Ueber die Haupteigenschaften derjenigen analytischen Funktionen ein. Arguments, welche Additionstheoreme besitzen.* In-8°, 78 p. Upsala, Akadem. Buchhdlg. (*Nova acta regiæ Societatis scientiarum Upsaliensis.* 4e série, t. I, n° 8.) 5 m.

Schwering (K.). — *Handbuch der Elementarmathematik f. Lehrer.* In-8°, VIII-408 p. av. 193 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 8 m.

ERRATA.

Page 181 (numéro d'août) :

A la fin de l'analyse des Mémoires de Gibbs, ajouter le nom de l'auteur :

Pierre Duhem.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXI; 1907. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXI.

4113 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, KŒNIGS,

LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,

SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL

CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY

ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXI. — ANNÉE 1907.

(XLIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Tome X; année 1904 (¹).

Boussinesq (J.). — Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. (5-78).

L'auteur établit l'*équation indéfinie* aux dérivées partielles et les *relations définies* se rapportant au contour de la nappe qui régissent l'abaissement de la surface libre de la nappe. En supposant que les pentes, tant *de fond* que *de superficie*, ont de petites valeurs, il trouve, pour régir l'ordonnée h de la surface souterraine à partir du plan horizontal de repère $z = 0$ et pour le point de coordonnées x, y,

$$(1) \qquad \mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right];$$

les deux coefficients spécifiques μ et K seront des fonctions données de x et y seulement, ainsi que la profondeur H de la nappe au-dessous du plan de repère

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXX_2, p. 196.

(comptée positivement du haut en bas); le temps est désigné par t; on suppose h donnée en x et y pour $t = 0$.

Une partie χ du contour de la projection de la nappe liquide sur le plan $z = 0$ est dite *contour libre*, étant supposée imperméable et constituant le *seuil d'écoulement* de la source; le reste χ_1 du contour est dit *contour-paroi*, le lit imperméable étant supposé se relever brusquement et vertical sur le périmètre de χ_1. On aura alors sur le contour libre

$$h = 0; \tag{2}$$

sur le contour-paroi

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0. \tag{3}$$

Le système formé par les équations (1), (2) et (3) ne peut être traité que dans des cas particuliers, surtout dans les deux cas extrêmes d'un seuil très haut ou très bas, c'est-à-dire de dénivellation h négligeables par rapport aux profondeurs H de la nappe sous le seuil, ou, au contraire, très grandes en comparaison de ces profondeurs.

Le premier cas, qui se présente en temps de sécheresse et avec un sous-sol concave, est de beaucoup le plus simple; c'est d'ailleurs le seul où l'équation (1) soit linéaire. Alors le système (1), (2), (3) devient identique à celui dont dépend un problème connu de la théorie de la chaleur. Les débits de la source sont proportionnels à une exponentielle $e^{-\alpha t}$ où figure un *coefficient de tarissement* α; la valeur de h est le produit d'une fonction déterminée de x et y par la même exponentielle $e^{-\alpha t}$. Il y a *conservation* (jusqu'au tarissement) du mode d'écoulement établi.

Moins simple est le régime qui tend à s'établir en hautes eaux, quand le fond imperméable coïncide avec le plan horizontal du seuil de la source, c'est-à-dire quand H s'annule. L'équation (1) n'étant pas linéaire, l'intégration générale du système (1), (2), (3) ne paraît pas abordable. Aussi M. Boussinesq se borne-t-il à chercher la forme vers laquelle tend la surface libre quand, ainsi que l'expérience donne lieu de l'admettre, l'écoulement acquiert un *régime*, la fonction h tendant à devenir indépendante des données initiales. Mais, même alors, il n'y a pas généralement *conservation* de l'écoulement, c'est-à-dire que *h n'est pas en général le produit d'une fonction de x et y par une fonction de t.* Il en est pourtant ainsi quand la nappe liquide repose sur un lit horizontal, avec rebord vertical tout autour, sauf à l'endroit de la source où ce rebord est supposé manquer complètement. Alors h varie en raison inverse du temps τ compté à partir d'une certaine origine; le débit de la source est inversement proportionnel au carré de τ. Ce régime est extrêmement stable, les petits écarts qu'il comporte étant de l'ordre de l'inverse de la quinzième puissance de τ.

L'auteur cherche ensuite s'il existe pour le sous-sol imperméable de la nappe souterraine des formes courbes rendant possible, comme dans le cas précédent $H = 0$, un mode d'écoulement susceptible de *conservation* au sens défini plus haut. C'est ce qui a lieu pour un lit où les fonctions h et H sont proportionnelles. Alors h varie comme la fonction de temps

$$\frac{k e^{-k\tau}}{1 - e^{-k\tau}},$$

où k est un coefficient mesurant le degré de concavité du fond. Le débit de la

source est alors proportionnel à l'expression

$$\frac{k^2 e^{-k\tau}}{(1-e^{-k\tau})^2},$$

qui se réduit sensiblement à la forme exponentielle $k^2 e^{-k\tau}$ pour les valeurs assez grandes de τ. La stabilité du régime est très grande dans le cas d'un lit concave. Les petits écarts sont régis par une équation aux dérivées partielles linéaire dont M. Boussinesq effectue l'intégration, dans le cas de la nappe cylindrique filtrée par un terrain homogène, au moyen de solutions simples d'une forme toute nouvelle en Physique mathématique, savoir des polynomes par rapport à une certaine variable, les coefficients de ces polynomes étant des fonctions du temps rationnelles en $e^{-k\tau}$.

Boussinesq (*J.*). — Rationalité d'une loi expérimentale de M. Parenty pour l'écoulement du gaz par les orifices. (79-84).

Quand un gaz s'écoule sous de fortes différences de pression à travers des orifices non capillaires, peu après l'orifice il se produit dans la veine une section contractée σ. Le débit, par unité d'aire de cette section contractée, est donné très exactement par une formule que M. Parenty a calculée pour représenter ses nombreuses expériences. Le débit considéré étant mis sous la forme

$$K\sqrt{2\frac{p_0}{\rho_0}},$$

où p_0 et ρ_0 désignent respectivement la pression et la densité du gaz dans le réservoir *d'amont,* on a, d'après M. Parenty, pour K l'expression suivante

(1) $$K = \sqrt{\Delta\left(1-\frac{15}{14}\Delta\right)},$$

où Δ désigne la *détente relative*

$$\Delta = \frac{p_0 - p}{p_0},$$

p étant la pression dans le réservoir *d'aval.*

Or le coefficient K, qu'on peut appeler *coefficient théorique du débit par unité d'aire de la section contractée,* admet, comme M. Boussinesq le montre en faisant usage d'un résultat obtenu par de Saint-Venant et Wanzel en 1839, une expression théorique, qui est la suivante :

(2) $$K = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left[(1-\Delta)^{\frac{2}{n}} - (1-\Delta)^{\frac{n+1}{n}}\right]},$$

n désignant le rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz, rapport qui est voisin de 1,4. D'après les auteurs cités, Δ ne dépasse pas la valeur 0,47. M. Boussinesq montre par un développement en série qu'en substituant la relation (1) de M. Parenty à la formule théorique (2), on commet une erreur relative de $\frac{1}{300}$ seulement.

Buhl (*A*.). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus. (85-129).

Certaines équations linéaires aux dérivées partielles ont pour premier membre une forme linéaire à coefficients constants de certains produits symboliques d'*opérateurs* qui, considérés en eux-mêmes, définissent les transformations infinitésimales d'un groupe continu. Ainsi les équations dites *à coefficients constants* sont formées au moyen des opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \ldots,$$

d'un groupe de translations dans l'espace général. De même, l'équation d'Euler et Poisson

$$(x-y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - n(x-y)\frac{\partial z}{\partial x} + m(x-y)\frac{\partial z}{\partial y} - pz = 0$$

s'écrit

$$XY(z) - nX(z) + (m-1)Y(z) - pz = 0,$$

si l'on pose

$$X(\ \ ) = (x-y)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y(\ \ ) = (x-y)\frac{\partial}{\partial y};$$

ces deux derniers opérateurs définissent un groupe projectif simple et l'on a

$$XY - YX = X + Y.$$

Les équations aux dérivées partielles de cette nature ont des propriétés de deux sortes; les unes résultent du choix des opérateurs indépendamment de la façon dont ces opérateurs sont assemblés pour former le premier membre de l'équation; les autres résultent du mode même d'assemblage des opérateurs.

Le Mémoire de M. Buhl a surtout pour objet l'étude des propriétés de la première sorte.

Après avoir rappelé le procédé bien connu par lequel on obtient comme solutions des équations linéaires à coefficients constants des intégrales multiples portant sur des fonctions arbitraires, l'auteur applique ce procédé à la formation de solutions qui se présentent sous formes de séries entières, et traite comme exemples les équations classiques

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Il considère ensuite r opérateurs X_n

$$(1) \qquad X_i(\ \ ) = \xi_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_{i2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{ir}\frac{\partial}{\partial x_r} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

qui définissent les transformations infinitésimales d'un groupe continu simplement transitif et vérifient en conséquence un système de la forme

$$(2) \qquad X_i X_k - X_k X_i = \sum_{\epsilon} c_{ik\epsilon} X_\epsilon.$$

les c_{iks} étant des constantes satisfaisant aux identités de Jacobi. Au moyen de ces opérateurs, on peut former des équations aux dérivées partielles, comme on forme les équations linéaires à coefficients constants avec les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$. M. Buhl étudie ces *équations aux opérateurs* X *à coefficients constants* en se bornant à celles qui sont du second ordre et développe leurs analogies avec les équations aux opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ à coefficients constants; toute solution d'une équation aux opérateurs X à coefficients constants, quel que soit le nombre des constantes arbitraires qu'elle renferme, est généralisée par les transformations du groupe Y réciproque de X; mais il peut arriver (et c'est le cas de l'équation d'Euler et Poisson) que cette généralisation soit illusoire. Quand les constantes c_{iks}, qui définissent la structure du groupe X, sont toutes nulles, un changement de variables ramène l'équation aux opérateurs X à une équation aux dérivées partielles à coefficients constants.

Les équations aux opérateurs X à coefficients constants peuvent être *régularisées,* grâce au calcul des polynomes symboliques dont les règles sont dues à M. Poincaré : par *régularisation,* M. Buhl entend la réduction du premier membre de ses équations à une forme tout à fait analogue à la décomposition des polynomes quadratiques en sommes de carrés : il fait observer que la régularisation peut fournir, pour ces équations du second ordre, des classifications analogues à celles de la théorie des caractéristiques. Il montre, de plus, que toutes les équations linéaires aux dérivées partielles, formées des opérateurs d'un groupe simplement transitif du plan, pourront toujours être régularisées à l'aide des opérateurs d'un groupe de même nature que l'on prendra aussi simple que possible, notamment dans la liste des groupes projectifs.

Comme exemple de ses méthodes, M. Buhl reprend l'équation d'Euler et Poisson, dont il retrouve toutes les propriétés, notamment l'intégrale générale de Riemann.

A la fin du Mémoire, il est montré comment, étant donnée une équation aux opérateurs X à coefficients constants, on peut chercher les conditions permettant de la considérer comme formée avec les opérateurs d'un groupe simplement transitif, puis, quand ces conditions sont réalisées, de trouver un changement de variables qui permette son intégration au moyen d'intégrales multiples portant sur des fonctions arbitraires.

D'Adhémar (*R.*). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles, du second ordre, du type hyperbolique, à trois ou quatre variables indépendantes. (131-207).

Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, le problème de la Physique mathématique consiste à en déterminer une intégrale par des *conditions données* sur une *frontière donnée;* c'est de ce problème que s'occupe exclusivement M. d'Adhémar.

Les deux premières Parties de son Mémoire concernent l'équation

$$\Lambda(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

que M. Volterra avait déjà étudiée au point de vue de la détermination d'une

intégrale par ses valeurs sur une surface. Entre autres résultats, M. Volterra avait reconnu que les cônes A, parallèles au cône

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

jouent le rôle de caractéristiques pour l'équation $A(u)=f$.

M. d'Adhémar fonde ses recherches sur la notion de *conormale :* il désigne par ce mot la droite qui, en chaque point (x, y, z) d'une surface, est symétrique de la normale extérieure par rapport au plan $Z=z$. La *dérivée conormale,* ou dérivée suivant la conormale, joue un rôle important dans la théorie des équations du type hyperbolique dont $A(u)=f$ est la plus simple.

Grâce à cette notion, on évite de longs calculs et l'on détermine intuitivement les *surfaces privilégiées,* ou surfaces susceptibles de déterminer une intégrale avec *moins* de données que les surfaces ordinaires : ce sont les cônes A.

La considération des cônes A de M. Volterra conduit à distinguer deux problèmes, auxquels correspondent les deux premières Parties du présent travail : dans *le problème intérieur,* la surface qui porte les données est découpée *intérieurement* d'une manière unique par tout cône à axe vertical et dont les génératrices sont inclinées à 45°; dans *le problème extérieur,* la surface qui porte les données est analogue, au point de vue de l'*Analysis situs* à un cylindre à axe vertical et est découpée *extérieurement* par les cônes ci-dessus définis.

Première Partie : *Problème intérieur.* — Une surface S étant découpée intérieurement par un cône A^0, M. Volterra avait obtenu la valeur de u au sommet du cône A^0 en fonction des valeurs de u et de ses dérivées premières sur S. M. d'Adhémar montre qu'il faut donner sur S les valeurs de u et de sa dérivée conormale; et il étudie les formes acceptables pour les surfaces S.

Réciproquement, il prouve que si le point A, sommet de A^0, s'approche indéfiniment de S, la valeur de u en A tend vers la valeur donnée sur S pour le point limite des positions de A; mais la discussion de cette réciproque n'est que commencée dans le cas particulier où la surface S est une surface privilégiée.

Deuxième Partie : *Problème extérieur.* — M. Volterra avait formé l'expression de l'intégrale en admettant son existence et établi une condition fonctionnelle à laquelle doivent satisfaire les données sur S. M. d'Adhémar retrouve, en la simplifiant, la formule de l'intégrale; mais il obtient de nouvelles conditions fonctionnelles et montre que le problème est, en général, *impossible.*

Troisième Partie : *Extensions diverses.* — M. Tedone a étendu la méthode de M. Volterra aux équations plus générales

$$\sum_{1}^{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x_1, x_2, \ldots, x_p, t),$$

et résolu ainsi *le problème intérieur* quelle que soit la parité de p, et *le problème extérieur* pour $p=2n$. M. d'Adhémar est parvenu à résoudre ce problème pour $p=3$.

Une autre extension concerne l'équation à trois variables

$$\text{(E)} \qquad \Lambda(u) = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + hu + f,$$

où a, b, c, h, f sont des fonctions de x, y, z. L'auteur a réussi, pour le problème intérieur, à passer de l'équation $\Lambda(u) = f$ à l'équation (E) en appliquant la méthode d'approximations successives de M. Picard qui a déjà donné tant de résultats importants.

Humbert (*G.*). — Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques. (209-273).

Extrait de l'Introduction. — Dans ce travail, qui forme la troisième et dernière Partie du Mémoire, nous étudions, au point de vue de leurs propriétés arithmétiques, les fonctions abéliennes *triplement* singulières, c'est-à-dire celles dont les périodes g, h, g' vérifient trois relations singulières $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

L'invariant de la relation $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$ est, en x, y, z, une forme quadratique ternaire positive; mais ce n'est pas une forme positive quelconque; nous la caractérisons en mettant en évidence ses propriétés fondamentales. Pour simplifier l'écriture, nous affectons aux formes de ce type la lettre $\mathfrak{F}$.

Si l'on opère sur le système $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ une transformation ordinaire du premier degré, ou si on le remplace par un système arithmétiquement équivalent, la forme $\mathfrak{F}$ associée reste équivalente à elle-même; c'est-à-dire qu'à un système correspond une *classe* de formes $\mathfrak{F}$.

Inversement à une classe de formes $\mathfrak{F}$ correspondent, en général, *plusieurs* systèmes non réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré *un;* leur recherche est ramenée à l'étude des représentations du discriminant de la classe par une forme quadratique ternaire indéfinie, dont certaines substitutions semblables sont mises en évidence au cours du calcul.

Un système triplement singulier $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ donne, pour g, h, g', deux systèmes de valeurs et, par suite, en général, deux systèmes de fonctions abéliennes : appelons *point modulaire* de l'un d'eux le point de l'espace qui a pour coordonnées cartésiennes les trois invariants absolus de la forme binaire algébrique d'ordre 6, liée aux fonctions abéliennes considérées; nous faisons ainsi correspondre, à une classe de formes $\mathfrak{F}$, plusieurs points modulaires en nombre limité.

Cette représentation géométrique est la suite naturelle de celle que nous avons donnée dans la deuxième Partie du Mémoire : rappelons, en effet, qu'à un nombre positif Δ, de l'un des types $4N$ et $4N+1$, nous faisions correspondre la *surface* algébrique hyperabélienne d'invariant Δ; à une classe φ de formes binaires positives, équivalentes à une forme du type

$$4(ax^2 + bxy + cy^2),$$

ou du type

$$4(ax^2 + bxy + cy^2) + y^2,$$

nous faisions correspondre une ou plusieurs *courbes* gauches algébriques que

nous avons appelées *courbes hyperabéliennes;* ici enfin, à une classe de formes $\mathfrak{f}$, nous lions un groupe de *points* défini algébriquement.

Notre représentation possède des propriétés importantes et simples. Ainsi, pour qu'une classe de formes ternaires $\mathfrak{f}$, ou une classe de formes binaires φ, représente proprement un nombre Δ, il faut et il suffit que la surface associée au nombre contienne les points, ou les courbes gauches, liés à la classe $\mathfrak{f}$ ou à la classe φ considérée.

De même, pour qu'une classe $\mathfrak{f}$ représente proprement une classe φ, il faut et il suffit que les points liés à la classe $\mathfrak{f}$ soient, sur l'ensemble des courbes, liés à la classe φ.

L'étude de l'intersection de deux surfaces ou de deux courbes hyperabéliennes donne aussi d'intéressantes conséquences.

Enfin les ordres de multiplicité, sur une surface hyperabélienne, d'une courbe hyperabélienne ou d'un groupe de points, sont liés aux propriétés arithmétiques des formes; par exemple, si une classe binaire φ représente proprement de n manières un nombre Δ, chacune des courbes hyperabéliennes associées à la classe est multiple d'ordre n sur la surface associée au nombre.

On voit par là combien notre représentation géométrique est profondément liée aux propriétés des formes quadratiques et quel intérêt il y aurait à en développer l'étude.

Maillet (*Edmond*). — Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants. (275-362).

Dans des travaux antérieurs, l'auteur a indiqué une classification des fonctions entières d'ordre infini, non transfini, et de celles d'ordre zéro.

Il commence, dans le présent Mémoire, par compléter cette classification pour les fonctions entières d'ordre zéro, grâce au théorème suivant :

Soit une fonction entière

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_m x^m, \tag{1}$$

telle que, pour une infinité de valeurs de m, on ait

$$|a_m| = e_k(m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)},$$

ρ *étant un entier et* ε *tendant vers zéro pour m infini; les autres coefficients sont supposés avoir un module plus petit que ne l'indique cette égalité.*

Si l'on désigne par M_r *le maximum du module de* $f(x)$ *pour* $|x| = r$ *et que l'on pose*

$$E(x, k, \rho) = \sum_{0}^{\infty} x^m e_k(m)^{-\frac{m}{\rho}},$$

on aura

$$M_r < E(r, k, \rho + \varepsilon'),$$

ε' *étant analogue à* ε, *et, pour une infinité de valeurs de r,*

$$M_r > E(r, k, \rho - \varepsilon').$$

M. Maillet rappelle ensuite un théorème de M. Hadamard qu'il énonce ainsi :

Étant donnée une fonction entière absolument quelconque

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_m x^m,$$

on peut toujours déterminer une fonction φ_m *constamment croissante avec* m *et telle que la série* $f(x)$ *renferme une infinité de coefficients* a_m *satisfaisant à l'inégalité*

$$(2) \qquad \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} \right| > \varphi_{m+l}^{l}$$

quelle que soit la quantité positive l.

Puis il montre que sa classification permet d'arriver directement à l'inégalité (2).

Dès lors, on est en mesure, moyennant quelques lemmes relatifs aux fonctions $e_k(m)$ et une proposition fondamentale empruntée à Liouville, d'établir divers résultats sur la nature des valeurs que la série $f(x)$, supposée à coefficients rationnels, prend pour des valeurs rationnelles de x, principalement quand a_n est positif ou quand le rapport $a_n : a_{n+1}$ croît constamment et indéfiniment avec n. Si, par exemple, on pose

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}, \qquad x = \frac{p}{q} > 0 \qquad (p_n, q_n, p, q \text{ entiers}),$$

si de plus le rapport $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ est entier, si enfin on a

$$k > 3, \qquad p_n < e_k(n)^{n\tau}, \qquad \tau < \frac{1}{2\rho},$$

le nombre $f\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est pas algébrique. Ces résultats s'étendent aux fonctions entières d'ordre quelconque présentant des lacunes.

L'auteur étudie ensuite les nombres dérivés des fonctions entières, ou quasi-entières, de la forme

$$\varphi(x) = F(x) + F_0\left(\frac{1}{x}\right) + F_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots + F_r\left(\frac{1}{x - a_r}\right),$$

où les a sont rationnels et où $F(x)$, $F_1(x)$, $\ldots$, $F_r(x)$ sont des séries entières

$$\sum_{0}^{n} \frac{p_n}{q_n} x^n,$$

assujetties à certaines conditions, ainsi que les nombres dérivés d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels de fonctions $\varphi(x)$. Voici quelques-uns de ses résultats :

Quand les a sont tous négatifs, tout polynome à coefficients rationnels

et positifs composé avec des fonctions $\varphi(x)$, s'il ne se réduit pas à une fraction rationnelle en x, prend pour x rationnel et positif une valeur transcendante.

Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels des fonctions $F(x)$ *prend pour x rationnel une valeur exceptionnellement rationnelle, en général transcendante, jamais algébrique.*

Pour x rationnel et positif $F[F_1(x)]$ *est transcendant si*

$$k \quad k_1 \quad 3,$$

k étant l'indice de $F(x)$ *et k_1 celui de* $F_1(x)$.

Quand F est d'indice 2 ou 1, on a encore des théorèmes analogues, dont certains s'appliquent aux quotients des fractions θ de Jacobi pour la valeur 1 de l'argument.

Ces propositions s'étendent aux fonctions non entières, avec lacunes, dont le rayon de convergence est fini.

Enfin, M. Maillet définit les nombres *quasi-rationnels* et les fonctions ordinaires ou continues quasi-périodiques qui ont des caractères voisins de ceux des nombres rationnels et des fractions ordinaires ou continues périodiques : une fraction ordinaire ou continue quasi-périodique est un nombre transcendant.

Boussinesq (*J.*). — Complément au Mémoire intitulé : *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources.* (363-394).

Objet de ce Complément. — Dans mon Mémoire *Sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources,* j'ai supposé assez petites pour avoir leurs carrés et produits négligeables les pentes, tant de superficie que de fond, de ces nappes, de manière à pouvoir, quand la nappe est beaucoup plus longue et large que haute ou profonde, regarder comme horizontales, *à une première approximation,* les vitesses moyennes locales de ses diverses parties, ou comme verticales les surfaces d'égale charge φ auxquelles ces vitesses d'écoulement sont perpendiculaires. Il résultait de là que la charge φ avait, en tous les points d'une verticale quelconque (x, y), même valeur qu'en son plus haut point *mouillé,* intersection de la verticale (x, y) avec la *surface libre* souterraine, où φ égale l'altitude h, diminuée, par la tension capillaire des innombrables *ménisques* constituant cette surface libre, d'une petite quantité ζ, fonction, donnée en x et y, de la température et de la compacité du sol perméable. Je me propose ici de former des équations de mouvement plus générales, convenant au cas de pentes quelconques, tant du *fond* (ou sous-sol imperméable) que de la surface libre souterraine, afin de voir, d'une part, dans l'hypothèse de petites pentes, ce qu'une deuxième approximation ajouterait ou modifierait aux résultats de la première, et, d'autre part, dans l'hypothèse de pentes de fond quelconques, les lois des lents mouvements dus à de petites dénivellations superficielles h.

§ I. Objet de ce complément; équations du mouvement de la nappe liquide.

§ II. Formules de deuxième approximation, dans le cas de vitesses presque horizontales.

§ III. Petites dénivellations d'une masse aqueuse infiltrée, de profondeurs quelconques, avec ou sans écoulement au dehors.

§ IV. Extinction graduelle du mouvement, dans une nappe infiltrée profonde et à bords verticaux, par propagation uniforme d'une onde ascendante.

Zaremba (*S.*). — Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes. (395-444).

Les problèmes que traite M. Zaremba sont relatifs à un domaine plan D intérieur à une frontière (S) composée de polygones curvilignes assujettis à certaines conditions très précises. Tout angle θ de cette frontière, formé par deux côtés issus d'un même sommet, est compté à l'intérieur de D depuis o jusqu'à 2π et l'on désigne par R la plus petite des valeurs que prend le rapport

$$\frac{\pi}{|\pi - \theta|}$$

aux divers sommets de la ligne (S). Le symbole (T) désigne le domaine limité dans le plan de la variable complexe par un cercle de rayon R ayant l'origine pour centre.

En même temps que l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

l'auteur considère l'équation plus générale

$$\Delta u - \mu^2 u = 0,$$

où μ est un nombre réel non négatif. Il appelle *potentiel logarithmique généralisé* de nombre caractéristique μ une solution de cette équation (2). Pour $\mu = 0$, les potentiels logarithmiques généralisés se réduisent aux potentiels logarithmiques ordinaires quand il s'agit de potentiels de double couche; pour les potentiels de simple couche, il faut de plus et il suffit que la densité σ de la simple couche vérifie la condition

$$\int \sigma\, ds = 0,$$

l'intégration étant étendue à toute la ligne qui porte la simple couche.

Les théories de Neumann et de Robin sont comprises dans les deux problèmes suivants que se pose et que résout l'auteur :

1° *Étant données deux fonctions* σ_0 *et* h_0, *définies sur la ligne* (S), *établir l'existence d'un potentiel de simple couche u et celle d'un potentiel de double couche v* (*potentiels logarithmiques ordinaires ou potentiels généralisés de nombre caractéristique donné*) *vérifiant, l'un la condition*

$$(5) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e + \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e\right] = 2\sigma_0,$$

l'autre la condition

$$(6) \qquad (v)_e - (v)_i + \lambda[(v)_e + (v)_i] = 2h_0.$$

où λ représente un paramètre variable. — 2° *Étudier les propriétés des fonctions u et v considérées comme fonctions de la variable complexe λ.*

La solution de ces problèmes est résumée dans les énoncés que voici :

I. *L'équation* (3) *admet une solution u, fonction analytique du paramètre λ; cette fonction existe dans toute l'étendue du domaine* (T); *elle n'admet à l'intérieur de ce domaine d'autres singularités que des pôles simples faisant partie d'une suite de nombres réels et inégaux*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \tag{7}$$

suite qui ne dépend, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, que de la ligne (S), *mais qui, dans le cas des potentiels logarithmiques généralisés, dépend encore du nombre caractéristique μ. Cette suite ne dépend en aucun cas de la fonction σ_0 et l'on a*

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \ldots < R.$$

A chaque terme λ_k de cette suite correspond un nombre fini de potentiels de simple couche, dont M. Zaremba établit l'existence et les propriétés : ce sont les *fonctions fondamentales* de M. Poincaré relatives au nombre λ_k; leur existence n'avait pas été encore établie dans le cas d'une frontière (S) présentant des sommets.

II. *L'équation* (6) *admet une solution v, qui est fonction analytique de λ dans toute l'étendue du domaine* (T) *et n'admet, à l'intérieur de ce domaine, que des pôles simples faisant partie de la suite* (7).

L'analyse de M. Zaremba s'applique en particulier au cas où la ligne (S) est dépourvue de sommets : le domaine (T) comprend alors tout le plan de la variable complexe λ.

Mason (*Max*). — Sur les solutions satisfaisant à des conditions aux limites données de l'équation différentielle

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y).$$

(445-489).

Introduction. — Dans la théorie de l'élasticité et dans celle de l'électricité, l'équation des vibrations stationnaires

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = 0 \tag{1}$$

ne le cède en importance qu'à l'équation potentielle. Le paramètre λ de l'équation doit être déterminé de façon qu'il existe une solution $u(x, y)$ qui s'annule à la frontière d'une région donnée sans être identiquement nulle.

L'équation (1) est l'équation de Lagrange qui correspond au problème isopérimétrique. M. Weber a prouvé (en supposant établi le principe de Dirichlet) l'existence d'une infinité de valeurs de λ pour lesquelles il y a une *fonction harmonique* solution du caractère demandé.

2de Partie.

Schwarz fut le premier à démontrer rigoureusement l'existence d'une telle valeur de λ; M. Picard montra l'existence d'une autre. Enfin, la démonstration pour une infinité de valeurs fut donnée par M. Poincaré. Dans ces trois cas, la méthode employée fut celle des approximations successives avec l'hypothèse que $A(x, y)$ ne change pas de signe dans le domaine considéré, et les propriétés de minimum des fonctions harmoniques autres que la première ne furent pas considérées.

L'objet de ce Mémoire est : 1° d'obtenir des théorèmes généraux d'existence pour les solutions de l'équation différentielle (1), sous certaines conditions aux limites, par l'application de la méthode employée par M. Fredholm pour la solution de certaines équations fonctionnelles; 2° d'en déduire l'existence des fonctions harmoniques comme fonctions minima. Nous justifierons ainsi le principe de Dirichlet tel qu'il a été appliqué par M. Weber dans le problème isopérimétrique, de même que M. Hilbert l'a justifié sous sa forme primitive. La démonstration de l'existence d'une infinité de fonctions harmoniques s'annulant sur la frontière et d'une infinité d'autres satisfaisant sur le contour à l'équation

$$u + \sum(u)\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

sera faite sans rien supposer sur le signe de $A(x, y)$. Dans la seconde Partie, nous nous occupons de l'existence des solutions doublement périodiques.

L. R.

SITZUNGSBERICHTE DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN.

Tome XXXIII.

Communications faites à l'Académie en 1903.

Korn (*A.*). — Sur quelques théorèmes concernant les potentiels de doubles couches. (3-26).

H. Poincaré a montré (*Acta math.*, t. XX, p. 59) que, si l'on suppose démontré le *principe de Lejeune-Dirichlet*, d'après lequel l'existence d'une solution est préalablement assurée, la méthode de Neumann conduit à la solution du problème de Dirichlet (c'est-à-dire du problème consistant à trouver une fonction harmonique dans un certain domaine, prenant des valeurs données sur la frontière de ce domaine), non seulement lorsque la surface fermée envisagée qui forme cette frontière est convexe, mais aussi lorsqu'elle est simplement connexe, qu'elle a en chacun de ses points un plan tangent déterminé, ainsi que deux rayons de courbure principaux déterminés, et qu'enfin la fonc-

tion envisagée φ a des dérivées de tous les ordres. Dans le Tome CXXX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, p. 557 et 1238, A. Korn avait déjà modifié la démonstration de H. Poincaré : il ne supposait pas que le principe de Lejeune-Dirichlet fût démontré; il ne supposait pas non plus établie l'existence d'une certaine transformation à l'aide de laquelle on puisse transformer la surface donnée en une sphère. Les démonstrations de A. Korn ont été critiquées par Liapounov dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkov* pour 1902. Pour répondre à ces critiques, A. Korn reprend la démonstration de trois théorèmes fondamentaux qui une fois établis permettrait d'obtenir aisément les résultats qu'il avait signalés dans les *Comptes rendus*.

Voici en quoi consistent ces trois théorèmes :

Soient ω une partie limitée de surface continue où les courbures sont supposées varier d'une façon continue; $d\omega$ l'élément de cette surface entourant un de ses points Q de coordonnées ξ, η, ζ; P un point variable de coordonnées x, y, z; r la distance des deux points P et Q; Qν la demi-normale menée à ω au point Q du côté de ω que l'on convient d'appeler *côté positif* de ω; soit enfin k une fonction univoque, continue, au moins par sections, des coordonnées ξ, η, ζ des points Q de ω. Envisageons l'intégrale double

$$W = \int_{(\omega)} k \frac{\cos(QP, Q\nu)}{r^2} d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de ω, et la valeur W_ω de cette fonction sur la surface ω, valeur qui peut être représentée par

$$W_\omega = \frac{1}{2}(W_+ + W_-),$$

où l'indice + se rapporte au *côté positif* et l'indice — au côté négatif de ω. On démontre alors les trois propositions que voici :

Théorème I. — *Si l'on désigne par r_{12} la distance de deux points Q_1 et Q_2 de ω, on a pour toute paire de points Q_1 et Q_2 de coordonnées (ξ_1, η_1, ζ_1) et (ξ_2, η_2, ζ_2) pour lesquels r_{12} est inférieur à un certain nombre fini et déterminé, l'inégalité*

$$|W_\omega(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) - W_\omega(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)| < a\sqrt{r_{12}}\,K,$$

où a désigne une constante finie et déterminée et où K est le maximé des valeurs absolues prises par la fonction k sur la surface ω.

Théorème II. — *Si l'on n'envisage que des fonctions $k(\xi, \eta, \zeta)$ telles que, pour des valeurs de r_{12} plus petites qu'un nombre déterminé suffisamment petit, la valeur absolue de la différence*

$$k(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) - k(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$$

soit inférieure à

$$ar_{12}^{\lambda},$$

où a désigne une constante finie et déterminée et λ une fraction plus petite que 1, la fonction W_ω admet, suivant toutes les directions tangentes à ω, des dérivées du premier ordre univoques et continues.

Théorème III. — *Si les dérivées du premier ordre de la fonction envisagée $k(\xi, \eta, \zeta)$ sont univoques et continues, au moins par sections, sur la surface ω supposée fermée et si h marque la direction d'une tangente à ω en Q_1 ou en Q_2, la valeur absolue de la différence*

$$\left| \frac{\partial W_\omega}{\partial h} \right|_{\substack{\xi=\xi_1\\ \eta=\eta_1\\ \zeta=\zeta_1}} - \left| \frac{\partial W_\omega}{\partial h} \right|_{\substack{\xi=\xi_2\\ \eta=\eta_2\\ \zeta=\zeta_2}}$$

est inférieure à

$$b\left|\sqrt{r_{12}}\right|,$$

où b désigne une constante finie et déterminée, pourvu que la distance r_{12} des deux points envisagés Q_1, Q_2 soit inférieure à un nombre déterminé suffisamment petit.

Lindemann (*F.*). — Sur la théorie des raies d'un spectre lumineux (*suite*). (27-100).

Dans la première Partie de ses recherches sur les spectres lumineux, F. Lindemann avait supposé que les atomes qui dans l'éther sont animés d'un mouvement vibratoire conforme aux lois générales de la théorie mathématique de l'élasticité, ont une *forme sphérique*. Il suppose actuellement que ces atomes sont plus généralement des *ellipsoïdes quelconques*. Sous cette hypothèse, il se propose de déduire de la théorie mathématique de l'élasticité les longueurs d'onde des diverses raies du spectre lumineux, comme il l'avait fait précédemment dans le cas particulier où chaque ellipsoïde se réduit à une sphère. Il obtient ainsi des résultats intéressants et pouvant servir d'explication à certains phénomènes observés récemment, particulièrement lorsque les ellipsoïdes envisagés sont supposés de révolution. Les résultats obtenus dans le cas où les aplatissements des ellipsoïdes sont très grands sont eux aussi susceptibles d'application.

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie des fonctions transcendantes entières de rang fini. (101-130).

A. Pringsheim se propose d'établir à nouveau, par des considérations ayant un caractère élémentaire, les résultats obtenus par H. Poincaré sur la théorie des fonctions transcendantes entières de rang fini. Ces résultats avaient été démontrés par H. Poincaré à l'aide de considérations différentes dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI (1883), p. 136. Dans l'ordre d'idées dans lequel il s'est placé, A. Pringsheim obtient aussi quelques relations nouvelles qui viennent ainsi s'ajouter à celles de H. Poincaré.

Soit

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots$$

une suite de nombres tels que l'on ait, pour chaque indice ν,

$$0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$$

et que

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty.$$

Supposons aussi qu'il existe un nombre *positif* σ tel que la série

$$\left|\frac{1}{a_1}\right|^\sigma + \left|\frac{1}{a_2}\right|^\sigma + \ldots + \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma + \ldots$$

soit convergente.

Si

$$\sigma = p + 1$$

est le plus petit *entier* pour lequel cette série est convergente, on dit que la fonction entière de x, définie par le produit infini

$$P(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \left[\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^k} \right],$$

qui est uniformément et absolument convergent dans tout domaine fini (x), est de *rang p*.

Si ρ est la *borne inférieure* (nécessairement comprise dans l'intervalle $(p, \ldots, p+1)$ des exposants σ pour lesquels la série

$$\left|\frac{1}{a_1}\right|^\sigma + \left|\frac{1}{a_2}\right|^\sigma + \ldots + \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma + \ldots$$

est convergente, on appelle ρ l'*exposant de convergence* de la suite envisagée

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots;$$

E. Borel a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout x supérieur en valeur absolue à un nombre déterminé R_ε (qui dépend en général de ε), on a

$$|P(x)| < e^{\varepsilon |x|^\rho}.$$

A. Pringsheim démontre que, pour que cette inégalité soit vérifiée, il n'est nullement *nécessaire* que la série

$$\left|\frac{1}{a_1}\right|^\rho + \left|\frac{1}{a_2}\right|^\rho + \ldots + \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\rho + \ldots$$

soit convergente; pour que l'inégalité ait lieu il est nécessaire toutefois que l'on ait

$$\lim_{\nu=+\infty} \nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\rho = 0.$$

Quand ρ n'est pas un nombre entier cette condition *nécessaire* est aussi *suffisante*.

Quand ρ est entier et que la série

$$\left|\frac{1}{a_1}\right|^\rho + \left|\frac{1}{a_2}\right|^\rho + \ldots + \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\rho + \ldots$$

est divergente, cette même condition *nécessaire* est encore *suffisante* à condi-

tion que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{a_\nu^{\sigma}} = \infty.$$

A. Pringsheim termine son Mémoire en montrant que l'*ordre apparent* (*Cf.* E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1900, p. 74) d'une fonction primitive entière $P(x)$ est égal à l'exposant de convergence de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots,$$

au moyen de laquelle est formée $P(x)$.

Brunn (*H.*). — Additions au Mémoire du même auteur sur les théorèmes des valeurs moyennes des intégrales définies. (205-212).

Dès 1885, F. Franklin avait démontré (*American Journal of Math.*, Vol. VII) d'une façon simple et élégante, en généralisant un théorème de P.-L. Čebyšev exposé dans le *Cours* autographié de Ch. Hermite, les propositions contenues dans le premier Chapitre du Mémoire de H. Brunn sur les théorèmes des valeurs moyennes des intégrales définies. Quoique les résultats obtenus par H. Brunn ne soient donc pas nouveaux et quoique les démonstrations de H. Brunn soient infiniment moins élégantes que celles de F. Franklin, il convient toutefois d'observer qu'elles supposent *moins* de conditions réalisées que celles de F. Franklin et que les résultats obtenus s'appliquent donc à une classe plus étendue d'intégrales définies.

Dans le Mémoire actuel, H. Brunn montre, en outre, que la monotonie croissante (ou décroissante) des fonctions envisagées $f(x)$, $g(x)$, qui est évidemment une condition *suffisante* pour que l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

soit plus grande (ou plus petite) que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx,$$

est loin d'être une condition *nécessaire* pour que cette inégalité soit vérifiée.

H. Brunn étudie enfin de plus près les conditions sous lesquelles les divers théorèmes qu'il avait énoncés dans son premier Mémoire ont effectivement lieu et il les compare aux résultats obtenus par F. Franklin.

Korn (*A.*). — Sur une extension possible de la loi de la gravitation universelle. (383-434 et 563-590).

Dans un Mémoire inséré dans les *Annales de l'École Normale*, t. XX (1903), p. 133, sous le titre *Les vibrations universelles de la matière*, A. Korn a exposé une théorie nouvelle de la gravitation universelle.

H. von Seeliger avait montré (*Sitzgsb. Akad. München*, t. XXVI, 1896, p. 373) que, pour expliquer certains phénomènes, il peut y avoir avantage à remplacer la loi d'attraction de Newton, où l'intensité de l'attraction est de la forme

$$f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

par une loi d'attraction plus générale où l'intensité de l'attraction est de la forme

$$f\frac{m_1 m_2}{r^2}e^{-\mu r},$$

ou encore par une loi d'attraction où l'intensité de l'attraction est de la forme

$$-fm_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}e^{-\mu r}\right),$$

où μ est une constante convenablement choisie.

A cette modification de la loi de Newton correspondrait une sorte d'*absorption* dans le milieu qui transmet l'attraction des éléments de la matière.

A. Korn se propose de rattacher cette extension de la loi de Newton à sa théorie nouvelle de la gravitation universelle dans laquelle toute action à distance est remplacée par des actions se propageant d'une manière continue dans une matière très fine qui obéit, du moins pour les mouvements très rapides, aux lois générales de l'Hydrodynamique.

Au lieu de supposer que la matière pondérable est, au moins pour des vibrations rapides, assimilable à des particules de fluide incompressible se mouvant dans un éther théoriquement incompressible et infini, en ce sens que le potentiel φ des vitesses des *vibrations universelles* de la matière pondérable vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0,$$

A. Korn suppose que la matière pondérable est, au moins pour des vibrations rapides, assimilable à des particules de fluide faiblement *compressible* se mouvant dans un éther incompressible, en sorte que le potentiel φ des vitesses des *vibrations universelles* de la matière pondérable vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$\Delta\varphi - \mu^2\varphi = 0,$$

où μ^2 est une constante positive, sans que rien soit d'ailleurs changé aux autres conditions du problème.

De l'hypothèse de l'incompressibilité de la matière pondérable qui se traduit par la condition $\Delta\varphi = 0$, il résulte que l'intensité de l'attraction exercée par deux éléments de masses pondérables m_1, m_2 à distance r, est nécessairement de la forme

$$-fm_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right),$$

où f est une constante numérique, ce qui est conforme à la loi de Newton.

De l'hypothèse de la faible compressibilité de la matière pondérable qui se

traduit par la condition

$$\Delta\varphi - \mu^2\varphi = 0$$

que doit vérifier le potensiel φ des vitesses de chaque élément pondérable (tandis que le potentiel des vitesses de chaque élément du milieu vérifie l'équation de Laplace), il résulte que cette même intensité est de la forme

$$-fm_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} e^{-\mu r}\right).$$

Si l'on suppose enfin que non seulement la matière pondérable soit compressible, mais que l'éther dans lequel elle est plongée soit également compressible, tout en l'étant beaucoup moins qu'elle-même, le potentiel φ des vitesses de chaque élément de matière pondérable vérifierait une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\Delta\varphi + \mu^2\varphi = 0,$$

tandis que le potentiel φ des vitesses de chaque élément du milieu vérifierait une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\Delta\varphi + h^2\varphi = 0,$$

où h^2 et k^2 sont des constantes positives, telles que le rapport $\frac{h^2}{k^2}$ soit un nombre *très petit*.

Sous cette hypothèse, on démontre qu'*il est impossible que le milieu ne soit pas absorbant*. Ainsi des vibrations universelles ne sont possibles que si le milieu est ou bien *incompressible*, ou bien *compressible et* ABSORBANT.

Si le milieu est *compressible* et *absorbant*, le potentiel des vitesses vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$\Delta\varphi = \alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

où α et β désignent des constantes.

Dans le cas le plus simple d'un élément unique de forme sphérique, le potentiel des vitesses φ est donc, extérieurement à cet élément, de la forme

$$\varphi = \frac{c}{r} e^{-\mu r}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - hr + \delta\right),$$

où c et δ sont des constantes qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles, tandis que μ et h sont des constantes *positives* données en fonction de α et β par les formules

$$\mu^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\alpha\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\beta T}{2\pi\alpha}\right)^2} - 1\right],$$

$$h^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\alpha\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\beta T}{2\pi\alpha}\right)^2} + 1\right].$$

Les constantes μ et h doivent d'ailleurs être d'un ordre de grandeur tel que, si ρ désigne une distance de l'ordre des distances des différents points du système solaire, les deux produits

$$\mu\rho, \quad h\rho$$

soient des nombres *très petits*.

A ce potentiel des vitesses φ d'un élément de forme sphérique correspond une loi d'attraction de deux masses m_1, m_2 à distance ρ, dont l'intensité est donnée par l'expression

$$-m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(f_1 \frac{1}{\rho} e^{-k\rho}\cos h\rho + f_2 \frac{1}{\rho} e^{-k\rho}\sin h\rho\right),$$

où f_1, f_2 désignent deux constantes numériques indépendantes des masses envisagées : f_1 est toujours > 0.

C'est là, si l'on se borne à une première mais déjà très grande approximation, la forme la plus générale de la loi d'attraction de deux éléments matériels supposés compressibles et vibrant très rapidement dans un éther beaucoup moins compressible et absorbant. Les termes que l'on néglige sont de l'ordre du rapport des rayons des éléments matériels sphériques pondérables aux distances des divers éléments pondérables.

Pringsheim (*A.*). — Le théorème de Cauchy-Goursat et son extension aux intégrales prises le long de courbes réelles. (673-682).

L. Heffter (*Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* pour 1902 et pour 1903) a étendu à des intégrales curvilignes réelles de la forme

$$\int [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy]$$

le théorème par lequel E. Goursat (*Transaction of the American mathematical Society*, t. I, 1900, p. 14) avait généralisé le célèbre *théorème de Cauchy* sur les intégrales des fonctions de variables complexes.

A. Pringsheim se propose d'obtenir le théorème de L. Heffter dans le cas où le contour réel est un *rectangle*, cas auquel se ramènent aisément tous les autres, sans faire intervenir dans la démonstration aucun passage à la limite étranger à la question :

Théorème I. — *Si l'on désigne par*

$$P(x, y), \quad Q(x, y)$$

deux fonctions univoques des deux variables x et y admettant chacune, en chaque point situé à l'intérieur ou sur le contour d'un triangle Δ, une différentielle totale; si l'on a, en outre, en chacun des points situés à l'intérieur ou sur le contour de Δ la relation

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

on démontre que l'intégrale curviligne

$$\int_{\Delta} [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy],$$

prise le long du contour du triangle (Δ), *est nécessairement* égale à zéro

Il faut remarquer que la façon dont se comportent, hors du triangle Δ, les deux fonctions envisagées n'intervient pas dans la démonstration. Le théorème a encore lieu quand bien même, en chaque point du contour de Δ, chacune des deux fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$ serait discontinue dans toute direction *extérieure* à Δ.

On sait que la *continuité* des deux fonctions

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$

des deux variables x, y entraine l'existence d'une différentielle totale pour $P(x, y)$ et $Q(x, y)$. La réciproque n'a toutefois pas lieu, en sorte que les conditions sous lesquelles on a énoncé le théorème I sont *distinctes* de celles sous lesquelles on démontre le *théorème de Green*

$$\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int(P\, dx + Q\, dy),$$

dont on fait généralement usage pour démontrer le théorème I.

En décomposant, en ses parties réelles et imaginaires, une fonction $f(z)$ d'une variable *complexe* z, on déduit aisément du théorème I le *théorème de Goursat* concernant $\int f(z)\, dz$ prise le long de Δ. Mais du *théorème de Goursat* on ne peut déduire inversement le théorème I, en sorte que ce théorème I doit être envisagé comme le *théorème fondamental* de toute cette théorie.

Finsterwalder (*S.*). — Remarques sur l'analogie entre certains problèmes de la théorie des compensations des erreurs et certains problèmes de Statique. (683-689).

Finsterwalder (*S.*) et *Scheufele* (*W.*). — Généralisation du problème de Pothenot. (591-614).

Si l'on mesure les angles que font entre eux les rayons d'une gerbe joignant le centre inconnu de cette gerbe où l'on se trouve à l'instant actuel (dans un voyage en ballon par exemple) à différents points connus situés sur les rayons de cette gerbe (des points de repère déterminés du sol par exemple), on peut se proposer de déterminer avec la plus grande approximation possible la position actuelle du centre de la gerbe.

1904.

Föppl (*A.*). — Sur une expérience gyroscopique ayant pour objet la détermination de la vitesse angulaire de rotation de la Terre. (5-28).

Les résultats obtenus par A. Föppl concordent avec ceux qu'on admet géné-

ralement comme exacts. Une légère déviation variable dans la direction de l'axe instantané de rotation n'est toutefois pas à rejeter absolument; par contre la grandeur de la vitesse angulaire de rotation semble rigoureusement constante.

Il n'est pas impossible que les mêmes expériences, reprises dans des conditions meilleures et avec des instruments plus perfectionnés, ne mettent en évidence, mieux que n'ont pu le faire jusqu'ici les expériences de la chute libre des corps pesants, la déviation de ces corps vers le *sud* qui, quoiqu'on n'ait pu trouver jusqu'ici à l'expliquer rationnellement, ne semble pas moins être un fait, sinon certain, au moins fort compatible avec les faits jusqu'ici observés.

Guggenheimer (*S.*). — Sur les vibrations universelles d'un tore. (41-57).

La recherche du potentiel des vitesses φ vérifiant, en chaque point extérieur au tore, l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0,$$

et, en chaque point intérieur du tore, l'équation de Poisson

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0,$$

donne la solution du problème. Si l'on pose

$$U = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad V = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad W = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

les vibrations des éléments pondérables supposés faiblement compressibles dans un milieu incompressible s'étendant à l'infini seront en effet de la forme

$$u = U \sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad v = V \sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad w = W \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

La méthode dont S. Guggenheimer fait usage pour le tore est identique à celle qu'A. Korn avait développée pour la sphère.

Les formules obtenues ici pour φ, dans une première approximation, seraient peut-être utilisables dans des recherches concernant les vibrations universelles de l'anneau de Saturne. Les vibrations fondamentales sont ici des *pulsations* (au degré d'approximation avec lequel on opère) et, pour des points suffisamment éloignés du tore, le tore se comporte à l'égard de ces pulsations comme une sphère animée de pulsations.

Faber (*G.*). — Sur la non-continuation de certaines séries entières. (63-74).

Soit

$$n_0, \quad n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_\nu, \quad \ldots$$

une suite de nombres naturels croissant indéfiniment avec ν. Envisageons la série entière en x (où x désigne une variable complexe)

$$P(x) = a_{n_0}x^{n_0} + a_{n_1}x^{n_1} + a_{n_2}x^{n_2} + \ldots + a_{n_\nu}x^{n_\nu} + \ldots,$$

dont la suite des coefficients

$$a_{n_0},\quad a_{n_1},\quad a_{n_2},\quad \ldots,\quad a_{n_\nu},\quad \ldots$$

est telle que l'on ait

$$\lim_{\nu=+\infty} \sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|} = 1,$$

en sorte que le rayon du cercle de convergence de cette série $P(x)$ soit égal à 1.

On sait que pour

$$n_\nu = \nu^2,\quad n_\nu = 2^\nu,\quad n_\nu = \nu!$$

et dans plusieurs autres cas particuliers, la série entière envisagée $P(x)$ ne peut être continuée hors du cercle de centre $x = 0$ et de rayon 1.

J. Hadamard [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. VIII (1892)] a montré qu'il en est de même pour chaque suite de nombres naturels croissants tels que la limite

$$\lim_{\nu=+\infty} \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu}$$

soit égale à un nombre positif déterminé; E. Borel (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 5 octobre 1876) a montré ensuite qu'il en est encore de même chaque fois que la limite

$$\lim_{\nu=+\infty} \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{\sqrt{n_\nu}}$$

est égale à un nombre positif déterminé; enfin Ch. Fabry (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XIII, 1896; *Acta mathematica*, t. XXII, 1898) a montré qu'il suffit même que l'on ait

$$\lim_{\nu=+\infty} (n_{\nu+1} - n_\nu) = +\infty,$$

et que même cette condition si simple n'est pas la plus générale que l'on puisse établir.

La démonstration donnée par Ch. Fabry est toutefois assez compliquée; G. Faber s'est proposé de la simplifier et il est parvenu à une démonstration relativement simple, s'appuyant sur des lemmes déjà connus et ne nécessitant pas de longs calculs. Les lemmes sur lesquels il s'appuie ont été établis par Leau (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. V, 1899), J. Hadamard (*Id.*, 4ᵉ série, t. VIII, 1892, et *Acta mathematica*, t. XXII, 1893).

Lindemann (*F.*). — Sur le principe de d'Alembert. (77-101).

1. Imaginons n points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ assujettis à μ liaisons bilatérales

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad \ldots,\quad f_\mu = 0;$$

$f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ sont des fonctions données des coordonnées

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n, z_n)$$

des points $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Soient, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$X_i^{(d)}, \quad Y_i^{(d)}, \quad Z_i^{(d)}$$

les composantes de la force totale donnée appliquée au point m_i ; et soient, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$X_i^{(l)}, \quad Y_i^{(l)}, \quad Z_i^{(l)}$$

les composantes d'un vecteur, appliqué au point m_i, auquel nous donnerons le nom de *vecteur-adjoint*, à la force donnée $(X_i^{(d)}, Y_i^{(d)}, Z_i^{(d)})$.

On dit que le système de vecteurs-adjoints

$$(X_1^{(l)}, Y_1^{(l)}, Z_1^{(l)}), \quad (X_2^{(l)}, Y_2^{(l)}, Z_2^{(l)}), \quad \ldots, \quad (X_n^{(l)}, Y_n^{(l)}, Z_n^{(l)})$$

permet d'envisager l'ensemble de points $m_1, m_2, \ldots, m_n$ comme s'il était un ensemble de points *libres* de toute liaison, lorsque, sous l'action du système de vecteurs-adjoints (envisagé comme des forces) appliqué seul à l'ensemble de points $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (en supprimant les forces données) supposé en repos à $t = 0$, cet ensemble de points reste en repos quand t varie. Et inversement.

F. Lindemann démontre que, de cette définition d'un système de vecteurs-adjoints, il résulte nécessairement que les composantes $X_i^{(l)}, Y_i^{(l)}, Z_i^{(l)}$ sont, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} X_i^{(l)} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_\mu \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_i}, \\ Y_i^{(l)} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_\mu \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_i}, \\ Z_i^{(l)} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_\mu \dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_i}, \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ désignent des paramètres indéterminés.

On en déduit les équations différentielles ordinaires du mouvement de l'ensemble de points $m_1, m_2, \ldots, m_n$ envisagé

$$(2) \quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i^{(d)} + X_i^{(l)} = X_i^{(d)} + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \lambda_\nu \dfrac{\partial f_\nu}{\partial x_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i^{(d)} + Y_i^{(l)} = Y_i^{(d)} + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \lambda_\nu \dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i^{(d)} + Z_i^{(l)} = Z_i^{(d)} + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \lambda_\nu \dfrac{\partial f_\nu}{\partial z_i}, \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système de vecteurs-adjoints

$$(X_1^{(l)}, Y_1^{(l)}, Z_1^{(l)}), \quad (X_2^{(l)}, Y_2^{(l)}, Z_2^{(l)}), \quad \ldots, \quad (X_n^{(l)}, Y_n^{(l)}, Z_n^{(l)})$$

est le plus souvent désigné sous le nom de système des *forces de réactions* exercées par les liaisons sur l'ensemble de points.

2. Supposons maintenant que $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ dépendent non seulement de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\ldots$, x_n, y_n, z_n, mais aussi de t explicitement. Il ne saurait plus alors être question de définir les forces de réaction de façon que l'ensemble de points reste en *repos* sous l'action de ces forces. Mais on peut définir les forces de réaction de façon que le plus grand nombre possible des points $m_1, m_2, \ldots, m_n$ restent en repos sous l'action de ces forces. C'est ce que fait F. Lindemann.

Un système de vecteurs-adjoints est dit système de *forces de réaction* lorsque sous l'action de ces vecteurs-adjoints seuls (envisagés comme des forces), quand $n - \mu$ quelconques des n points de l'ensemble restent en repos, les μ points restants se meuvent avec les vitesses que l'on obtient en fixant arbitrairement leurs directions et en portant sur ces directions les valeurs

$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2},$$

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_\mu = \sqrt{\left(\frac{dx_\mu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\mu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\mu}{dt}\right)^2}$$

déduites alors des μ équations de liaison

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_\mu = 0.$$

Et inversement.

De cette définition, on déduit que les composantes des forces de réaction vérifient encore le système d'équations (1) où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ désignent des paramètres indéterminés. Les équations différentielles du mouvement de l'ensemble de points envisagé soumis à des liaisons bilatérales dépendant explicitement de t sont donc encore les équations (2).

3. Supposons, d'autre part, que $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ dépendent non seulement de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\ldots$, x_n, y_n, z_n, mais soient aussi des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, \frac{dy_n}{dt}, \frac{dz_n}{dt}$, en sorte que, pour $i = 1, 2, \ldots, \mu$, on ait

$$f_i = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left(\varphi_{i\nu} \frac{dx_\nu}{dt} + \psi_{i\nu} \frac{dy_\nu}{dt} + \chi_{i\nu} \frac{dz_\nu}{dt} \right),$$

où $\varphi_{i\nu}, \psi_{i\nu}, \chi_{i\nu}$ sont des fonctions de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\ldots$, x_n, y_n, z_n et éventuellement de t.

On définit alors les *forces de réaction* comme au n° 1, où ni t, ni les dérivées de $x_1, \ldots, z_n$ par rapport à t, ne figuraient explicitement dans les équations de liaison. Et l'on démontre sans difficulté que, dans le cas actuel, les équations (1) et, par suite, les équations (2) subsistent.

4. Supposons enfin que $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ dépendent d'une façon quelconque de $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, \frac{dy_n}{dt}, \frac{dz_n}{dt}$, en sorte que, en conservant les mêmes notations que dans le cas 3, les fonctions $\varphi_{i\nu}, \psi_{i\nu}, \chi_{i\nu}$ ne soient pas toutes indépendantes de $\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dz_n}{dt}$. Il peut alors se présenter deux cas suivant que l'hypothèse du repos simultané des n points est, ou non, compatible avec les liaisons.

Dans le premier de ces deux cas, on adoptera encore la même définition des forces de réaction qu'au n° 1. Mais, dans le second cas, il faut remplacer la définition précédente par celle que voici :

Un système de vecteurs-adjoints est dit système de *forces de réaction* lorsque, sous l'action de ces vecteurs-adjoints seuls (envisagés comme des forces), quand $n-\mu$ quelconques des points de l'ensemble restent en repos, les μ points restants se meuvent d'un mouvement uniforme dans les directions déterminées sous l'hypothèse de ce mouvement uniforme par les équations de liaison. Et inversement.

F. Lindemann démontre que, sous ces hypothèses, dans le cas 4 actuellement envisagé, les composantes $X_i^{(l)}, Y_i^{(l)}, Z_i^{(l)}$ des forces de réaction sont nécessairement de la forme

$$X_i^{(l)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \lambda_\nu \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} + \frac{x_i''}{x_i'} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i'} \right),$$

$$Y_i^{(l)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \lambda_\nu \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} + \frac{y_i''}{y_i'} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i'} \right),$$

$$Z_i^{(l)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \lambda_\nu \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} + \frac{z_i''}{z_i'} \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i'} \right),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ désignent des paramètres indéterminés et où l'on a posé, pour abréger, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \qquad y_i' = \frac{dy_i}{dt}, \qquad z_i' = \frac{dz_i}{dt},$$

$$x_i'' = \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \qquad y_i'' = \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \qquad z_i'' = \frac{d^2 z_i}{dt^2}.$$

5. Ceci posé, on voit immédiatement que, pour que l'équation de d'Alembert

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i \right) \delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i \right) \delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i \right) \delta z_i \right] = 0$$

ait lieu dans tous les cas, quelles que soient les liaisons bilatérales envisagées

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_\mu = 0,$$

il faut et il suffit que les composantes δx_i, δy_i, δz_i des *déplacements virtuels* des points de coordonnées x_i, y_i, z_i soient définis comme il suit :

Dans le cas 1, les déplacements virtuels des points (x_i, y_i, z_i) sont des déplacements infiniment petits quelconques compatibles avec les liaisons qui affectent les points x_i, y_i, z_i en sorte que l'on a, pour $i = 1, 2, \ldots, \mu$, les relations

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0.$$

Dans le cas 2, les *déplacements virtuels* des points (x_i, y_i, z_i) sont des déplacements infiniment quelconques, compatibles avec les liaisons *fixées* à l'instant t, en sorte que $\delta t = 0$ et que l'on a, pour $i = 1, 2, \ldots, \mu$, les mêmes relations (3) que dans le cas 1.

Dans le cas 3, les *déplacements virtuels* des points (x_i, y_i, z_i) sont des déplacements infiniment petits quelconques, tels que leurs composantes δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, ..., δz_n vérifient, pour $i = 1, 2, \ldots, \mu$, les relations

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\varphi_{i\nu}\,\delta x_\nu + \psi_{i\nu}\,\delta y_\nu + \chi_{i\nu}\,\delta z_\nu) = 0.$$

Ce cas se présente dans l'étude des mouvements de *roulement*.

Dans le cas 4, enfin, les *déplacements virtuels* des points (x_i, y_i, z_i) sont des déplacements infiniment petits tels que leurs composantes δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, ..., δz_n vérifient, pour $i = 1, 2, \ldots, \mu$, les relations

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x'_i} \frac{x''_i}{x'_i} \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} + \frac{\partial f_\nu}{\partial y'_i} \frac{y''_i}{y'_i} \right) \delta y_i + \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} + \frac{\partial f_\nu}{\partial z'_i} \frac{z''_i}{z'_i} \right) \delta z_i \right] = 0.$$

Les modifications à introduire dans ces différentes définitions quand, dans le cas 3 ou le cas 4, t figure explicitement dans les équations de liaisons bilatérales, ou encore quand quelques-unes des équations de liaisons bilatérales rentrent dans le cas 1, d'autres dans le cas 2, d'autres dans le cas 3, d'autres enfin dans le cas 4, sont assez faciles à formuler. On pourrait aussi envisager le cas où les fonctions f_1, f_2, ..., f_μ dépendraient de dérivées, par rapport à t, de x_1, ..., z_n d'ordres supérieurs au premier.

Dans le cas 4, les équations différentielles du mouvement des points m_1, m_2, ..., m_n se présentent sous la forme habituelle

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i},$$

$$\mu'_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_i},$$

$$\mu''_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z_i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

si l'on pose, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\mu_i = m_i - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x'_i} \frac{1}{x'_i} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x'_i} \frac{1}{x'_i} - \ldots - \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x'_i} \frac{1}{x'_i},$$

$$\mu'_i = m_i - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y'_i} \frac{1}{y'_i} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y'_i} \frac{1}{y'_i} - \ldots - \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y'_i} \frac{1}{y'_i},$$

$$\mu''_i = m_i - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z'_i} \frac{1}{z'_i} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z'_i} \frac{1}{z'_i} - \ldots - \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z'_i} \frac{1}{z'_i}.$$

Les points $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de l'ensemble se meuvent donc, dans le cas 4, comme si, au lieu de leurs véritables masses constantes $m_1, m_2, \ldots, m_n$, ils avaient des *masses variables* fonctions de leur position dans l'espace et de leur état des vitesses.

Si dans une nouvelle théorie, comme celle des *électrons*, on est amené à envisager les masses comme des quantités variables, il convient donc de se demander si cette variabilité n'est pas simplement apparente et ne provient pas de ce que, dans les équations de liaisons des points envisagés, figurent les composantes des vitesses de ces points.

Finsterwalder (S.). — Sur une nouvelle application de la Photogrammétrie. (103-111).

Günther (S.). — Le problème de Pothenot sur la surface de la sphère. (115-123).

Dans le plan, le problème résolu par Pothenot à l'occasion de mesures cartographiques concernant le cours de l'Eure, avait été résolu avant lui par W. Snellius, d'une part, et par Schickhart, d'autre part.

Sur la sphère, on a envisagé, il y a bien longtemps, des quadrilatères curvilignes analogues aux quadrilatères plans du problème de Pothenot. On a appelé *problème de Douwes*, le problème sphérique analogue à celui de Pothenot dans le plan, mais là encore le nom est assez mal choisi puisque Maupertuis avait déjà, dans son *Astronomie nautique* (Paris, 1751, pages 41 et suivantes), donné une solution de ce problème.

La meilleure façon de poser le problème est, semble-t-il, la suivante :

On donne les coordonnées équatoriales de deux étoiles E_1 et E_2. A un instant déterminé, on mesure les azimuts de ces deux étoiles. Si P est le pôle nord et Z le zénith, on connaît, dans le quadrilatère curviligne E_1E_2ZP, le côté PE_1, le côté E_1E_2 (ce dernier calculé à l'aide des éléments connus du triangle sphérique PE_1E_2), l'une des deux diagonales PE_2 et enfin les deux angles que fait l'autre diagonale ZE_1 avec les deux autres côtés ZP et ZE_2. On demande de déterminer ZP ou, si l'on veut, le complément de ZP qui est la hauteur φ du pôle P au-dessus de l'horizon?

Désignons par α le supplément de l'azimut de E_1, par β la différence des deux azimuts de E_1 et de E_2, par c la diagonale connue PE_2, par a le côté E_1P, par b le côté E_1E_2, par γ l'angle en E_1 du triangle sphérique connu PE_1E_2, enfin par m et n les deux rapports

$$m = \frac{\sin \alpha}{\sin a}, \qquad n = \frac{\sin \beta}{\sin b}.$$

S. Günther montre alors que

$$x = \cos\varphi$$

est donné par l'équation du 8e degré

$$\begin{vmatrix} 1 - x^2\sin^2(\alpha+\beta) & 2x\cos c\cos(\alpha-\beta) & x^2 - \sin^2 c & 0 \\ 0 & 1 - x^2\sin^2(\alpha-\beta) & -2x\cos c\cos(\alpha+\beta) & x^2 - \sin^2 c \\ -n^2 & 2xmn\cos\gamma & x^2m^2 - \sin^2\gamma & 0 \\ 0 & n^2 & 2xmn\cos\gamma & x^2m^2 - \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe ce déterminant, on voit que l'équation en x ne contient que des puissances paires de x; c'est donc une équation biquadratique en x^2. Cette équation fournit directement la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon en fonction des coordonnées équatoriales de deux étoiles quelconques dont on a mesuré les azimuts au même instant.

Hilbert (*C.-S.*). — Sur le principe de la moindre action. (125-139).

1. Soient T l'énergie cinétique et U la fonction des forces d'un ensemble quelconque de points matériels donnés soumis à des liaisons bilatérales $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_\mu = 0$. La fonction des forces U et chacune des fonctions f_1, f_2, ..., f_μ dépend des coordonnées x_1, y_1, z_1, x_2, ..., z_n des n points de l'ensemble et éventuellement de t explicitement.

Les équations différentielles du mouvement des n points de l'ensemble sont alors, en désignant par q_1, q_2, ..., q_k des coordonnées de ces n points dans un système de coordonnées quelconques et par q'_i la dérivée $\frac{dq_i}{dt}$,

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \ldots + \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i} \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array} \right.$$

où λ_1, λ_2, ..., λ_μ désignent des paramètres quelconques.

Le théorème de l'énergie cinétique prend, dans ce cas général, la forme

$$\frac{d(\mathrm{T}-\mathrm{U})}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} - \ldots - \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial t},$$

qui se réduit à la forme usuelle

$$\frac{d(\mathrm{T}-\mathrm{U})}{dt} = 0,$$

quand t ne figure explicitement ni dans U, ni dans $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$.

Si, dans l'expression

$$\varphi = \mathrm{T} + \mathrm{U},$$

on remplace q'_1, q'_2, ..., q'_k, en fonction de t, q_1, ..., q_k, et des paramètres p_1, p_2, ..., p_k de Poisson définis par les relations

$$p_i = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

et, si l'on forme ensuite l'intégrale

$$S = \int_{t_0}^{t} \varphi\, dt,$$

on obtient une fonction S qui, en vertu des équations (1) du mouvement, se transforme en une fonction de

$$t,\quad q_1,\quad q_2,\quad \ldots,\quad q_k,\quad t_0,\quad q_{10},\quad q_{20},\quad \ldots,\quad q_{k0},$$

où q_{i0} est la valeur de q_i pour $t = t_0$. C'est la *fonction principale* d'Hamilton. La variation δS de cette fonction principale se présente dans le cas le plus général sous la forme

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial S}{\partial q_{10}}\delta q_{10} + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial S}{\partial q_{k0}}\delta q_{k0} + \frac{\partial S}{\partial t}\delta t + \frac{\partial S}{\partial t_0}\delta t_0.$$

Si l'on ne fait varier que les coordonnées et le temps, on démontre que δS peut être transformé en une expression

$$\delta S = \delta A + \delta B + \delta L + \delta M,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\delta A = \left(\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q_i\right)_{t_0}^{t},$$

$$\delta B = \left[(T - U)\,\delta t - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i\,\delta t\right]_{t_0}^{t},$$

$$\delta L = \int_{t_0}^{t} dt \sum_{i=1}^{i=k} \delta q_i\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right),$$

$$\delta M = -\int_{t_0}^{t} dt\left[\frac{\partial(T+U)}{\partial t}\delta t - \frac{d}{dt}\left(T + U - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i\right)\delta t\right].$$

2. Ceci posé, on peut énoncer le principe de la moindre action sous la forme générale que voici :

Tous les mouvements envisagés ont lieu de façon que l'équation

$$\delta L + \delta M + \int_{t_0}^{t_1} dt\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\sum_{i=1}^{i=\mu} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_\nu}\delta q_\nu\right) + \int_{t_0}^{t_1} dt\left(\sum_{i=1}^{i=\mu} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial t}\delta t\right) = 0$$

soit vérifiée à chaque instant t.

De cette équation on peut déduire les équations différentielles de la Mécanique sous leur forme générale (1); de cette même équation on peut aussi, sous l'hypothèse que $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sont des paramètres *indépendants* les uns des autres, déduire l'équation d'Hamilton-Helmholtz à laquelle on a souvent donné le nom de *principe d'Hamilton* parce qu'on l'a pris souvent comme postulat de la Mécanique rationnelle au lieu du principe de d'Alembert. L'équa-

tion qui traduit le principe d'Hamilton n'est autre que l'équation

$$\delta L = 0.$$

De ce qui précède il résulte clairement que l'objection faite par Jacobi à l'idée de Lagrange de prendre le principe de la moindre action comme point de départ de la Mécanique est sans fondement.

Ce résultat concorde avec ceux de A. Mayer (*Berichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, novembre 1886) et de H. Helmholtz (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*, mars 1887). La méthode suivie par C.-S. Hilbert est analogue à celle de O. Hölder (*Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1896) et de A. Voss (*Ibid.*, 1900).

Voss (A.). — Contribution à la théorie des déformations infiniment petites d'une surface. (141-199).

Signalons les théorèmes suivants :

1. *Toutes les déformations conformes infinitésimales de la sphère s'obtiennent en composant toutes les déformations isométriques infinitésimales de la sphère avec une translation radiale infiniment petite.*

2. *Si la correspondance entre deux surfaces est celle étudiée par Moutard (aux points correspondants les directions correspondantes sont à angle droit), le système des courbes tangentes principales de l'une des deux surfaces correspond à un système conjugué de l'autre surface, ayant mêmes invariants* (*Cf.* G. Darboux, *Leçons*, t. II, Paris, 1889, p. 53).

3. *La loi de correspondance de deux surfaces* non développables *étant toujours celle de Moutard, ces deux surfaces ne peuvent être représentées simultanément l'une sur l'autre d'une façon conforme que si ces deux surfaces sont des surfaces minima adjointes (à normales correspondantes parallèles) ou sont homothétiques (semblables et semblablement placées) à de telles surfaces.*

4. *Toutes les déformations infinitésimales conformes des surfaces minima se ramènent à des quadratures.*

5. *Toutes les déformations infinitésimales conformes des cyclides de Dupin se ramènent à des quadratures.*

6. *La solution générale du problème :* Déterminer toutes les déformations infinitésimales conformes d'une surface en elle-même, *se ramène à la recherche de tous les systèmes isothermes.*

7. *Si* ρ, σ, ν *sont les composantes (réduites sur les lignes coordonnées) du vecteur de translation d'une surface donnée, dans la déformation de cette surface qui change l'élément infinitésimal de cette surface de façon que dans les notations habituelles on ait*

$$\delta\, ds = 2\nu \frac{ds}{R},$$

les composantes (réduites sur les lignes coordonnées) du vecteur de translation pour la surface isométrique, dans la déformation de cette surface qui change l'élément infinitésimal de cette surface de façon que l'on ait

$$\delta\, ds = \varepsilon\nu \frac{ds}{R},$$

sont ρ, σ, ν_1.

8. *Si l'on connaît* une seule *transformation d'une surface à courbure constante positive qui fasse correspondre isométriquement cette surface à une sphère, on peut en déduire* toutes *les déformations infinitésimales conformes de cette surface.*

On trouve de même énoncé, dans le long Mémoire de A. Voss, un grand nombre d'autres théorèmes qui mettent bien en évidence, d'une façon particulièrement simple, le lien qui unit les déformations infiniment petites d'une surface avec des déformations projectives et finies, obtenues au moyen de flexions.

Sur plus d'un point, A. Voss se rencontre avec E. Daniële [*Accad. Torino*, 2e série, t. I (1900), p. 26].

Voit (*C.*). — Éloge de J.-W. Gibbs. (245-248).

Voss (*A.*). — Éloge de L. Cremona. (249-252).

Pringsheim (*A.*). — Discours sur l'importance des Mathématiques. (244).

Cité mais non imprimé.

Föppl (*A.*). — Sur le mouvement absolu et le mouvement relatif. (383-395).

On sait que E. Mach enseigne que tout mouvement est relatif et qu'on ne saurait, à proprement parler, concevoir de mouvement absolu; L. Boltzmann a, par contre, toujours défendu l'opinion contraire et son idée de prendre, pour les trois axes du trièdre de référence absolu, les trois axes principaux d'inertie par rapport au centre de masses général du système du monde paraît, à première vue, assez séduisante.

Avec la plupart des auteurs contemporains, A. Föppl donne raison à E. Mach et critique L. Boltzmann, en cherchant à montrer l'invraisemblance de son hypothèse sur la position occupée par les trois axes du trièdre de référence absolu.

Pour expliquer certaines divergences entre les résultats du calcul et les observations, A. Föppl se demande s'il ne conviendrait pas d'adjoindre aux forces de Newton, dans les équations différentielles de la Mécanique correspondant au mouvement d'un ensemble de points matériels libres par rapport à un trièdre lié à quatre étoiles dites *fixes* convenablement choisies, d'autres forces analogues aux forces de Coriolis. Comme les forces de Coriolis, ces forces complémentaires dépendraient non seulement de la position des points de l'ensemble mais aussi de l'état des vitesses de l'ensemble. La loi suivant laquelle

ces forces agissent devrait être déterminée expérimentalement de façon à expliquer les divergences signalées plus haut entre la théorie et les observations. Il faudrait, à cet effet, surtout s'attacher d'abord à déterminer avec soin la période de chacune des anomalies observées ou les périodes des anomalies partielles dans lesquelles on pourrait décomposer les anomalies observées, afin de voir si elles ne sauraient coïncider avec l'une ou l'autre des périodes fondamentales dans le mouvement des corps célestes, telle que la durée de la révolution de la Terre autour du Soleil, ou celle du jour sidéral.

Parmi les anomalies entre la théorie et l'observation constatées jusqu'ici, A. Föppl cite la déviation vers le sud observée dans la chute des corps à la surface de la Terre; elle est, comme on sait, plusieurs centaines de fois plus grande que la déviation que donne le calcul. A. Föppl insiste aussi sur ce que les mesures très exactes de l'accélération g due à la pesanteur, effectuées depuis quelques années à Stuttgard et à Carlsruhe, ont montré (*Cf.* K.-R. Koch, *Annalen der Physik*, 1904, p. 146) que la différence entre la valeur de g à Stuttgard et la valeur de g à Carlsruhe varie certainement avec le temps. Si la période de cette variation ou de la partie principale de cette variation coïncidait avec l'une des périodes astronomiques connues, il y aurait lieu de se demander si l'hypothèse de A. Föppl de l'existence de forces complémentaires analogues aux forces de Coriolis ne pourrait pas, en choisissant convenablement la loi de ces forces, expliquer l'anomalie.

Weber (*E. von*). — Sur le rôle des imaginaires dans l'étude des quadriques homofocales. (447-483).

Les génératrices réelles des surfaces d'un système de quadriques homofocales réelles jouissent de cette propriété caractéristique que les deux plans minimés conjugués passant par une quelconque de ces génératrices sont tangents à toutes les surfaces du système. E. von Weber en déduit une méthode permettant de représenter très simplement, par des figures réelles, les éléments imaginaires qui interviennent dans l'étude projective-algébrique des quadriques homofocales.

Plusieurs des théorèmes obtenus par E. von Weber se déduisent aussi, par application du principe de dualité, de théorèmes sur les courbes gauches du quatrième ordre, de première espèce, dus à A. Clebsch (*Journal für reine und angewandte Math.*, t. 63, 1864, p. 94 et p. 189) et à A. Harnack (*Math. Annalen*, t. XII, 1877, p. 47) : d'autres sont entièrement nouveaux. Parmi ces derniers, quelques-uns concernent les cercles de courbure des coniques, d'autres les surfaces de striction et les surfaces des moyennes. En général, dans plusieurs des Chapitres de son Mémoire, E. von Weber met en évidence le lien qui rattache ses recherches à la Géométrie infinitésimale réglée et à la théorie des surfaces minimées.

1905.

Finsterwalder (*S.*). — Sur la courbe sphérique du sixième ordre que l'on peut qualifier de *courbe sphérique dangereuse* dans l'extension à la surface d'une sphère du problème de Pothenot. (3-11).

Dans le problème de Pothenot lui-même on appelle *courbe dangereuse* la circonférence de cercle passant par les trois points donnés; c'est une courbe dangereuse en ce sens qu'il faut éviter que le point cherché se trouve sur cette circonférence, car, s'il s'y trouve, le problème de Pothenot admet une infinité de solutions, puisque *chaque* point de cette circonférence en fournit une.

Dans le problème de Pothenot, étendu à la surface d'une sphère, le cas dangereux se présente quand deux des quatre points qui fournissent des solutions du problème sont confondus. Le lieu des points de la surface de la sphère pour lesquels il en est ainsi est une courbe du sixième ordre située à l'intersection de la surface de la sphère et d'un cône du troisième ordre ayant son sommet au centre de la sphère et que S. Finsterwalder apprend à former.

Si l'on envisage le triangle sphérique formé par les trois points donnés de la surface de la sphère envisagée et le triangle polaire de ce triangle sphérique, la *courbe sphérique dangereuse* du sixième ordre passe par les trois sommets du triangle sphérique et par les trois sommets de son triangle polaire. Si, d'un point quelconque de cette *courbe dangereuse,* on abaisse des arcs de grands cercles perpendiculaires sur les côtés du triangle sphérique et de son triangle polaire, les pieds de ces perpendiculaires sont situés sur un *même* grand cercle; les plans des divers grands cercles, obtenus ainsi en envisageant successivement les divers points de la courbe dangereuse, enveloppent un cône de troisième classe tangent aux côtés du triangle sphérique, aux côtés de son triangle polaire et aux hauteurs curvilignes communes à ces deux triangles. Ce cône de troisième classe est polaire réciproque du cône de troisième ordre (ayant son sommet au centre de la sphère) sur lequel est la courbe sphérique dangereuse.

La courbe sphérique dangereuse du sixième ordre étudiée par S. Finsterwalder est liée à la courbe plane de troisième classe de Steiner par certaines propriétés projectives. Mais les propriétés métriques de ces deux courbes diffèrent essentiellement.

Korn (*A.*) et *Strauss* (*E.*). — Sur une relation entre la vitesse de cheminement et la forme des ions. (13-19).

Supposons que les ions soient des solides élastiques dont la forme puisse être envisagée dans une première approximation comme sphérique ou ellipsoïdale.

Supposons que les ions aient tous même densité.

Lorsqu'un ion a la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé et qu'il se meut dans la direction de son grand axe, supposons enfin que la résistance qu'il rencontre soit pour chaque élément de sa surface proportionnelle à la composante normale de la vitesse de cet élément et soit dirigée suivant la demi-normale intérieure à cet élément.

Sous ces hypothèses, si un premier ion a une forme sphérique tandis qu'un second ion a la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé, A. Korn et E. Strauss montrent que l'on peut évaluer le rapport des axes du second ion, quand on connaît le rapport des vitesses des deux ions.

Mais alors on a à sa disposition un moyen de déterminer peut-être la forme des ions.

Supposons, en effet, en premier lieu que l'ion-zinc soit de forme sphérique tandis que l'ion-sodium, ainsi que l'ion-potassium, aient la forme d'un ellipsoïde allongé. Les formules de A. Korn et E. Strauss, jointes aux expériences

dont on peut déduire la vitesse des ions, permettent alors d'affirmer que le rapport de l'axe équatorial à l'axe axial est, pour l'ion-sodium, égal à 0,92 tandis que, pour l'ion-potassium, ce même rapport est égal à 0,58.

Supposons, au contraire, que l'ion-hydrogène soit de forme sphérique tandis que l'ion-sodium, ainsi que l'ion-potassium, aient la forme d'un ellipsoïde allongé. Les mêmes formules, jointes à des expériences convenables, permettent alors d'affirmer que le rapport de l'axe équatorial à l'axe axial est, pour l'ion-sodium, égal à 0,96 tandis que, pour l'ion-potassium, ce même rapport est égal à 0,62.

Il est d'ailleurs à espérer que, connaissant les rapports des axes des ellipsoïdes de révolution affectés par les ions-sodium et les ions-potassium, on pourra en déduire par le calcul, en utilisant des équations établies à cet effet par F. Lindemann, les longueurs d'onde des lignes spectrales correspondant au sodium et au potassium. En comparant les longueurs d'onde observées aux longueurs d'onde calculées, en partant de l'hypothèse de la forme sphérique de l'ion-zinc, et aux longueurs d'ondes calculées en partant de l'hypothèse de la forme sphérique de l'ion-hydrogène, on aurait alors un moyen de décider entre ces deux hypothèses.

Stolz (O.). — Démonstration d'un théorème concernant l'existence de l'intégrale d'une fonction d'une variable complexe. (21-28).

Soit $x = g(\tau)$ une fonction complexe d'une variable réelle τ continue pour chaque valeur de τ comprise dans un intervalle fini donné $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$.

Cette fonction $x = g(\tau)$ représente, dans le plan des variables complexes, une courbe (w) allant du point a de ce plan dont les coordonnées sont définies par l'égalité $a = g(\alpha)$ au point b de ce plan dont les coordonnées sont définies par l'égalité $b = g(\beta)$.

Si $f(x)$ est une fonction de la variable complexe x définie en chacun des points x de la courbe (w), de façon qu'en chacun des points de cette courbe la valeur absolue $|f(x)|$ reste inférieure à un nombre positif déterminé P, on peut définir l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

prise le long de la courbe (w), de la façon que voici :

Soient δ_1, δ_2, ..., δ_n un nombre quelconque, aussi grand que l'on veut, de nombres fixés arbitrairement de façon que

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = \beta - \alpha;$$

posons

$$\begin{array}{llllll} \alpha = \alpha_0, & \alpha + \delta_1 = \alpha_1, & \alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{n-1} + \delta_n = \alpha_n = \beta, \\ g(\alpha_0) = a_0 = a, & g(\alpha_1) = a_1, & g(\alpha_2) = a_2, & \ldots, & g(\alpha_n) = a_n = b. \end{array}$$

Fixons arbitrairement

τ_1 dans l'intervalle (α_0, α_1),

τ_2 dans l'intervalle (α_1, α_2),

. . . .

τ_n dans l'intervalle (α_{n-1}, α_n).

et désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs

$$x_1 = g(\tau_1), \quad x_2 = g(\tau_2), \quad \ldots, \quad x_n = g(\tau_n).$$

S'il existe un nombre I tel que, à chaque nombre positif ε, on puisse faire correspondre un nombre positif δ pour lequel, quand chacun des nombres δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n$ est inférieur à δ, on ait

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\nu - a_{\nu-1}) f(x_\nu) - \mathrm{I} \right| < \varepsilon,$$

on dit qu'il existe une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, prise le long de la courbe (w), et que cette intégrale est égale à I.

C'est ce que l'on peut alors exprimer, d'une façon abrégée, en disant que

$$\mathrm{I} = \lim_{\delta_1=0,\, \delta_2=0,\, \ldots,\, \delta_n=0} \left[\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\nu - a_{\nu-1}) f(x_\nu) \right].$$

On dit que la courbe (w) est régulière lorsque, ou bien la dérivée $g'(\tau)$ est continue pour chaque valeur τ de l'intervalle $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$, ou bien l'intervalle (α, β) peut être divisé en un nombre *fini* d'intervalles partiels dans chacun desquels la dérivée $g'(\tau)$ est continue pour chaque valeur de τ de cet intervalle.

Lorsque la courbe (w) est régulière et lorsque l'intégrale

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta f[g(\tau)]\,g'(\tau)\,d\tau$$

existe, on peut *démontrer* que l'intégrale envisagée

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

prise le long de la courbe (w), existe et est égale à l'intégrale (1).

Le procédé de démonstration employé par O. Stolz lui permet de démontrer que chaque courbe (w), qui est régulière, est aussi *rectifiable*.

Bauer (*G.*). — Sur la courbe du sixième ordre, lieu des foyers des coniques passant par quatre points donnés. (97-108).

J.-J. Sylvester (*London Dublin Edinb. philos. magazine*, 4e série, t. XXXI, 1866, p. 380) a fait observer que, si A, B, C, D désignent des cercles ayant pour centre les quatre points donnés et des rayons infiniment petits, on obtient la courbe cherchée en déterminant $\lambda, \mu, \nu, \omega$ de façon que l'équation

$$\lambda\sqrt{A} + \mu\sqrt{B} + \nu\sqrt{C} + \omega\sqrt{D} = 0$$

soit du sixième degré.

A. Cayley (*London Dublin Edinb. philos. magazine*, t. XXXII, 1866;

Papers 7, Cambridge, 1894, p. 1) en a conclu que l'équation de la courbe cherchée peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} \sqrt{(x-a)^2+(y-a_1)^2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & d & a \\ c_1 & d_1 & a_1 \end{vmatrix} \sqrt{(x-b)^2+(y-b_1)^2} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & a & b \\ d_1 & a_1 & b_1 \end{vmatrix} \sqrt{(x-c)^2+(y-c_1)^2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \sqrt{(x-d)^2+(y-d_1)^2} = 0,$$

si a, b, c, d sont les abscisses des quatre points donnés et a_1, b_1, c_1, d_1 les ordonnées de ces mêmes points.

A.-F. Mœbius (*J. reine angew. Math.*, t. 20, 1843, p. 26; *Werke*, t. I, Leipzig, 1885, p. 581) avait obtenu une relation équivalente au moyen de considérations empruntées au calcul barycentrique.

Cette équation semble être du huitième degré en x et y, mais elle se réduit au sixième degré, en raison de ce que la droite infinie du plan figure comme droite double pouvant être mise en évidence dans l'équation du huitième degré; toutefois cette réduction, qui n'offre d'ailleurs pas de difficulté, ramène l'équation de la courbe à une forme très compliquée peu propre à la discussion des propriétés de la courbe.

G. Bauer rapporte la courbe au triangle polaire du faisceau de coniques défini par les quatre points donnés. En prenant ce triangle comme triangle de référence d'un système de coordonnées trilinéaires x_1, x_2, x_3, on obtient encore comme équation de la courbe cherchée une équation du huitième degré

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

dans laquelle il est aisé de mettre $f(x_1, x_2, x_3)$ sous la forme du produit d'un facteur homogène du second degré en x_1, x_2, x_3 par un facteur homogène du sixième degré en x_1, x_2, x_3; mais ce dernier facteur, qui, égalé à zéro, représente l'équation finale cherchée, se présente sous une forme extrêmement simple et élégante.

On obtient, en effet, pour le lieu cherché, l'équation

$$(12)\,x_1 x_2 K_1 K_2 + (23)\,x_2 x_3 K_2 K_3 + (31)\,x_3 x_1 K_3 K_1 = 0$$

où

$$K_1 = x_2 x_3 + x_1(-x_1 \cos A + x_2 \cos B + x_3 \cos C),$$
$$K_2 = x_3 x_1 + x_2(+x_1 \cos A - x_2 \cos B + x_3 \cos C),$$
$$K_3 = x_1 x_2 + x_3(+x_1 \cos A + x_2 \cos B - x_3 \cos C),$$

A, B, C désignant les trois angles du triangle de référence; et où (12), (23), (31) sont trois constantes.

Sous cette forme les propriétés de la courbe du sixième ordre peuvent être démontrées sans aucune difficulté.

Cette courbe a huit points doubles. Que les quatre points donnés qui déterminent le faisceau de coniques envisagé soient tous quatre réels ou tous quatre imaginaires; en d'autres termes, que les deux coniques qui déterminent le faisceau de coniques se coupent en quatre points ou ne se coupent pas du tout, six de ces points doubles sont toujours réels : ce sont les trois sommets du triangle de référence et les trois pieds des perpendiculaires abaissés de ces sommets sur les côtés opposés de ce triangle. Les deux autres points doubles de la courbe du sixième ordre sont les deux points circulaires situés à l'infini.

La courbe du sixième ordre envisagée une fois construite, on peut construire aisément les foyers de chacune des coniques du faisceau de coniques correspondant.

Un cas particulier très intéressant est celui où les quatre points donnés sont situés sur la circonférence d'un même cercle. La courbe du sixième ordre se décompose alors en deux courbes du troisième ordre (*Cf.* J.-J. Sylvester, *London Edinb. Dublin philos. magazine,* 4ᵉ série, t. XXXI, 1866, p. 380). Le mécanisme de cette décomposition apparaît clairement sur la forme si simple donnée par G. Bauer dans le cas général à l'équation de la courbe.

Föppl (*A.*). — Sur la torsion de tiges rondes à sections circulaires de diamètre variable. (249-262).

Guggenheimer (*S.*). — Sur les oscillations universelles de systèmes de corps de révolution. (265-313).

L'auteur envisage d'abord les oscillations universelles qu'exécute, dans un milieu incompressible, une figure légèrement compressible formée par une sphère et un tore concentrique dont le rayon du cercle générateur est suffisamment petit par rapport à la distance du centre de ce cercle à l'axe du tore.

En appliquant une méthode due à Murphy, il détermine en particulier la fonction potentielle d'abord hors du système formé par la sphère et le tore et ensuite à l'intérieur de la sphère et à l'intérieur du tore.

S. Guggenheimer étudie ensuite le cas où la sphère et le tore ne sont pas concentriques.

Les résultats obtenus peuvent être utilisés dans l'étude de l'équilibre du système formé par la planète Saturne et ses anneaux.

Perron (*O.*). — Note sur la convergence de fractions continues à termes positifs. (315-322).

Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une fraction continue (pour les notations employées, voir *Encyclopédie des Sciences mathém.,* édition française, t. I, art. 3 et 4, Paris et Leipzig, 1906 et 1907)

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots$$

à termes positifs $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu, \ldots$, est que les deux séries

$$\frac{a_2}{a_1}\frac{b_3}{a_3} + \frac{a_2 a_4}{a_1 a_3}\frac{b_5}{a_5} + \frac{a_2 a_4 a_6}{a_1 a_3 a_5}\frac{b_7}{a_7} + \ldots + \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{b_2 b_4 \ldots b_{2\nu}}\frac{b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} + \ldots,$$

$$\frac{a_1}{a_2} b_2 + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} b_4 + \frac{a_1 a_3 a_5}{a_2 a_4 a_6} b_6 + \ldots + \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} b_{2\nu} + \ldots$$

divergent toutes deux.

A. Pringsheim en a déduit toute une suite de théorèmes fournissant des conditions *suffisantes* pour la convergence d'une fraction continue à termes positifs. Tous ces théorèmes se rattachent à l'étude des séries.

O. Perron donne, à son tour, une infinité de critères *suffisants* pour la convergence des fractions continues à termes positifs; mais ces critères de O. Perron ne se rattachent en rien à l'étude des séries. Ces critères forment, d'ailleurs, une suite de critères de plus en plus efficaces, mais aussi de plus en plus compliqués.

Posons

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, & B_1 &= b_1, \\ A_2 &= a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_\nu &= a_\nu A_{\nu-2} + b_\nu A_{\nu-1}, & B_\nu &= a_\nu B_{\nu-2} + b_\nu B_{\nu-1}; \end{aligned}$$

$\frac{A_\nu}{B_\nu}$ est la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue envisagée.

La fraction continue envisagée converge lorsque, pour un seul indice λ, *on a*

$$\overline{\lim_{\nu=+\infty}} \frac{B_{2\lambda-1,\nu}}{A_{2\lambda-1,\nu}} \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > 0,$$

donc *a fortiori* lorsque, *pour un seul indice* λ, *on a*

$$\overline{\lim_{\nu=+\infty}} \frac{B_{2\lambda-1,\nu}}{A_{2\lambda-1,\nu}} b_\nu > 0.$$

Dans ces inégalités, $A_{\nu,k}$ représente ce que devient A_ν quand on augmente de k les indices de tous les éléments a et de tous les éléments b; de même, $B_{\nu,k}$ représente ce que devient B_ν quand on augmente de k les indices de tous les éléments a et de tous les éléments b; de sorte que

$$\frac{A_{\nu,k}}{B_{\nu,k}}$$

est la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue

$$\frac{a_{k+1}|}{|b_{k+1}} + \frac{a_{k+2}|}{|b_{k+2}} + \ldots + \frac{a_{k+\nu}|}{|b_{k+\nu}} + \ldots.$$

On observe d'ailleurs que, si l'une des deux inégalités précédentes est vérifiée pour un indice λ, cette même inégalité est aussi vérifiée pour tous les indices λ *plus grands*.

O. Perron démontre aussi que la fraction continue envisagée converge lorsque, *pour un seul indice* λ, on a

$$\overline{\lim_{\nu=+\infty}} \frac{A_{2\lambda,\nu}}{B_{2\lambda,\nu}} \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} > 0,$$

et *a fortiori* quand, *pour un seul indice* λ, on a

$$\overline{\lim} \frac{A_{2\lambda,\nu}}{B_{2\lambda,\nu}} \frac{b_{\nu-1}}{a_\nu + b_{\nu-1} b_\nu} > 0.$$

Pour $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient ainsi une seconde suite infinie de critères de convergence qui sont *suffisants* pour la convergence d'une fraction continue à termes positifs.

Voit (*C.*). — Éloge de E. Abbe. (346-355).

Pringsheim (*A.*). — Sur quelques critères de convergence pour des fractions continues à termes complexes. (359-380).

1. Le critère fondamental de convergence dû à A. Pringsheim peut s'énoncer ainsi :

Soit

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots$$

une fraction continue infinie dont les éléments $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu, \ldots$ *sont des nombres complexes quelconques. L'ensemble des conditions*

$$|b_\nu| - |a_\nu| \geqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

constitue une condition suffisante de convergence absolue de la fraction continue infinie. La valeur absolue de cette fraction continue est alors toujours comprise entre 0 *et* 1, *sauf quand on se trouve dans le cas singulier où l'on a, à la fois, d'une part,*

$$|b_\nu| - |a_\nu| = 1$$

pour chacun des indices $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *d'autre part*

$$\frac{a_{\nu+1}}{b_\nu b_{\nu+1}}$$

réel *et* négatif *pour chacun des indices* $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *et où enfin la série*

$$|a_1| + |a_1 a_2| + |a_1 a_2 a_3| + \ldots + |a_1 a_2 a_3 \ldots a_\nu| + \ldots$$

est divergente. Dans ce cas singulier, la fraction continue infinie a pour valeur

$$\frac{a_1}{b_1}\left|\frac{b_1}{a_1}\right|,$$

en sorte que sa valeur absolue est égale à 1.

A ce théorème fondamental on peut joindre le suivant :

Si la condition

$$|b_\nu| - |a_\nu| \geqq 1$$

est vérifiée pour $\nu \geqq 2$, *il suffit d'y joindre la condition*

$$|b_1| \geqq 1$$

pour être sûr de la convergence absolue de la fraction continue

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots,$$

sauf toutefois dans le cas singulier où l'on a, à la fois, d'une part

$$|b_\nu| - |a_\nu| = 1$$

pour chaque indice $\nu \geqq 2$, *d'autre part*

$$\frac{a_{\nu+1}}{b_\nu b_{\nu+1}}$$

réel et négatif pour chaque indice $\nu \geqq 2$, *et où enfin la série*

$$|a_2| + |a_2 a_3| + |a_2 a_3 a_4| + \ldots + |a_2 a_3 a_4 \ldots a_\nu| + \ldots$$

est divergente; dans ce cas singulier, si l'on adjoint aux conditions qui caractérisent ce cas singulier la condition que b_1 *soit distinct de*

$$-\frac{a_2}{b_2}\left|\frac{b_2}{a_2}\right|,$$

la fraction continue envisagée sera encore absolument convergente.

On a d'ailleurs aussi le théorème :

Si la condition

$$|b_\nu| - |a_{\nu+1}| \geqq 1$$

est vérifiée pour $\nu \geqq 2$, *il suffit d'y joindre la condition*

$$|b_1| \geqq |a_2|$$

pour être assuré de la convergence absolue de la fraction continue

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots,$$

sauf toutefois dans le cas singulier où l'on a, à la fois, d'une part,

$$|b_\nu| - |a_{\nu+1}| = 1$$

pour chaque indice $\nu \geqq 2$, *d'autre part*

$$\frac{a_{\nu+1}}{b_\nu b_{\nu+1}}$$

réel et négatif pour chaque indice $\nu \geqq 2$, *et où, en outre, la série*

$$\frac{1}{|a_2|} + \frac{1}{|a_2 a_3|} + \frac{1}{|a_2 a_3 a_4|} + \ldots + \frac{1}{|a_2 a_3 a_4 \ldots a_\nu|} + \ldots$$

est divergente. Dans ce cas singulier, si l'on adjoint, aux conditions qui caractérisent ce cas singulier, la condition que b_1 *soit distinct de*

$$-\frac{|b_2|}{b_2} a_2,$$

la fraction continue envisagée sera encore absolument convergente.

2. *La fraction continue*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots$$

est absolument convergente lorsqu'on peut déterminer une suite de nombres positifs

$$p_1 \geqq 1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots, \quad p_\nu, \quad \ldots,$$

tels que, pour $\nu \geqq 2$, *on ait*

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu}.$$

Il y a toutefois un cas d'exception : c'est celui où l'on a, à la fois, d'une part

$$p_1 = 1,$$
$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| = \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu}$$

pour chaque indice $\nu \geqq 2$, *d'autre part*

$$\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}$$

réel et négatif pour chaque indice $\nu \geqq 2$, *et où, en outre, la série*

$$p_2 - 1 + (p_2 - 1)(p_3 - 1) + (p_2 - 1)(p_3 - 1)(p_4 - 1) + \ldots + [(p_2 - 1)(p_3 - 1) \ldots (p_\nu - 1)] + \ldots$$

est simplement divergente. Dans ce cas singulier, la fraction continue est, elle aussi, simplement divergente.

On a donc, en particulier, les critères de convergence que voici, obtenus en spécialisant les nombres positifs $p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$ satisfaisant aux conditions précédentes :

La fraction continue

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots$$

est absolument convergente lorsqu'on a (*voir* déjà *Sitzber. Akad. München*, t. XXVIII, 1898, p. 295 et suiv.)

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| \leqq \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{a_{2\nu-1}}{b_{2\nu-2}b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu}}{b_{2\nu-1}b_{2\nu}}\right| \leqq \frac{1}{2} \qquad (\nu \geqq 2);$$

il y a toutefois un cas d'exception : c'est celui où la série

$$\left|\frac{a_3}{a_4} b_2\right| + \left|\frac{a_3 a_5}{a_4 a_6} b_4\right| + \ldots + \left|\frac{a_3 a_5 \ldots a_{2\nu-1}}{a_4 a_6 \ldots a_{2\nu}} b_{2\nu}\right| + \ldots$$

est simplement divergente; dans ce cas, la fraction continue envisagée est simplement divergente, tandis que la fraction continue

$$\frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots$$

est convergente et a pour valeur $-b_1$.

La fraction continue

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots$$

est absolument convergente lorsqu'on a

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{\nu^2}{4\nu^2 - 1} \qquad (\nu \geqq 2).$$

En particulier, la fraction continue

$$\frac{\varepsilon_1|}{|3} + \frac{4\varepsilon_2|}{|5} + \frac{9\varepsilon_3|}{|7} + \frac{16\varepsilon_4|}{|9} + \ldots + \frac{\nu^2\varepsilon_\nu|}{|2\nu+1} + \ldots,$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ *désignent des nombres complexes quelconques de valeurs absolues toutes égales à* 1, *est convergente.*

La fraction continue

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots$$

est absolument convergente lorsque la série

$$\frac{a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_3}{b_2 b_3} + \ldots + \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} + \ldots$$

est absolument convergente et que la somme des valeurs absolues des termes de cette série est inférieure ou égale à 1.

C'est là le critère de Helge von Koch (Cf. *Bulletin Soc. math. de France*, t. XXIII, 1895, p. 37), un peu élargi puisque Helge von Koch suppose seulement que la somme des valeurs absolues des termes de la série est inférieure à 1.

3. *La fraction continue*

$$\frac{1|}{|1} + \frac{\varepsilon_2 r_2|}{|1} + \frac{\varepsilon_3 r_3(1-r_2)|}{|1} + \frac{\varepsilon_4 r_4(1-r_3)|}{|1} + \ldots,$$

où $r_2, r_3, r_3, \ldots$ *sont des nombres positifs quelconques plus petits que* 1, *et* $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots$ *des nombres complexes quelconques de valeurs absolues égales toutes à* 1, *est toujours convergente sauf dans le cas singulier où tous les* ε_ν $(\nu = 2, 3, 4, \ldots)$ *sont réels et égaux à* -1 *et où la série*

$$\frac{r_2}{1-r_2} + \frac{r_2}{1-r_2}\,\frac{r_3}{1-r_3} + \frac{r_2}{1-r_2}\,\frac{r_3}{1-r_3}\,\frac{r_4}{1-r_4} + \ldots$$

est simplement divergente. Dans ce cas singulier, la fraction continue envisagée est simplement divergente; mais la fraction continue

$$\frac{\varepsilon_2 r_2|}{|1} + \frac{\varepsilon_3 r_3(1-r_2)|}{|1} + \frac{\varepsilon_4 r_4(1-r_3)|}{|1} + \ldots$$

est convergente et sa valeur est -1.

Ce théorème précise et complète un théorème de C.-B. van Vleck (*Transactions American mathematical Society*, t. II, 1901, p. 481) dont l'énoncé pouvait prêter à ambiguïté.

Perron (*O.*). — Sur un critère de convergence des fractions continues périodiques. (495-503).

Envisageons une fraction continue périodique simple

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_m|}{|b_m} + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots$$

dont les éléments $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m$ soient des nombres complexes quelconques donnés tels que $a_1, a_2, \ldots, a_m$ soient toutefois différents de zéro.

Soit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de cette fraction continue. Si B_{m-1} était nul, la fraction continue ne pourrait être convergente; nous supposerons donc, dans ce qui suit, que B_{m-1} n'est pas nul; dans ce cas, si la fraction continue est convergente, sa valeur x est racine de l'équation du *second* degré

$$B_{m-1}x^2 + (B_m - A_{m-1})x - A_m = 0.$$

Envisageons aussi les deux racines ρ_0 et ρ_1 de l'équation du *second* degré

$$(A_{m-1}-\rho)(B_m-\rho)-A_m B_{m-1}=0,$$

et plaçons-nous successivement dans le cas où ces deux racines sont inégales et dans le cas où elles sont égales.

Si ρ_0 et ρ_1 sont inégales, la condition *nécessaire et suffisante* pour la convergence de la fraction continue envisagée est que l'on ait simultanément

$$B_{m-1} \text{ différent de zéro,}$$
$$|\rho_0| \quad \text{distinct de } |\rho_1|,$$

et, si alors la valeur absolue de ρ_1 est plus grande que celle de ρ_0, les expressions

$$B_{m+\lambda}-\rho_1 B_\lambda$$

diffèrent toutes de zéro pour $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-2$. La valeur x de la fraction continue périodique simple envisagée est alors

$$x=\frac{\rho_0-B_m}{B_{m-1}}.$$

Si $\rho_0=\rho_1$, la fraction continue périodique simple envisagée est toujours convergente.

Autrement dit : La fraction continue périodique simple envisagée converge et ne converge que si

$$B_{m-1} \text{ est différent de zéro,}$$

et si, en outre, les deux racines x_0, x_1 de l'équation du second degré

$$B_{m-1}x^2+(B_m-A_{m-1})x-A_m=0$$

sont, ou bien *égales,* ou bien vérifient les inégalités

$$|B_{m-1}x_0+B_m|>|B_{m-1}x_1+B_m|,$$

et les inégalités $A_\lambda - x_1 B_\lambda$ différent de zéro pour $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-2$. La valeur de la fraction continue périodique simple envisagée est alors égale à x_0.

On peut observer que si, de ces conditions de convergence, les deux premières

$$B_{m-1} \text{ différent de zéro,}$$

et

$$|B_{m-1}x_0+B_m|>|B_{m-1}x_1+B_m|$$

sont seules vérifiées, la fraction continue périodique simple envisagée oscille en ce sens que l'on a

$$\lim_{k=+\infty}\frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}}=\begin{cases} x_0 & \text{pour} \quad A_\lambda - x_1 B_\lambda \text{ différent de zéro,}\\ x_1 & \text{pour} \quad A_\lambda - x_1 B_\lambda = 0\end{cases}$$

[*Cf.* THIELE, *Tidskrift for Math.*, t. III (1879)].

J. M.

MEMORIE DEL REALE ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. In-4°, 3e série. Milano, tip. Bernardoni.

Tome I, 1867 (tome X de la collection) [1].

Brioschi (F.). — [A4d]. Propriétés fondamentales d'une classe d'équations algébriques. (1-21).

Dans une Note *Sur la résolvante de Malfatti* (ces *Mémoires*, t. IX, troisième de la deuxième série, p. 224), l'auteur, dans le but de donner une transformation de cette résolvante, a considéré une classe d'équations algébriques de degré pair, ayant le même groupe que les équations du multiplicateur dans la transformation des fonctions elliptiques. Ici, il reprend ces équations et en démontre certaines propriétés; par exemple :

Étant n un nombre premier impair, si les racines carrées des racines d'une équation du degré $n+1$ satisfont à ν relations de la forme

$$\sum_{1}^{n}{}_{m}\sqrt{x_m} = \sqrt{n x_0}, \qquad \sum_{1}^{n}{}_{m}\alpha^{(m-1)r}\sqrt{x_m} = 0 \qquad \left(\frac{n-1}{2}\text{ pair}\right),$$

ou de l'autre

$$\sum_{1}^{n}{}_{m}\sqrt{x_m} = -\sqrt{-n x_0}, \qquad \sum_{1}^{n}{}_{m}\alpha^{(m-1)r}\sqrt{x_m} = 0 \qquad \left(\frac{n-1}{2}\text{ impair}\right),$$

α étant une racine imaginaire de l'équation

$$\alpha^n - 1 = 0,$$

et r l'un quelconque des résidus quadratiques de n, on peut déterminer $\frac{n-1}{2}$ autres fonctions rationnelles entières de $\sqrt{x}$, linéairement indépendantes, qui satisfont à des équations de même forme. Toutes les autres fonctions rationnelles entières de $\sqrt{x}$, pour lesquelles la même propriété est vérifiée, sont des fonctions linéaires de ces ν fonctions.

Codazza (G.). — [R6a]. Sur le principe de la conservation de la force. (1-8).

Déduction de ce principe de celui des forces vives, pour un système quelconque de points physiques.

---

[1] Chaque Mémoire a une pagination spéciale.

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Sur l'influence de la Lune sur les vicissitudes atmosphériques. (1-26, 2 planches).

Tome II, 1870 (XI).

Frisiani (*P.*). — [J2*e*]. Sur la combinaison la plus avantageuse des observations. (1-21).

Tome III, 1873 (XII) (¹).

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Sur la relation entre les comètes, les étoiles filantes et les météorites. (145-168, 1 planche).

Avec un Appendice : *Sur la probabilité des orbites hyperboliques pour les corps qui, des espaces stellaires, arrivent dans l'intérieur du système solaire.* Et une autre, contenant la démonstration que les météorites de Kniaguinia et de Pultusk n'ont pu venir d'une même région de l'espace stellaire.

Schiaparelli (*G.-V.*). — [V3, 4]. Les précurseurs de Copernicus dans l'antiquité. (381-432).

Philolaus et Sketas, Platon, Heraclidès Ponticus et Ecphantus, Aristarche et Séleucus, Aryabatta et Prithudaca, Swami. Suivent des documents.

Tome IV, 1877 (XIII).

Gabba (*A.*). — [T2]. Exposition du principe d'élasticité, et études sur quelques-unes de ses applications au moyen des déterminants. (81-116).

Première Partie : Exposition du principe de Ménabréa pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique. (Lorsqu'un système élastique est en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail intérieur développé dans la déformation du système est minimum.)

Deuxième Partie : Application à la recherche de la répartition d'un effort sur plusieurs membres prismatiques dont les axes soient convergents en un point, ou bien parallèles et situés ou non dans un même plan.

(¹) A partir de ce Tome, la pagination est suivie.

Comme les formules trouvées sont exprimées au moyen de déterminants, l'auteur est amené, pour les simplifier, à s'occuper des propriétés de certains déterminants particuliers (symétriques).

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Les sphères homocentriques d'Eudoxe, de Callippe et d'Aristotélès. (117-179, 2 planches).

Casorati (*F.*). — [C3]. Sur les déterminants de fonctions. (181-187).

Théorèmes concernant le jacobien $J(F)$ de $n+1$ fonctions F_i, le déterminant

$$K(\Phi) = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \dots & \Phi_n \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_n} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

le déterminant

$$\Delta(Y) = \begin{vmatrix} Y_0 & \dots & Y_n \\ Y'_0 & \dots & Y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_0^{(n)} & \dots & Y_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

et le hessien d'une fonction, particulièrement pour ce qui regarde la divisibilité des fonctions correspondantes.

Celoria (*G.*). — [U]. L'éclipse solaire totale du 3 juin 1239. (275-300, 1 carte).

Celoria (*G.*). — [U]. Sur les éclipses solaires totales du 3 juin 1239 et du 6 octobre 1241. (363-381, 1 carte).

Tome V, 1881 (XIV) (¹).

Clericetti (*C.*). — [T2b]. Théorie des échafaudages réticulaires, combinés avec un système articulé, dans les ponts suspendus américains modernes. (1-42).

Celoria (*G.*). — [U]. Sur quelques sondages du ciel faits à l'ob-

(¹) Milan, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.; U. Hoepli, editore.

servatoire royal de Milan, et sur la distribution générale des étoiles dans l'espace. (43-87, 5 Tableaux).

Clericetti (*C.*). — [T2*b*]. Théorie des systèmes composés, en général, et spécialement des ponts suspendus américains modernes. Influence des charges accidentelles. (89-126).

Aschieri (*F.*). — [P6*f* ref. N_1 1]. Sur une classe de transformations rationnelles dans les espaces de trois dimensions. (251-267).

Correspondance entre un complexe linéaire Θ et l'espace (S) de points. Cette correspondance est d'ordre immédiatement supérieur à celle qui a été donnée par Nœther [*Zur Theorie der algebraischer Functionen,* etc. (*Nachrichten* de Gœttingue, 1869)] et Lie [*Over en Classe geom. Transf.* (*Actes de la Soc. de Christianie,* 1871) et *Ueber Complexe,* etc. (*Math. Ann.,* t. V)], à une droite de (S) correspondant en Θ une surface gauche du troisième degré. L'auteur donne aussi les formules de cette transformation et la vérification analytique des propriétés trouvées.

Tome VI, 1885 (XV).

Aschieri (*F.*). — [P6*f* ref. N_1 1]. Fondements pour une géométrie de l'espace composé de droites. (75-90).

A toute droite x de l'espace Σ de droites, l'auteur fait correspondre une conique $C_x^{(2)}$ du système Ω, formé par les coniques circonscrites aux triangles, qui sont circonscrits à une conique fixe $C^{(2)}$. Puis il substitue, au système Ω, un autre système Ω_1 formé par les enveloppes de la deuxième classe, conjugués aux triangles circonscrits à $C^{(2)}$.

Les particularités de cette correspondance sont aussi traitées par voie analytique.

Aschieri (*F.*). — [N]. Introduction à la géométrie de l'espace réglé. (263-290).

Par la méthode suivie dans le Mémoire précédent, l'auteur étudie les formes fondamentales de l'espace Σ de droites.

Tome VII, 1886-1891 (XVI).

Murani (*O.*). — [T5]. Recherches sur la distance explosive de l'étincelle électrique. (55-81).

Ascoli (*G.*). — [D 1 *d*]. Recherche des conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $f(s)$ des points du contour C_A d'une aire connexe quelconque A, située à distance finie, afin que l'on puisse y construire une fonction $f(x, y)$ qui, étant partout continue, croisse toujours dans le sens positif de chacun des axes, et prenne les valeurs $f(s)$ sur C_A. (197-235).

Tome VIII, 1892-1895 (XVII).

Rien.

Tome IX, 1896-1900 (XVIII).

Schiaparelli (*G.*). — [U]. Origine du système planétaire héliocentrique chez les Grecs. (61-100).

Fossati (*F.*). — [V 9]. Bibliographie des écrits inédits d'Alexandre Volta. (181-217).

S. R.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XXII, 1899.

Poincaré (*H.*). — L'œuvre mathématique de Weierstrass. (1-18).

Mellin (*Hj.*). — Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles par des intégrales multiples. (19-40).

Après avoir rappelé (§ 1) la formation de l'*équation adjointe* (*Cf.* Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, § 357) d'une équation linéaire et sa propriété de réciprocité, l'auteur considère le cas où les coefficients sont des polynomes entiers. On peut alors ramener l'intégration de l'équation donnée à celle d'une autre équation linéaire analogue à la transformée de Laplace pour les équations différentielles linéaires ordinaires (¹).

(¹) Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, Chap. II, n° 204; Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, Chap. XX, n° 405.

Des relations de cette espèce peuvent d'ailleurs être obtenues sous diverses formes, dont certaines sont analogues à l'intégrale définie connue qui équivaut à la fonction hypergéométrique.

Mellin (*Hj.*). — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires simultanées par des intégrales définies. (41-54).

Après s'être occupé, dans le Mémoire précédent, des équations linéaires aux dérivées partielles, l'auteur étudie au même point de vue les systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires. Là encore, chaque fois que les coefficients seront des polynomes entiers en x, on pourra exprimer la solution par une intégrale définie analogue à celle de Laplace, si l'on sait intégrer un second système dont l'ordre dépend des degrés des polynomes en question, et dont les relations avec le premier offrent, comme dans la méthode de Laplace ordinaire, un certain caractère de réciprocité.

Dans d'autres cas, on dirigera les calculs de manière à obtenir un résultat analogue à celui qui est relatif à l'équation hypergéométrique.

Hadamard (*J.*). — Théorème sur les séries entières. (55-63).

Soient les deux séries de Mac Laurin

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + \ldots$$

convergentes dans des cercles ayant pour centre l'origine et de rayons respectifs k et l. Formons la série analogue

$$\psi(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots,$$

obtenue en multipliant entre eux les coefficients correspondants.

La fonction $\psi(x)$ n'a (et cela, dans *tout le plan*) d'autres points singuliers que ceux que l'on obtient en multipliant les affixes des différents points singuliers de la première série donnée par celles des différents points singuliers de la seconde.

Démonstration à l'aide de l'expression de ψ sous forme d'une intégrale définie prise suivant un contour fermé.

Remarques analogues relatives aux fonctions représentées par des séries de la forme $\Sigma a_m e^{-\lambda_m x}$.

Fabry (*E.*). — Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. (65-88).

L'auteur développe la démonstration qu'il a donnée (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 18 janvier 1897) du théorème de M. Borel d'après lequel une série de Mac Laurin

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m + \ldots,$$

donnée au hasard, admet en général son cercle de convergence comme coupure essentielle. Il reprend et utilise, d'autre part, la méthode qui lui a servi dans

un Mémoire précédent sur le même sujet (*Ann. scient. de l'École Normale supérieure*, octobre 1896).

La série (1) étant supposée (ce qui est toujours possible) avoir pour rayon de convergence l'unité, la recherche de ses points singuliers sur ce cercle dépend de l'étude de l'expression

$$(2)\quad \frac{f^{n)}(t)}{n!} = a_n + a_{n+1}\, t\, \frac{n+1}{1} + \ldots + a_{n+p}\, t^p\, \frac{(n+1)\ldots(n+p)}{1.2\ldots p} + \ldots.$$

Le terme de cette expression, pour lequel le coefficient de a_{n+p} est le plus grand, s'obtient en prenant pour p la valeur $\frac{nt}{1-t}$ (ou la valeur entière immédiatement suivante); et, si m est la valeur correspondante de $n+p$, on peut se borner à considérer, dans la somme indéfinie (2), les termes dont l'indice est compris entre $m(1+\lambda)$ et $m(1-\lambda)$ (où λ est un nombre positif fixe); tous les autres termes donnant un ensemble négligeable au point de vue qui nous intéresse.

Soit alors ν l'entier immédiatement supérieur à λ_m : on est ramené à étudier la somme (d'un nombre de termes fini pour chaque valeur de m, quoique augmentant indéfiniment avec m)

$$\varphi_m(t) = a_m + a_{m+1}\, t\, \frac{(m+1)}{p+1} + \ldots + a_{m+\nu}\, t^\nu\, \frac{(m+\nu)!\,p!}{(p+\nu)!\,m!}$$
$$+ a_{m-1}\, \frac{1}{t}\, \frac{p}{m} \qquad + \ldots + a_{m-\nu} \qquad \frac{p!\,(m-\nu)!}{m!\,(p-\nu)!}.$$

Le point $z = e^{\omega i}$, situé sur le cercle de convergence, ne sera un point ordinaire que si, lorsque l'argument de t est égal à ω, la quantité $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ a une limite supérieure plus petite que 1.

Or si, laissant m fixe ainsi que le module de t, on fait varier l'argument ω, on voit immédiatement que $|\varphi_m(t)|$ admet un maximum au moins égal à $|a_m|$. Si (pour des valeurs de m telles que $\sqrt[m]{|a_m|}$ tende vers 1) la valeur correspondante de ω a une variation absolument irrégulière et s'approche indéfiniment de toute valeur comprise entre 0 et 2π, le cercle de convergence sera coupure essentielle. Or, c'est ce qui arrivera généralement si les coefficients a sont pris au hasard, comme on le voit en prenant des valeurs de m assez éloignées les unes des autres pour que les expressions $\varphi_m(t)$ correspondantes n'aient aucun terme commun.

La méthode précédemment employée par l'auteur (Mémoire cité) consiste à remarquer que, si un point du cercle de convergence est ordinaire, il en est de même de tous les points voisins et, en particulier, de ceux dont l'argument est de la forme $\frac{k\pi}{H}$ $\left(\text{le rapport } \frac{k}{H} \text{ étant suffisamment petit}\right)$.

En écrivant qu'il en est ainsi, on a une série d'inégalités et c'est en les combinant linéairement d'une manière convenable qu'on arrive à des résultats utiles.

Soient β un arc variable avec m et a'_n [n étant un entier compris entre $m(1-\lambda)$ et $m(1+\lambda)$] la partie réelle de $a_n e^{-\beta i}$. On est conduit à étudier les changements de signe de a'_n. Si q est le nombre de ces changements de signe et que $\left(\text{pour des valeurs de } m \text{ telles que } \frac{1}{m}\,\mathrm{L}\,|a'_m| \text{ ait pour limite zéro}\right)$ le rapport $\frac{q}{m}$ tende vers zéro, le point d'affixe 1 est singulier.

Si, pour une suite illimitée de valeurs de m $\left(\text{telles que } \frac{1}{m} \mathrm{L}|a_m| \text{ tende vers zéro, c'est-à-dire telles que } \sqrt[m]{|a_m|} \text{ tende vers } 1\right)$ la différence $\omega_{n+1} - \omega_n$ des arguments des coefficients consécutifs compris entre $a_{m-\lambda m}$ et $a_{m+\lambda m}$ tend vers ω, sauf pour un nombre q de valeurs de n tel que $\frac{q}{m}$ tende vers zéro, le point d'affixe $e^{\omega i}$ est singulier.

On peut d'ailleurs trouver des cas où ceci a lieu pour une infinité de valeurs de ω (chacune d'elles correspondant à une autre série infinie de valeurs de m) et où l'on met ainsi en évidence, comme coupures essentielles, certains arcs du cercle de convergence ou même ce cercle tout entier. Ainsi, si $\sqrt[n]{\rho_n}$ tend régulièrement vers 1, la série

$$\sum z^n \rho_n e^{in(\mathrm{L}\,n)^\theta},$$

où θ est un nombre compris entre o et 1, admet le cercle de rayon 1 comme coupure. Dans les mêmes conditions, la série

$$\sum z^n \rho_n e^{i\alpha n \sin\varphi(n)},$$

où $n[\varphi(n+1) - \varphi(n)]$ tend vers zéro, admet comme coupure l'arc compris entre les points d'arguments $-\alpha$ et $+\alpha$. Suivant le choix des ρ_n, la coupure peut être limitée à cet arc ou s'étendre au delà et comprendre même le cercle tout entier.

La considération de la même quantité $\varphi_m(t)$ permet de trouver, au contraire, des cas où un point déterminé du cercle n'est pas singulier. Si, par exemple, l'on applique à la fois cette nouvelle méthode et la précédente à la série

$$(3) \qquad \sum \psi(n) z^n e^{i\alpha n \sin(\mathrm{L}\,n)^\theta},$$

où $0 < \alpha < \pi$, $0 < \theta < 1$, $\psi(n)$ étant une fraction rationnelle (ou même une fonction algébrique continue de n), on voit que cette série admet comme coupure l'arc du cercle de rayon 1 compris entre les points $z = e^{-\alpha i}$, $z = e^{+\alpha i}$ et n'a aucun autre point singulier sur la circonférence de ce cercle.

L'auteur envisage finalement le cas où une infinité de coefficients sont tels que $\sqrt[n]{|a_n|}$ ait une limite supérieure inférieure à 1 : on peut alors supprimer les termes correspondants de la série donnée sans changer les points singuliers sur le cercle de convergence. Soit q le nombre des termes restants entre le rang $m - \lambda m$ et le rang $m + \lambda m$. Si $\frac{q}{m}$ tend vers zéro en même temps que $\frac{\mathrm{L}|a_m|}{m}$, le cercle de convergence est coupure. C'est ce qui arrive pour la série

$$(4) \qquad \sum a_{c_m} z^{c_m}$$

si la différence $c_{m+1} - c_m$ tend régulièrement vers l'infini. Mais, si cette différence a simplement des valeurs indéfiniment croissantes, alternant avec d'autres qui restent finies, on n'arrive pas nécessairement à la même conclu-

sion. C'est ce que montre l'exemple de la série

$$\sum z^n \psi(n) e^{n\left[-1+\cos \mathrm{L}\, n^{\theta}\right]},$$

où $\psi(n)$ et θ ont le même sens que dans la série (3), et qui peut être mise sous la forme (4) par suppression de termes consécutifs dont le nombre va en croissant indéfiniment à mesure qu'on s'éloigne dans la série. Cependant cette série n'a, sur le cercle de convergence, que le seul point singulier $z = 1$.

Poincaré (*H.*). — Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes. (89-178).

Une courbe de genre p dépend de $3p-3$ modules et, par conséquent, les fonctions Θ à p variables qui dérivent d'une courbe algébrique par le procédé de Riemann dépendent de $3p-3$ paramètres arbitraires. Or les fonctions Θ les plus générales de p variables dépendent de $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres, nombre supérieur au premier dès que p dépasse 3. Donc les fonctions définies par Riemann ne sont pas les plus générales qui aient p variables et $2p$ périodes.

Ces dernières fonctions peuvent-elles, au contraire, toutes être représentées par des quotients de fonctions Θ?

Weierstrass avait montré que la réponse est affirmative; mais sa démonstration n'a été publiée que récemment, après que MM. Poincaré et Picard, d'une part, M. Appell, de l'autre, avaient démontré le théorème de leur côté.

M. Poincaré indique une troisième démonstration, procédant des principes qu'il a développés dans le Tome II des *Acta mathematica*.

Le Mémoire commence par le rappel des propriétés fondamentales des potentiels et leur extension aux hyperespaces. Il traite dans l'espace ordinaire le cas du potentiel de ligne, lequel devient logarithmiquement infini au voisinage de la ligne attirante. Cette propriété est caractéristique du potentiel de ligne, comme on le voit par un procédé analogue à celui qui est employé pour les potentiels superficiels de simple et de double couche.

On peut d'ailleurs préciser la forme de la fonction holomorphe qui entre dans le logarithme, ainsi que de celle qui forme le coefficient de ce logarithme.

D'autre part, l'équation de Laplace à $2n$ variables

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_n^2}=0$$

est d'ailleurs en relation avec la théorie des fonctions analytiques de n variables complexes x_1+iy_1, x_2+iy_2, x_n+iy_n. Mais cette relation n'est pas aussi étroite que pour $n=1$. L'équation (1) exprime une condition nécessaire pour que V soit la partie réelle d'une fonction des n variables complexes en question. Mais la condition suffisante est exprimée par le système des équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_k^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_k^2}=0, \qquad \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_q}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_k\,\partial y_q}=0,\\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial y_q}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_k\,\partial x_q}=0, \end{cases}$$

qui entraîne d'ailleurs l'équation (1). Une fonction V, solution de ce système,

qui, de plus, est continue et admet des dérivées secondes en tous les points d'un certain domaine, est dite *biharmonique* dans ce domaine.

Cette remarque faite, la généralisation aux hyperespaces du théorème mentionné tout à l'heure relatif au potentiel de ligne s'obtient en considérant (dans l'espace à m dimensions) une variété attirante C, $m-2$ fois étendue, et considérant un potentiel de la forme

$$V = \int \frac{N\,d\sigma}{r^{m-2}},$$

l'intégrale étant $m-2^{\text{uple}}$ et $d\sigma$ étant l'étendue d'un élément de la variété C. r est la distance d'un point déterminé quelconque A de l'espace à m dimensions à un point variable sur C. V qui est, en dehors de C, une fonction holomorphe des coordonnées du point A, est, au voisinage de C, de la forme

$$(3) \qquad V = U_0 \log H + \Phi,$$

U_0, H et Φ étant des fonctions holomorphes. La variété $H = 0$ est (comme dans le cas du potentiel de ligne pour $m = 3$) l'enveloppe des cônes isotropes qui ont pour sommets les différents points de C.

Inversement, une fonction harmonique en général, qui devient ainsi logarithmiquement infinie dans le voisinage de C, est la somme d'une fonction harmonique et du potentiel (au sens précédent) de la variété attirante C, avec une distribution des densités convenablement choisie.

Soit maintenant $F = V + iW$ une fonction holomorphe des n variables complexes $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n$. Dans l'espace à $m = 2n$ dimensions, lieu du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, la quantité $\log|F|$ pourra se mettre sous la forme d'une fonction holomorphe et harmonique des x et y, augmentée du potentiel d'une matière attirante distribuée, avec une densité égale à 1, sur la variété C ($2n-2$ fois étendue) définie par les équations $V = 0$, $W = 0$ (autrement dit, par $F = 0$). La quantité désignée plus haut par H n'est autre que $|F|$.

Pour appliquer ces considérations aux fonctions abéliennes, soit F une fonction méromorphe de n variables complexes, laquelle peut par conséquent, aux environs d'un point quelconque, se mettre sous la forme du quotient de deux séries entières P, Q. Soient C, C′ les variétés définies (dans l'espace à $2n$ dimensions) respectivement par les équations $P = 0$, $Q = 0$; W, leur intersection (variété $2n-4$ fois étendue). F étant donnée, P et Q ne sont pas entièrement déterminés; mais C et C′ le sont.

Si maintenant F est $2n$ fois périodique, il lui correspondra une division de l'espace en *prismatoïdes des périodes* analogues aux parallélogrammes des périodes de la théorie des fonctions elliptiques. Soient R_k un quelconque de ces prismatoïdes; C_k, C'_k, W_k les portions de C, C′, W intérieures à R_k. Désignons par V_k le potentiel de la variété attirante C_k (la densité étant égale à 1).

Développons V_k suivant les puissances croissantes des coordonnées du point attiré, et soit S_k l'ensemble des termes de degrés zéro, un et deux.

On constate que la série

$$V = \sum_k (V_k - S_k)$$

(la sommation étant étendue à tous les indices k, c'est-à-dire à tous les prismatoïdes) est absolument convergente.

La fonction V ainsi définie est harmonique en tout point extérieur à C. Au contraire, au voisinage de C, elle est infinie comme $\log|P|$.

V ne satisfait pas aux équations (2), mais elle donne pour les premiers membres de ces équations des fonctions holomorphes et harmoniques dans tout l'espace.

Enfin, lorsqu'on augmente d'une période les variables $(x+iy)$, V s'augmente d'un polynome du premier degré par rapport aux x et aux y.

On démontre, dès lors, l'existence d'un polynome Z du second degré Z tel que la différence $V - Z - \log|P|$ soit partout *biharmonique*. L'expression

$$dT_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V - Z - \log|P|}{\partial x_i} dy_i - \frac{\partial V - Z - \log|P|}{\partial y_i} dx_i \right)$$

est une différentielle exacte, et son intégrale T_0 est une fonction uniforme des x et des y. La quantité

$$\varphi = V - Z + iT_0$$

est une fonction holomorphe des n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et il en est de même de la quantité

$$\Theta = Pe^{\varphi}.$$

Des propriétés établies jusqu'à présent et des résultats précédemment développés par M. Poincaré dans l'*American Journal of Mathematics*, il ressort que cette quantité est une fonction Θ ordinaire.

La fonction Q donnerait de même lieu à une série V' et à une fonction Θ' analogue à Θ. On a alors

$$F = \frac{\Theta}{\Theta'} e^{H},$$

H étant un polynome du second degré.

Hurwitz (*A.*). — Sur l'intégrale finie d'une fonction entière. (179-180).

Après la publication du Mémoire inséré, sous ce titre, dans le Tome XX des *Acta mathematica*, l'auteur a eu connaissance du Mémoire de M. Appell *Sur les fonctions périodiques de deux variables* (*Journal de Mathém.*, 4e série, t. VII, 1891) où le même problème est traité par une marche analogue. Seulement les fonctions de M. Hurwitz sont exprimées par des séries au lieu que celles de M. Appell l'étaient par des intégrales définies.

König (*J.*). — La loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques. (181-192).

L'auteur se propose de démontrer cette loi par une voie entièrement élémentaire et sans même faire usage du théorème de Fermat, ni par conséquent de l'expression du symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ à l'aide de $p^{\frac{q-1}{2}}$. $\left(\frac{p}{q}\right)$ est donc exclusivement défini comme égal à $+1$ ou à -1 suivant que la congruence $x^2 \equiv p \pmod{q}$ est possible ou non.

Dans ces conditions, il est nécessaire de procéder par induction complète, comme dans la première démonstration de Gauss. Mais la distinction à faire entre les différents cas repose, non plus sur la valeur même du symbole à évaluer, mais sur l'ordre de grandeur relatif des deux nombres p et q.

Weingarten (*J.*). — Note sur la théorie de la déformation des surfaces. (193-199).

Complément au Mémoire précédent du Tome XX du même journal, Mémoire dans lequel le problème de la déformation d'une surface est ramené à l'étude de deux représentations sphériques dépendant d'un trièdre mobile. L'auteur avait exclu le cas où l'une ou l'autre de ces deux représentations dégénère en une courbe sphérique. Ce cas a été repris, dans une Thèse inaugurale, par M. Hessenberg, qui a montré que, pour toute surface, on pouvait, d'une infinité de manières, trouver des éléments linéaires réduits pour lesquels cette singularité se présente.

L'auteur est donc conduit à reprendre, dans ce cas, sa méthode de résolution du problème.

Wertheim (*G.*) — Rectifications à la Table des plus petites racines primitives des nombres premiers inférieurs à 5000. (t. XVII, p. 315, et t. XX, p. 153). (200).

Les corrections portent sur les racines primitives des nombres 1021, 3181, 3191, 3967, 4657, 4751.

Volterra (*V.*). — Sur la théorie des variations des latitudes. (201-357).

L'auteur résume dans ce Mémoire une série d'articles publiés en 1895 dans les *Atti dell Acc. di Torino,* les *Rendic. dell Acc. dei Lincei,* les *Annali di Matematica* et les *Astr. Nachrichten.*

La théorie de la variation de la latitude peut être poursuivie à deux points de vue différents. On peut d'abord, avec Darwin, Schiaparelli, Helmert, Gylden, etc., se proposer de rechercher l'influence des déformations externes ou internes du solide terrestre (élasticité, plasticité, phénomènes volcaniques, etc.). Mais l'auteur s'attache tout d'abord à une autre catégorie de mouvements (courants marins constants, circulation de l'atmosphère et des eaux fluviales) qui diffèrent des premiers en ce que, au moins en première approximation, ils ne changent ni la forme de la Terre, ni la distribution des masses.

Ces mouvements *cycliques* modifient la rotation terrestre parce qu'ils donnent, par rapport aux axes principaux d'inertie, des moments cinétiques m_1, m_2, m_3 différents de zéro. Les équations d'Euler sont alors remplacées par

$$(1)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr + m_3 q - m_2 r = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp + m_1 r - m_3 p = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq + m_2 p - m_1 q = 0. \end{cases}$$

si l'on suppose m_1, m_2, m_3 constants. Même dans cette hypothèse, on voit qu'un axe principal d'inertie n'est pas, en général, un axe permanent de rotation. D'ailleurs, les deux intégrales algébriques classiques du problème de Poinsot existent encore, l'une sans modification (celle des forces vives), l'autre sous la forme

$$(2) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2Am_1p + 2Bm_2q + 2Cm_3r = \text{const.}$$

Mais, tout en supposant les mouvements cycliques, on peut supposer que leur intensité varie, de sorte que m_1, m_2, m_3 sont des fonctions du temps. Dans ce cas, l'intégrale (2) subsiste, mais non celle des forces vives.

Le point de vue ainsi adopté n'est autre au fond que celui de Hertz, que les *mouvements cachés* de ce physicien correspondant aux mouvements cycliques (suivant la dénomination de Helmholtz).

On sait que Hertz entend, par l'intervention des mouvements cachés, ramener toute la Dynamique à la seule notion d'inertie, à l'exclusion de toute force accélératrice.

Il est, à ce point de vue, important de constater que toute anomalie d'inertie dans la rotation libre d'un corps peut être expliquée par des mouvements internes cycliques qui n'altèrent ni la forme du corps ni la distribution des masses (Chap. V, art. 2 du présent Mémoire).

D'autre part, il y a lieu de rechercher, inversement, l'effet produit par la rotation générale sur les mouvements internes.

Tous ces problèmes admettent des solutions de forme remarquable au point de vue analytique. Malgré leur complication, ils se résolvent, en effet, comme dans le cas classique, par les fonctions elliptiques et les fonctions de Jacobi.

Chapitre I. — *L'étude géométrique de la rotation d'un corps dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.*

Supposant m_1, m_2, m_3 constants, on peut donner, du mouvement qui satisfait aux équations différentielles (1), une théorie géométrique analogue à celle de Poinsot. La représentation est, bien entendu, notablement moins simple; mais il est remarquable qu'on puisse étendre au cas actuel le théorème de Sylvester d'après lequel, en composant le mouvement avec une rotation uniforme autour de l'axe du couple des quantités de mouvement, on obtient un autre mouvement de même espèce et ne différant du premier que par un changement de constantes. On sait que c'est cette propriété qui, d'après les travaux de M. Darboux, permet à la solution de Poinsot de représenter le temps.

Après une discussion des formes que peut présenter la polodie, on arrive au

Chapitre II. — *L'étude analytique de la rotation d'un corps dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.*

Les équations du problème appartiennent au type général

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{D(f_1, f_2)}{D(q, r)}, \\[2mm] \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{D(f_1, f_2)}{D(r, p)}, \\[2mm] \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{D(f_1, f_2)}{D(p, q)}, \end{cases}$$

où f_1, f_2 sont des fonctions de p, q, r.

De telles équations admettent toujours les intégrales

$$(4) \qquad f_1 = \text{const.} = h_1, \qquad f_2 = \text{const.} = h_2.$$

Par l'introduction d'une quatrième variable d'homogénéité, en posant

$$p = \frac{x_1}{x_4}, \qquad q = \frac{x_2}{x_4}, \qquad r = \frac{x_3}{x_4},$$

elles pourront s'écrire

$$(5) \qquad \frac{x_i\,dx_j - x_j\,dx_i}{dt} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_k, x_l)},$$

où φ_1, φ_2 sont certaines fonctions homogènes et du second degré de x_1, x_2, x_3, x_4 et i, j, k, l une permutation alternée quelconque des indices 1, 2, 3, 4.

Cette dernière forme présente la propriété remarquable d'être invariante par une substitution linéaire effectuée sur x_1, x_2, x_3, x_4.

Si maintenant, comme dans le cas actuel, on prend pour f_1, f_2 des polynomes du second degré en p, q, r, φ_1 et φ_2 seront des formes quadratiques par rapport aux x, formes que l'on pourra, par une substitution linéaire, ramener simultanément à des sommes de carrés. Les x sont alors exprimables en fonction du temps par des fonctions σ; p, q, r s'exprimeront donc par des quotients de pareilles fonctions.

C'est, au reste, ce qui résulte de ce que la courbe représentée par les équations (4), à savoir la polodie, étant une biquadratique gauche, les coordonnées d'un quelconque de ses points sont des fonctions elliptiques d'un même paramètre u. Le rapport $\frac{dt}{du}$ ne devenant en général jamais infini, on en conclut que u est une fonction linéaire du temps.

Après avoir ainsi calculé p, q, r, il reste à obtenir les neuf cosinus. L'auteur réduit à une extrême simplicité cette partie de la question par un théorème général qui fournit la raison pour laquelle, dans le problème classique de Poinsot, ces neuf cosinus sont des fonctions méromorphes du temps, et montre immédiatement que ce résultat doit s'étendre au problème actuel.

Chapitre III. — *Les axes permanents et leur stabilité.*

Les axes permanents de rotation passent par les points doubles P des biquadratiques gauches représentées par l'équation générale (4), points dont le lieu, lorsque h_1 et h_2 varient, est une hyperbole cubique. (Pour certains systèmes de valeurs de A, B, C, m_1, m_2, m_3, l'axe permanent de rotation pourra occuper une position quelconque dans l'espace, ou aura pour lieu un plan).

Les axes permanents ainsi obtenus seront stables si les points P correspondants sont des points isolés de courbes gauches telles que (4); ils seront, au contraire, instables si P est un nœud. Le cas limite où P est un point de rebroussement s'obtient en résolvant une certaine équation du dixième degré qui a deux racines réelles; en ces points de rebroussement, l'hyperbole cubique est tangente aux quadriques (4).

Il résulte de là, en particulier, que les axes permanents ne sont pas nécessairement des axes d'inertie, même si la forme du système et la distribution des masses sont fixes, dès qu'il peut y avoir des mouvements cycliques.

Chapitre IV. — *Rotation d'un corps à l'intérieur duquel existe un mouvement polycyclique.*

On a supposé jusqu'ici que les mouvements cycliques étaient permanents. Mais il est évident qu'en réalité il n'en est rien et qu'en général ces mouvements ne peuvent se conserver d'eux-mêmes. Il faudrait tout d'abord, pour cela, que la force vive fût constante, ce qui n'arrive que dans quelques cas particuliers que l'on énumère aisément à l'aide des calculs précédents.

Cette condition ne serait d'ailleurs pas suffisante. Mais, parmi les mouvements qui y satisfont, on peut, grâce à elle, trouver tous les mouvements pour lesquels la permanence des mouvements internes sera assurée sans l'intervention de nouvelles forces. Au contraire, dans le cas général examiné dans les Chapitres précédents, ces forces existeraient et seraient des fonctions elliptiques du temps.

Se plaçant ensuite dans l'hypothèse contraire, où les forces agissantes sont nulles ou données d'une manière quelconque, l'auteur traite d'abord le cas particulier où les mouvements internes se réduisent à la rotation (avec une vitesse angulaire qui reste à déterminer en fonction du temps) d'un tore autour de son axe, lequel se ramène encore aux fonctions elliptiques.

Il aborde ensuite le problème qu'il a en vue, celui de la détermination *simultanée* de la rotation et des mouvements internes, dans le cas général d'un mouvement polycyclique (Hertz, *Die Principien der Mechanik*, Zweiter Buch, Abschn. V) quelconque. Le système sera alors défini : d'une part par des paramètres ordinaires, d'autre part par des coordonnées *cycliques*, dont les dérivées seules (les *intensités cycliques*) figurent dans l'expression de la force vive. On doit déterminer en fonction du temps la rotation instantanée, les intensités cycliques et aussi les paramètres ordinaires; mais ceux-ci, pour que le mouvement soit rigoureusement ou sensiblement cyclique, doivent rester rigoureusement ou sensiblement constants.

Le principe de Hamilton permet d'écrire les équations différentielles qui déterminent ces différentes quantités en fonction du temps. Les résultats précédemment établis donnent les conditions dans lesquelles le mouvement est *isocyclique*, c'est-à-dire dans lesquelles les intensités cycliques sont constantes.

Si, laissant de côté ce cas particulier, l'on suppose nulles les forces qui agissent sur les coordonnées cycliques, on a, comme on le sait, autant d'intégrales premières qu'il y a de coordonnées de cette espèce; et, de plus, les intégrales premières ainsi écrites permettent d'éliminer les intensités cycliques.

Or, si l'on fait cette opération en supposant les paramètres ordinaires constants (c'est-à-dire en admettant que l'on n'a à considérer que les mouvements cycliques et la rotation du système), on est réduit (art. VIII) à des équations différentielles toutes semblables à celles qu'on avait trouvées en commençant, dans le cas isocyclique (celui des mouvements stationnaires). Les coefficients seuls sont changés : tout se passe comme si la force vive de rotation, au lieu d'être exprimée par la forme quadratique bien connue en p, q, r, était donnée par une forme quadratique différente, laquelle est d'ailleurs également définie positive, mais ne satisfait pas nécessairement aux inégalités classiques entre les moments d'inertie.

Donc, ici encore, le mouvement s'exprime par des fonctions elliptiques.

Un tel mouvement peut être dit *adiabatique*, puisqu'il n'y a aucun échange d'énergie entre le système considéré et l'extérieur. Les équations différentielles du mouvement adiabatique se ramènent donc à celles du mouvement isocyclique.

2e Partie

La même conclusion s'étend encore au cas où l'on suppose constantes certaines intensités cycliques et nulles, les forces agissant sur les coordonnées cycliques restantes.

L'auteur considère enfin le cas d'un solide renfermant une cavité remplie d'un liquide incompressible et homogène, lequel se traite par les procédés en usage pour l'étude du mouvement d'un solide dans un liquide.

Chapitre V. — *Quelques applications au mouvement du pôle terrestre.*

Si les moments cinétiques m_1, m_2, m_3 sont donnés d'une manière quelconque en fonction du temps, les équations différentielles en p, q, r peuvent s'intégrer par approximations successives lorsque $A = B$: on détermine alternativement p, q comme si r était connu et cette dernière quantité à l'aide des deux premières.

Mais il est plus important de traiter le problème inverse :

Trouver les mouvements internes correspondant à un mouvement de rotation donné,

c'est-à-dire, connaissant p, q, r comme fonctions du temps, de déterminer m_1, m_2, m_3 par les équations différentielles linéaires

$$(1') \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + m_3 q - m_2 r + \dfrac{dm_1}{dt} = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + m_1 r - m_3 p + \dfrac{dm_2}{dt} = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq + m_2 p - m_1 q + \dfrac{dm_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Celles-ci se prêtent fort bien à l'application de la méthode des approximations successives. Il suffira d'isoler, dans le second membre, et de regarder comme connus, les termes $m_3 q - m_2 r$, $m_1 r - m_3 p$, $m_2 p - m_1 q$. On a ainsi des séries qui convergent à la façon des séries de M. Picard.

De ce que la solution existe résulte le fait essentiel que *toute perturbation dans la rotation peut s'expliquer par des mouvements internes cycliques.*

Ceux-ci peuvent être choisis d'une infinité de manières pour un même mouvement de rotation. On peut les prendre très petits si la perturbation est très petite; mais ils pourraient aussi, même dans ces conditions, donner lieu à des moments cinétiques considérables.

Les calculs se simplifient (art. III) dans le cas du mouvement de la Terre, grâce au fait que l'on peut prendre $A = B$, p et q très petits ainsi que les variations de r autour d'une valeur constante ω.

Supposons des mouvements internes périodiques et décomposés en mouvements harmoniques. Le mouvement du pôle sera également périodique. *Il pourra être quelconque pour les périodes différentes de* $\frac{2\pi}{\omega}$; *mais il ne pourra être que circulaire pour la période* $\frac{2\pi}{\omega}$.

Par contre, il peut exister des mouvements internes de période $\frac{2\pi}{\omega}$ qui n'ont aucune influence sur le mouvement du pôle, tandis que le même fait ne peut pas se produire pour les périodes différentes de $\frac{2\pi}{\omega}$.

De même, donnons-nous un mouvement harmonique du pôle; nous pourrons déterminer les mouvements internes, mais il y aura une période singulière $\frac{2\pi}{\rho}$ $\left(\text{avec } \rho = \frac{C - A}{A}\omega + \frac{m_3}{A}\right)$ pour laquelle il ne peut exister qu'une seule espèce de mouvement interne harmonique (laquelle correspond à une infinité de mouvements du pôle).

Calcul des mouvements internes pour la période annuelle et la période de Chandler.

Chapitre VI. — *Aperçu sur les perturbations dues à la plasticité de la Terre.*

L'auteur résume d'abord ses résultats précédents en figurant géométriquement le mouvement lorsque la plasticité est négligeable.

Si, au contraire, cette plasticité existe, elle se traduit par un déplacement de l'axe d'inertie, ou encore du point (*pôle d'inertie*) où cet axe coupe la sphère céleste. L'auteur admet, d'après Darwin (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. CLXVII), que ce déplacement a lieu dans la direction de l'axe du grand cercle qui passe par ce pôle et le pôle de rotation instantanée, avec une vitesse proportionnelle à la distance de ces deux points. Il appelle *coefficient de plasticité* le facteur de proportionnalité μ correspondant.

Toujours dans l'hypothèse des mouvements très petits, il est alors conduit à l'intégration d'équations linéaires à coefficients constants.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur un nouveau et important théorème de la théorie des fonctions. (Lettre adressée à M. Mittag-Leffler.) (359-364).

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe ou méromorphe de la variable imaginaire $z = re^{i\theta}$. En faisant varier l'argument θ de z pendant que son module r reste constant, on a la formule

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta = \log|f(0)| + \log\left| r^{n-m}\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|,$$

$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ étant les affixes des zéros de $f(z)$ compris à l'intérieur du cercle de rayon r; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ les affixes des pôles compris dans le même cercle.

Si la fonction est holomorphe, la formule se réduit à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta = \log|f(0)| + \log\frac{r^n}{|\alpha_1||\alpha_2|\ldots|\alpha_n|}.$$

Cette formule permet d'obtenir la loi asymptotique de distributions des zéros α_i. Soit, en effet, $e^{\varphi(r)}$ le module maximum de $f(z)$ sur le cercle de rayon r : on aura évidemment [en remplaçant, dans la formule précédente, $|f(z)|$ par cette valeur maxima]

$$\varphi(r) > K + \log\frac{r^n}{|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n|}$$

(K désignant une constante) et, par conséquent, en remplaçant r par αr, où

α désigne une constante plus grande que 1,

$$\varphi(\alpha r) < K + n \log \alpha,$$

inégalité qui donne une limite supérieure du nombre n des racines dont le module est inférieur à n.

En particulier, on obtient immédiatement ainsi la condition suffisante pour qu'une fonction entière soit de genre fini donné.

Formule analogue à (1), lorsqu'on multiplie la quantité sous le signe $\int$ par $e^{-k\theta i}$ (k étant un entier positif).

L'auteur annonce, en terminant, des résultats relatifs à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Lerch (*M.*). — Sur quelques intégrales ayant rapport avec les fonctions elliptiques. (365-370).

L'intégrale

$$\text{(A)}\qquad L(w, s, \sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{\left(w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2\right)(1 + x^\sigma)},$$

étudiée sous une forme légèrement différente par l'auteur dans un Mémoire publié par l'Académie de Prague en 1893, possède les deux propriétés fonctionnelles

$$\text{(B)}\qquad w\sin\frac{(s-1)\pi}{\sigma}\,L(w, s, \sigma) + \sin\frac{s\pi}{\sigma}\,L(w, s+1, \sigma) = \frac{\pi}{(w+1)\sigma},$$

$$\text{(C)}\qquad L(w, s, \sigma) - L(w, s-\sigma, \sigma) = \frac{\pi w^{s-1}\sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma}\sin s\pi},$$

qui la rapprochent des fonctions doublement périodiques : cette considération permet de démontrer encore (les points d'affixes s, σ étant convenablement placés pour que les séries du second membre soient convergentes) la nouvelle formule

$$\text{(D)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\pi e^{\frac{s\pi i}{\sigma}}}{\sigma(1+w)} - \sin\frac{\pi}{\sigma}\,L(w, s, \sigma)\\ &= 2\pi i\sin\frac{s\pi}{\sigma}\left(\sum_{\nu=1,3,5,\ldots}\frac{w^{s-1}e^{\nu s\pi i}}{w^\sigma e^{\nu\sigma\pi i} - 1} - \frac{1}{\sigma}\sum_{\mu=2,4,6,\ldots}\frac{e^{\frac{\mu s\pi i}{\sigma}}}{e^{\frac{\mu\pi i}{\sigma}} + w}\right).\end{aligned}\right.$$

En particularisant s, on en déduit également

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}\log w}{1-x^\sigma}\Big[&\operatorname{arc\,tang}\left(\cot\frac{\pi}{\sigma} + \frac{w}{x}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{\sigma}\right)\\ &+ \operatorname{arc\,tang}\left(\cot\frac{\pi}{\sigma} + \frac{1}{wx}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{\sigma}\right) + \frac{2\pi}{\sigma} - \pi\Big]\,dx\\ = \log\left(\sqrt{\frac{\sigma}{i}}\,e^{\frac{\pi i}{4\sigma} - \frac{\sigma i}{4\pi}\log^2 w}\right).\end{aligned}$$

Lerch (*M.*). — Sur la nature analytique d'une fonction considérée par P. du Bois-Reymond. (Extrait des *Monatshefte für Mathem. und Physik;* traduit par L. Laugel.) (371-378).

La série entière

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}}\, u^m$$

est prolongeable au delà du cercle de rayon 1 (cercle de convergence). Cela résulte de sa représentation par l'intégrale définie

$$\Phi(u) = e \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u}\, \frac{dx}{x\sqrt{x}};$$

elle admet pour seul point singulier $u = 1$, qui est un point essentiel pour la fonction uniforme

$$\Phi(u) = e^{-\frac{a}{\log u}\log(u-1)} \frac{}{u(\log u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Rappel de résultats précédemment obtenus sur les fonctions à lignes singulières et publiés à nouveau depuis par M. Pringsheim.

Petrovitch (*M.*). — Sur une propriété des équations différentielles intégrables à l'aide des fonctions méromorphes doublement périodiques. (379-386).

Soit une équation différentielle d'ordre p en y, ne contenant pas explicitement la variable indépendante x, algébrique (et mise sous forme entière) en y, y', y'', ..., $y^{(p)}$. Soient M le degré total en y, y', ..., $y^{(p)}$ d'un terme quelconque; N son *poids*, obtenu en donnant à y, y', ... les poids respectifs 0, 1, ...

On trace le polygone de Newton, tournant sa concavité vers l'axe des M, qui comprend à son intérieur ou sa périphérie tous les points (M, N). Si un sommet de ce polygone correspond à plusieurs termes de l'équation, ce sommet sera dit *multiple* et il lui correspondra une certaine équation algébrique définissant plusieurs valeurs d'un nombre λ.

Cela posé, si l'équation proposée doit admettre une intégrale méromorphe doublement périodique y :

1° Le polygone de Newton a au moins un côté à coefficient angulaire entier négatif, ou au moins un sommet multiple tel que son équation en λ admette des racines entières négatives comprises entre les coefficients angulaires des côtés aboutissant à ce sommet;

2° Quelle que soit la fraction $R(y)$ rationnelle en y, la transformée en $R(y)$ jouira des mêmes propriétés;

3° Il en sera encore de même si R contient (toujours rationnellement) les

dérivées de y ou, dans le cas contraire, $R = \text{const.}$ est une intégrale première pour toutes les solutions méromorphes doublement périodiques de l'équation.

Notice sur S. Lie. H.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

Tome XLVIII; 1897 [1].

Ritter (E.). — Sur la fonction hypergéométrique, avec un point singulier accessoire. (1-36).

Travail trouvé dans les papiers posthumes de l'auteur et préparé pour l'impression par M. Schilling.

Riemann définit la fonction $P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix}$ par les conditions suivantes :

1. Elle est uniforme et finie pour toutes les valeurs de x, sauf a, b, c.

2. Trois branches de la fonction sont liées par une relation linéaire et homogène à coefficients constants.

3. La fonction se laisse mettre sous la forme $c_\alpha P^{(\alpha)} + c_{\alpha'} P^{(\alpha')}$, de telle sorte que $(x-a)^{-\alpha} P^{(\alpha)}$ et $(x-a)^{-\alpha'} P^{(\alpha')}$ restent uniformes, finis et différents de zéro au point $x = a$.

4. On a

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Cette fonction P vérifie alors une équation différentielle linéaire du second ordre entièrement déterminée.

Si l'on remplace la quatrième condition par

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1 - q,$$

où q est un entier positif, en conservant les autres, les fonctions P vérifient encore une équation du second ordre, mais elle renferme q paramètres arbitraires : en dehors des points singuliers a, b, c, elle possède q points singuliers *accessoires* ou *apparents* $r_1, \ldots, r_q$, au voisinage desquels les branches P_1, P_2 sont uniformes; ce point avait déjà été signalé par Riemann. M. Ritter étudie en détail le cas d'*un seul point singulier apparent :*

Formation de l'équation différentielle dont les points singuliers sont a, b, c, s avec les exposants α, α'; β, β'; γ, γ'; $0, 2$. Le faisceau des solutions P est une fonction à deux valeurs de la position du point s. Cas où les points de rami-

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIX, p. 56.

fication coïncident. Fonctions P *voisines*. La représentation conforme obtenue par $\zeta = \frac{P_1}{P_2}$ dans le cas symétrique. Les points de ramification du domaine fondamental considérés comme fonction de s.

Gubler (*E.*). — Sur une intégrale discontinue. (37-48).

L'auteur s'est proposé de calculer directement l'intégrale

$$S = \int_0^\infty J^a(x)\, J^b(cx)\, dx,$$

où la fonction de Bessel $J^b(cx)$ est représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C e^{\frac{1}{2}cx\left(t-\frac{1}{t}\right)}\, t^{-b-1}\, dt,$$

prise le long d'un contour C qui part de $-\infty$ pour y revenir après avoir entouré l'origine dans le sens direct, en passant par les points $\mp i$ où il traverse le cercle de rayon *un*. Il trouve par exemple, pour $a+b+1>0$, $0<c<1$,

$$S = \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(b+1)\,\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)}\, c^b F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a+1}{2}, b+1, c^2\right),$$

et un résultat analogue pour $c>1$. Applications particulières aux cas

$$a-b=-(2n+1), \qquad n \text{ entier}.$$

Moore (*E.-H.*). — Concernant les fonctions transcendantalement transcendantes. (49-74).

Le domaine fonctionnel de rationalité $R[f_1(x), \ldots, f_n(x)]$ comprend toutes les fonctions rationnelles à coefficients constants des fonctions analytiques $f_1, \ldots, f_n$. Une fonction $\varphi(x)$ est *algébriquement transcendante par rapport à* R, si elle vérifie une équation différentielle algébrique dont les coefficients sont algébriques dans R; sinon, elle est *transcendantalement transcendante par rapport à* R.

Après avoir étudié les conséquences simples de cette définition, l'auteur démontre que la fonction analytique

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{a^\nu},$$

où $|x|<1$ et a désigne un entier supérieur à 1, est transcendantalement transcendante dans le domaine $R(x, \log x)$. Cela résulte du fait que $\varphi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x^a) - \varphi(x) = -x.$$

La transformation $x = e^z$ donne une fonction transcendantalement transcen-

dante dans le domaine $R(y, e^y)$, et qui vérifie l'équation

$$\psi(ay) = \psi(y) - e^y.$$

Un dernier paragraphe est consacré à une nouvelle démonstration du théorème dû à M. Hölder sur la fonction $\Gamma(x)$: Toute solution analytique entière de l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

est transcendantalement transcendante par rapport au domaine $R(x)$.

Petrovitch (M.). — Sur les résidus des fonctions définies par les équations différentielles. (75-80).

Après avoir rappelé comment on peut reconnaître, à l'examen d'une certaine ligne polygonale, si l'intégrale générale $y(z, c)$ d'une équation différentielle algébrique du premier ordre admet des pôles simples variant avec la constante d'intégration c, l'auteur montre que les résidus correspondants sont les racines d'équations algébriques faciles à former. Il en conclut les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'ils ne dépendent pas de la constante d'intégration, auquel cas on peut calculer certaines intégrales curvilignes $\int y(z, c)\,dz$ sans connaître l'expression explicite de la fonction y et ses pôles.

Netto (E.). — Sur l'irréductibilité des fonctions entières à coefficients entiers. (81-88).

On doit à Eisenstein le théorème suivant, sur lequel est basée la démonstration de l'irréductibilité de l'équation de la division du cercle pour $n = p^\alpha$ où p est premier : *Si, dans le polynome*

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n,$$

tous les coefficients sont divisibles par le nombre premier p et si c_n n'est pas divisible par p^2, $f(z)$ est indécomposable. M. Kœnigsberger (*Crelle,* t. 115) en a donné diverses extensions. M. Netto en fait ici le terme initial d'une suite de propositions analogues relatives à des polynomes indécomposables ou décomposables d'une certaine manière. Par exemple, *si tous les coefficients étant multiples de p, c_{n-1} n'est pas divisible par p^2, $f(z)$ est indécomposable ou produit d'un binome du premier degré par un polynome de degré* $(n-1)$.

Basset (A.-B.). — Sur la stabilité d'un liquide sans frottement. Théorie des plans critiques. (89-96).

Ce travail a pour but de relever certaines erreurs d'un Mémoire de Lord Rayleigh (*Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. XXVII, p. 5), *Sur la stabilité d'un liquide sans frottement dans le cas où il existe des* plans critiques.

Le liquide coule d'un mouvement permanent entre les plans $y = 0$, $y = a$, la vitesse V parallèle à l'axe des x étant une certaine fonction de y : une petite perturbation est communiquée au mouvement, quelles sont les conditions de stabilité du mouvement troublé à deux dimensions?

Soient $V + u$, v les composantes de la vitesse du mouvement troublé, u, v étant très petits au début. Lord Rayleigh prouve que l'équation qui donne v est

$$\left(\frac{n}{k} + V\right)\left(\frac{d^2 v}{dy^2} - k^2 v\right) = \frac{d^2 V}{dy^2} v.$$

Dans le mouvement permanent, la rotation moléculaire est $-\frac{1}{2}\frac{dV}{dy}$; si elle est constante, $\frac{d^2V}{dy^2}$ s'annule, et l'équation précédente se décompose en deux. Si le premier facteur s'annule, on a affaire à un *plan critique;* il faut un examen particulier pour voir si le second facteur s'annule pour un de ces plans.

M. Basset observe que, si $\frac{dV}{dy}$ n'est pas constant, $\frac{d^2V}{dy^2}$ ne peut s'annuler que pour certaines valeurs de V; il en conclut donc $v = 0$ pour les plans critiques. Le cas où $\frac{dV}{dy}$ est constant est ensuite étudié longuement par une méthode spéciale : existence et position des plans critiques; étude des cas traités par Lord Rayleygh.

Lœwy (*A.*). — Sur la théorie des substitutions linéaires. (97-110).

On sait que M. Voss a réussi à exprimer rationnellement au moyen de paramètres les coefficients a_{ik} de toutes les substitutions

$$(1) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

qui transforment en elle-même une forme bilinéaire dont le déterminant ne s'annule pas. Cependant il a dû supposer que deux déterminants convenables formés avec les a_{ik} sont différents de zéro; M. Lœwy étudie ici les cas ainsi laissés de côté.

Si à toute substitution (1) nous faisons, avec M. Frobenius, correspondre la forme bilinéaire

$$A = \Sigma a_{ik} x_i \xi_k,$$

et si l'on conserve pour le produit de deux substitutions les notations et définitions habituelles, la forme *réciproque* A^{-1} est définie par l'équation

$$A^{-1}A = E,$$

où E désigne la forme $\Sigma x_i y_i$ permutable avec toute forme bilinéaire; soit aussi

$$A' = \Sigma a_{ki} x_i y_k$$

la forme *conjuguée* de A.

M. Voss a démontré que, si T est une forme qui vérifie $TS + T'S' = 0$, où S est une forme donnée à déterminant non nul, toutes les substitutions qui n'altèrent pas S sont comprises dans les formules

$$A = \varepsilon_i (E - TS)(E + TS)^{-1},$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$, sous la condition que les déterminants de $A - \varepsilon_i E$ soient différents

de zéro. M. Lœwy partage les A pour lesquels ces déterminants sont nuls en *singulières* et *pseudo-singulières :* le produit d'une des premières par une substitution quelconque est *singulier*.

Si les transformations *propres* de la forme S constituent un système irréductible (formes symétriques ou alternées, par exemple), les formes singulières sont *toutes les impropres*.

Pour ces formes S,

$$W = \varepsilon(E - T_1 S)(E + T_1 S)^{-1}(E - T_2 S)(E + T_2 S)^{-1},$$

où T_1, T_2 sont deux solutions de l'équation

$$TS - T'S' = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

représente toutes les substitutions qui n'altèrent pas S.

Il montre en outre, pour des formes quelconques, que toutes les substitutions pseudo-singulières dont l'équation caractéristique admet un facteur $(\rho + 1)^\delta$ s'obtiennent comme carrés de substitutions non singulières.

Le travail se termine par l'examen des formes symétriques qui conduit à des résultats simples.

Pasch (*M.*). — Sur la Geométrie projective. (111-112).

Modification aux Leçons de l'auteur (Leipzig, 1882) sur la Géométrie moderne.

Reye (*Th.*). — Sur les transformations quadratiques et les surfaces rationnelles avec faisceaux de coniques. (113-141).

La transformation quadratique la plus générale

$$\rho y_1 = f_1, \qquad \rho y_2 = f_2, \qquad \rho y_3 = f_3, \qquad \rho y_4 = f_4,$$

où les f_i sont des formes quadratiques en x_1, x_2, x_3, x_4, fait correspondre au système des plans de l'espace (y) le système des quadriques

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

de l'espace (x). M. Reye a déjà montré (*Geometrie der Lage*) qu'à un plan (x) correspond la surface de Steiner (du quatrième ordre et de troisième classe), dont les propriétés et la représentation plane apparaissent ainsi immédiatement. Si toutes les surfaces f_i ont un point commun, la même correspondance conduit à la surface réglée gauche du troisième ordre.

L'auteur montre ici qu'on est conduit à d'autres surfaces rationnelles S possédant des faisceaux de coniques quand on transforme des surfaces de degré 2 (ou supérieur) de l'espace (x); ces surfaces S sont représentées univoquement sur celles dont elles dérivent, et leur représentation sur le plan résulte de celle de ces dernières. Les plus simples sont la surface générale du troisième ordre et la surface du quatrième ordre avec une conique double (ou une droite double).

M. Reye donne, par exemple, le tableau des surfaces rationnelles dont l'ordre est inférieur à 8, qui possèdent des faisceaux de coniques et des sections planes

de genre un, deux, trois, ..., avec les propriétés principales qui résultent de leur définition.

Schur (*F.*). — Sur les charpentes planes simples. (142-191).

Une charpente est *stable* (ou non) suivant que sa *disposition* (nombre des nœuds, agencement des barres) et la direction de ses barres déterminent (ou non) chaque nœud d'une manière uniforme. Elle est *simple* quand la stabilité disparaît par suppression de l'une quelconque des barres. Le nombre des barres est alors le double de celui des nœuds diminué de trois unités

$$S = 2n - 3.$$

M. Schur s'est proposé ici une exposition géométrique complète de la théorie des charpentes stables simples.

Il montre, en particulier, que la méthode de Müller-Breslau (application du principe des vitesses virtuelles après suppression d'une barre), qui permet de déterminer individuellement les tensions, est toujours applicable.

On peut toujours aussi, comme l'avait montré M. Saviotti dans quelques cas remarquables, compléter une charpente de façon qu'elle admette une *réciproque* au sens de Maxwell et déterminer ainsi les tensions. L'auteur indique pour cette opération une méthode basée sur l'étude systématique de la structure d'une charpente et de sa décomposition en polygones.

Wiman (*A.*). — Sur la théorie des groupes finis de transformations birationnelles du plan. (195-240).

M. S. Kantor a consacré à cette théorie divers Mémoires fondamentaux à la suite desquels il a donné *l'énumération de tous les types de groupes finis et complets* (non compris dans un autre groupe de la liste) *de transformations birationnelles du plan*. M. Wiman, qui avait, à la suite des premières recherches de M. S. Kantor, abordé le même problème par une méthode géométrique (due à M. S. Kantor), a trouvé des résultats différents : types oubliés par M. S. Kantor ou dont l'ordre indiqué est inexact. Il expose ici ses conclusions.

Chaque groupe fini de transformations birationnelles du plan est équivalent successivement à :

1° Un groupe de transformations linéaires;

2° Un groupe orthanallagmatique (Gr. de Jonquières);

3° Un groupe de transformations quadratiques pour lequel deux faisceaux de droites forment un système invariant;

4°, 5°, 6°, 7°, 8° Un groupe qui transforme en lui-même un système de cubiques avec 3, 4, 5, 6, 7 points fixes;

9° Un groupe qui laisse invariant un système de courbes du sixième ordre avec 8 points doubles fixes et, par suite aussi, le système adjoint du troisième ordre.

L'auteur montre, par une méthode géométrique simple, comment on pourrait former les divers types de chaque catégorie, sans donner toutefois leur expression explicite. Il rectifie les résultats de M. Kantor pour les groupes qui laissent invariant un système de cubiques à 6, 7, 8 points fixes, en confirmant les autres.

Castelnuovo (*G.*) et *Enriques* (*F.*). — Sur quelques résultats récents dans la théorie des surfaces algébriques. (241-316).

L'étude des intégrales simples et doubles de différentielles algébriques de fonctions de deux variables a conduit quelques géomètres français, au premier rang desquels il faut citer M. Picard, à certaines propriétés des surfaces algébriques, invariantes par une transformation birationnelle quelconque. Les géomètres italiens sont parvenus aux mêmes résultats par l'étude des *systèmes linéaires* de courbes algébriques qui appartiennent à une surface algébrique. Les auteurs ont eu pour but de résumer ici leurs recherches antérieures et de les présenter dans l'ordre logique en les rapprochant des propriétés connues des courbes algébriques planes : les démonstrations, qui exigent l'examen d'un trop grand nombre de cas particuliers, ont été supprimées; on donne seulement les énoncés des théorèmes et les considérations qui servent le mieux à les mettre en lumière.

Indiquons rapidement les diverses questions traitées dans cette intéressante Monographie, écrite en français :

I. Transformations birationnelles. Genre d'une courbe et d'une surface d'après Clebsch et M. Nœther.

Transformations birationnelles. Éléments exceptionnels. Répartition en classes des variétés algébriques. Genre d'une courbe et d'une surface algébrique : *genre géométrique* p_g, défini par la considération des surfaces adjointes : *genre numérique* p_n.

II. Série linéaire de groupes sur une courbe. Système linéaire de courbes sur une surface.

Série linéaire sur une courbe : ordre, dimension. Série complète.

Système linéaire de courbes sur une surface : dimension, degré, genre. Systèmes linéaires complets. Opérations élémentaires sur les séries et les systèmes linéaires.

III. Courbes adjointes à une courbe plane. Surfaces sous-adjointes à une surface de l'espace ordinaire. Courbes adjointes. Série caractéristique d'un système linéaire de courbes planes. Surfaces sous-adjointes (*Restsatz* de M. Nöther).

IV. Système adjoint à un système donné.

Série canonique sur une courbe. Système adjoint à un système de courbes planes; ses propriétés caractéristiques. Système adjoint à un système linéaire donné sur une surface algébrique. Définition directe. Surfaces adjointes à une surface, à une courbe gauche.

V. Invariants d'une surface par rapport aux transformations birationnelles.

Système canonique, sa dimension est $p_g - 1$; sa construction. Système canonique réductible. Les caractères $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$: $p^{(1)}$ genre de la courbe canonique générale, $p^{(2)}$ degré du système canonique est égal à $p^{(1)} - 1$ (exceptions).

Définition numérique de $p^{(1)}$, $p^{(2)}$. Genre numérique; deux nouvelles définitions de ce genre.

Surfaces régulières : $p_g = p_n$. Quelques classes de surfaces irrégulières.

Quelques relations entre les caractères invariants.

VI. Systèmes linéaires spéciaux et non spéciaux. Extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch.

Séries spéciales et non spéciales sur une courbe.

Systèmes réguliers et systèmes surabondants sur une surface. Systèmes spéciaux.

VII. Sur les surfaces rationnelles et sur quelques plans doubles.

Quelques propriétés des surfaces rationnelles : On connaît le degré (ou le genre) d'un système linéaire de courbes tracées sur la surface. Systèmes adjoints successifs. On connaît les invariants mumériques; on connaît l'ordre de la surface.

Surfaces dont les coordonnées sont fonctions rationnelles de deux paramètres; surfaces admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes. Plans doubles du genre un : 4 classes.

Korkine (*A.*). — Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. (317-364).

Recherche des valeurs de $R(x)$ pour lesquelles l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{R}{y}$$

admet une intégrale générale de la forme

$$P(y - v_1)^{m_1}(y - v_2)^{m_2} \ldots (y - v_n)^{m_n} = c,$$

où P est une fonction de x; m_1, m_2, ..., m_n des constantes *données* dont aucune n'est nulle; v_1, ..., v_n des fonctions de x et c la constante arbitraire.

Application aux cas simples $n = 2, 3, 4$.

Extension de cette recherche à l'équation générale

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0,$$

où l'on suppose que M et N sont des *polynomes en y* sans facteurs communs, le dénominateur N étant sans facteurs multiples et le numérateur M de degré au plus égal à celui de N. Les coefficients de M et N sont des fonctions quelconques de x.

Wirtinger (*W.*). — Contribution à la méthode d'intégration de Riemann pour les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique et à ses applications au Problème des vibrations d'une corde. (365-389).

L'auteur s'occupe uniquement de l'équation

$$g(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - h(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

à laquelle il donne immédiatement la forme *harmonique*

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\,\partial \eta} = [\mu(\xi - \eta) + \nu(\xi + \eta)]\,\zeta,$$

pour appliquer la méthode de Riemann. Une méthode due à M. Picard lui per-

met d'établir, dans le cas particulier de l'équation à invariants égaux,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \, \partial \eta} = \varphi(\xi, \eta)\zeta,$$

l'existence de la fonction de Riemann $v(\xi, \eta; \xi', \eta')$, sous la seule condition que φ demeure finie et intégrable.

Application est faite de ces résultats aux cordes vibrantes de longueur finie et de densité variable, ou aux cordes homogènes vibrant dans un milieu résistant.

L'étude de l'intégrale définie par laquelle Riemann a obtenu la fonction v et de la représentation de v par une série obtenue au moyen des solutions des équations différentielles (Méthode de Sturm)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 h(x) y = 0,$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \lambda^2 g(t) \eta = 0,$$

termine cet intéressant travail.

Gérard (*L.*). — Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du compas seul. (390-392).

Biermann (*O.*). — Sur les fonctions de deux variables réelles. (393-400).

Suivant une méthode analogue à celle employée par M. Pringsheim pour former des fonctions d'une variable réelle dont toutes les dérivées sont finies en certains points, et qui n'y sont pas développables par la série de Taylor, M. Biermann a formé des fonctions de deux variables réelles t_1, t_2, qui en aucun point d'un domaine fini ne sont développables en série de Taylor, bien qu'en tout point du domaine elles soient finies et continues, ainsi que toutes leurs dérivées. Ces fonctions sont des séries de puissances en e^{it_1}, e^{it_2} qu'on peut différentier indéfiniment terme à terme.

Küpper (*C.*). — Génération projective des courbes algébriques d'ordre *m*. (401-416).

La méthode employée depuis Chasles doit être rejetée.

Si l'on pose $m = 2n + \nu$, une courbe $C_{2n+\nu}$ peut toujours être engendrée au moyen de deux faisceaux (C_n), $(C_{n+\nu})$ qui n'ont aucun point-base commun. Cela résulte immédiatement de l'application du théorème du reste (Brill-Nöther) quand on suppose que $C_{2n+\nu}$ renferme les n^2 points-bases d'un faisceau (C_n).

La théorie acceptée jusqu'à présent repose sur le théorème fondamental suivant : *Si une* $C_{2n+\nu}$ *passe par* $3n - 2$ *points arbitraires f, elle contient toujours* $n^2 - (3n - 2)$ *autres points qui forment avec ces f la base* B *d'un faisceau* (C_n).

Les démonstrations qu'on en donne, en particulier celle de Cremona, sont

insuffisantes; l'auteur commence par en exposer une nouvelle. Un groupe de Q points est dit *normal par rapport aux* C_m qui y passent quand ces courbes dépendent de $\mu_0 = \frac{m(m+3)}{2} - Q$ paramètres; il est *anormal* si ces courbes dépendent de $(\mu > \mu_0)\ \mu$ paramètres. Si l'on prend $\varphi < \frac{n(n+3)}{2}$ points f arbitraires, ils déterminent, lorsqu'ils sont sur une C_n irréductible, une série linéaire de C_n à $\frac{n(n+3)}{2} - \varphi$ paramètres : l'intersection de deux de ces C_n donne une base B *normale* pour les $C_{2n+\nu}$ qui la contiennent. Parmi ces $C_{2n+\nu}$ désignons par $\Gamma_{2n+\nu}$ celles qui renferment au moins une telle base B *et n'en renferment pas une infinité;* ces $\Gamma_{2n+\nu}$ peuvent être engendrées projectivement. S'il y a μ courbes $C_{2n+\nu}$ linéairement indépendantes passant par les f, la dimension correspondante des $\Gamma_{2n+\nu}$ est $\mu - (\varphi - 3n + 2)$: d'où le théorème pour

$$\varphi = 3n - 2.$$

L'auteur étudie ensuite les $\Gamma_{2n+\nu}$ qui résultent de l'intersection de deux faisceaux projectifs (C_n), $(C_{n+\nu})$ qui ont δ points-bases en commun

$$\left[\delta < \frac{n(n+3)}{2} \quad \text{et} \quad n > 2\right];$$

ces points seront doubles pour les $\Gamma_{2n+\nu}$. Pour qu'une $C_{2n+\nu}$ avec δ points doubles admette la génération projective, il faut $\delta \leqq 3n - 2$. Exemples variés.

Rados (*G.*). — Sur la théorie des substitutions adjointes. (417-424).

Si, à la matrice

$$\| C_{\alpha\beta} \| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n),$$

on fait correspondre la substitution linéaire (s)

$$y_\alpha = c_{\alpha 1} x_1 + \ldots + c_{\alpha n} x_n \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

à la matrice formée des sous-déterminants du degré m de la précédente correspond de même une substitution linéaire à μ variables $(\mu = \Gamma_m^n)$ que nous désignerons par (S). M. Rados montre que *les racines de l'équation caractéristique relative à* (S) *sont les produits* m *à* m *des* n *racines de l'équation caractéristique relative à* (s).

Il applique cet élégant résultat à la formation de la résolvante dont dépend le produit de m racines d'une équation quelconque et à la démonstration de la relation

$$\Delta = \delta^{\Gamma_{m-1}^{n-1}}$$

entre le déterminant Δ de (S) et celui δ de (s). (Franke, *J. Crelle*, t. 61.)

Killing (*W.*). — Sur les nombres transfinis. (425-432).

Weber (*H.*). — Sur les groupes de nombres dans les corps algébriques. (434-473).

Introduction à une étude approfondie de certains corps algébriques dont l'auteur donnera plus tard les conclusions.

Les résultats actuels se rapportent à un corps quadratique imaginaire, bien qu'il soit probable qu'on puisse les étendre. D'un tel corps quadratique se laisse déduire une chaîne de corps supérieurs qui correspondent à certains groupes de nombres de ce corps. Le premier d'entre eux est le *corps des classes* (multiplication complexe des fonctions elliptiques), dont le groupe de Galois est isomorphe au groupe des classes d'idéaux dans le corps quadratique ; à celui-là se rattachent ceux qui correspondent de même aux groupes des classes d'idéaux dans les différents *ordres* du corps quadratique : les *corps d'ordre*. Ce sont des corps abéliens relatifs vis-à-vis du corps donné. Chacun d'eux conduit à une suite indéfinie de corps plus élevés, les *corps de division,* qui s'offrent dans la division des fonctions elliptiques avec module singulier. Le diviseur, *module* du corps, peut être un idéal quelconque du corps quadratique. Les considérations actuelles de l'auteur sont nécessaires pour fixer la génération et les connexions de ces corps entre eux : il signale dès maintenant la définition générale des *genres*.

La première question qu'il abordera ensuite est la détermination du *degré* de ces corps (irréductibilité de l'équation de définition). A cette détermination est liée la démonstration d'un théorème important relatif à l'existence dans un idéal d'une infinité d'idéaux premiers, analogue au théorème connu de Dirichlet sur les nombres premiers dans une progression arithmétique.

Le degré relatif d'un *corps d'ordre,* par rapport à un corps formé de racines de l'unité, est égal au nombre des classes d'idéaux contenus dans le genre principal ; d'où le résultat de Dirichlet, que toute forme quadratique représente une infinité de nombres premiers (contenus aussi dans une certaine forme linéaire).

Ici, le degré relatif d'un *corps de division* vis-à-vis du *corps d'ordre* dont on part, qui a un module m réel ou idéal, est égal au nombre des nombres premiers avec m et incongrus suivant le module m divisé par le nombre des unités du corps incongrues selon le module m (ce nombre = 2, 4, 6).

Si l'on partage les idéaux du corps quadratique en classes, de telle sorte que deux idéaux sont de même classe quand leur quotient est congru à une unité (mod m), chacune de ces classes contient une infinité d'idéaux premiers.

Ces résultats ont conduit l'auteur à une étude du *nombre fondamental* et de l'*idéal fondamental* du *corps des classes* et lui ont permis d'établir que, comme Kronecker l'avait annoncé, l'*idéal fondamental partiel* du *corps des classes* vis-à-vis du corps quadratique donné est égal à 1.

Groupes abéliens. Groupes de puissances. Groupes de nombres et groupes d'idéaux dans un corps. Ordres normaux. Ordres dans les corps quadratiques. Genres dans les ordres. Les nombres premiers caractéristiques.

Vivanti (G.). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes. (474-513).

Essai d'extension aux équations à trois variables des méthodes d'intégration de Monge et d'Ampère :

Forme générale des équations qui admettent une intégrale intermédiaire contenant une fonction arbitraire de deux arguments. La recherche d'une intégrale intermédiaire se ramène à l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales non linéaires. Conditions pour que ce système se réduise à un

système linéaire; effectuer la réduction. Propriétés du système d'équations linéaires aux dérivées partielles correspondant. Examen des cas singuliers. Transformations de Legendre et d'Ampère. Exemples.

Réthy (M.). — Sur le principe de la moindre action et le principe d'Hamilton. (514-547).

On pensait jusqu'à 1887 que le principe de la moindre action n'était applicable que lorsque la force vive du système se conservait. Le dernier travail fait dans cette hypothèse, celui de M. A. Mayer (*Sächsische Berichte*, 1886) motiva de v. Helmholtz l'observation que ce principe demeurait valable quand le potentiel des forces, appliquées à un système de points dont les liaisons sont indépendantes du temps, dépendait explicitement du temps (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, 1887), bien que la conservation de la force n'eût plus lieu.

L'auteur, trouvant les considérations de v. Helmholtz insuffisantes, a repris complètement la question. Voici ses conclusions :

Supposons que l'on ait intégré les équations de Lagrange pour le mouvement d'un système de points sur lesquels agissent d'autres points *extérieurs* dont les coordonnées q_k sont des fonctions données du temps t : les coordonnées *intérieures* q_i sont alors des fonctions numériquement connues des éléments initiaux (positions des points et vitesses) et du temps; l'énergie F est alors une fonction du temps t, et inversement t est une certaine fonction $z(\mathrm{F})$.

Si nous introduisons cette fonction $z(\mathrm{F})$ au lieu de t, on aura les expressions des coordonnées extérieures q_k au moyen de F; en conservant alors les expressions des coordonnées intérieures, on peut transformer le potentiel U et l'exprimer au moyen des coordonnées intérieures et de F; soit $\overline{\mathrm{U}}$ cette nouvelle expression. On en déduit

$$\overline{f} = \mathrm{T} - \overline{\mathrm{U}}$$

et la nouvelle forme de l'équation de conservation

$$\mathrm{F} = \mathrm{T} - \overline{\mathrm{U}},$$

exprimée au moyen des q_i, q'_i et de F, forme qui n'est valable que pour les éléments initiaux donnés.

Supposons maintenant qu'*on se donne les fonctions* $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{f}$ *et les éléments initiaux*, le principe de la moindre action pourra s'énoncer sous la forme suivante, très voisine de celle de v. Helmholtz :

Si la variation de l'action s'annule pour un temps variable quand on passe d'une position initiale fixe à une position finale fixe;

Si, dans l'équation de condition $\mathrm{F} = \mathrm{T} - \overline{\mathrm{U}}$ valable pour le mouvement donné et pour le mouvement varié, l'énergie variable F prend la même succession de valeurs;

Si les vitesses initiales sont les mêmes que celles employées par le calcul de $\overline{f}$ et si la valeur initiale de l'énergie F est unique et fixe :

Les solutions q_i, q'_i exprimées au moyen de t satisfont aux équations de Lagrange et aux conditions initiales indiquées.

L'auteur examine ensuite le cas où l'énergie du système est représentée par

la même fonction du temps dans le mouvement considéré et dans le mouvement varié : il montre qu'alors la variation de l'action, pour un temps variable et des positions extrêmes fixes, est encore nulle pour le mouvement naturel mais elle est nulle pour une infinité d'autres mouvements.

Il est nécessaire d'ajouter de nouvelles conditions pour éliminer ces mouvements et, par suite, le principe de la moindre action est susceptible de divers énoncés. M. Réthy en indique quatre, qu'il étudie en détail.

Dedekind (*R.*). — Sur les groupes dont tous les diviseurs sont des diviseurs normaux. (548-561).

L'auteur appelle *diviseur normal* d'un groupe un sous-groupe invariant quelconque. Il s'agit donc de rechercher en dehors des groupes *abéliens*, dont les éléments sont deux à deux permutables et dont la structure est suffisamment connue, tous les groupes qui n'admettent que des sous-groupes invariants. M. Dedekind les nomme *groupes d'Hamilton*. Le plus simple d'entre eux est en effet le groupe Q du huitième degré qui renferme six éléments du quatrième degré et que, en raison de son lien avec la théorie des quaternions, on peut appeler groupe des *Quaternions*. M. Dedekind montre que le groupe d'Hamilton le plus général R est de la forme PQ où P est le groupe abélien de R, formé par tous les éléments permutables avec tous ceux de R; P est en outre assujetti à ne renfermer aucun élément du quatrième degré et à renfermer celui du second degré qui figure dans Q.

Klein (*F.*). — Leçons autographiées, III. (562-588). [Chapitres choisis de Théorie des nombres; leçons de deux heures de l'année 1896].

M. Klein s'est proposé de mettre en évidence le parti que l'on peut tirer, pour une exposition simple et claire de la théorie des formes quadratiques et des domaines elliptiques singuliers, d'une représentation géométrique.

L'ensemble des points du plan à coordonnées entières (x, y) forme un système auquel on peut appliquer les transformations linéaires à coefficients entiers

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y \\ y' &= \gamma x - \delta y \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1;$$

il donne sans difficulté la représentation des fractions continues et aussi, *dès qu'on a choisi comme distance de deux points x, y; x', y', l'expression*

$$\sqrt{f(x - x', y - y')},$$

la théorie de la réduction de la forme indéfinie $f(x, y)$. M. Klein étudie ensuite la position des formes réduites dans l'ensemble de toutes les formes à l'aide d'une autre représentation géométrique déjà employée par M. Hurwitz (*M. A.*, t. XLIV).

Le passage aux fonctions elliptiques de périodes ω_1, ω_2 s'obtient en prenant, pour $f(x, y)$, la norme de $(\omega_1 x + \omega_2 y)$, x, y étant alors des coordonnées du plan complexe $x + iy$, et ce rapprochement des deux théories conduit à de nouveaux développements.

La seconde Partie des Leçons est consacrée aux transformations linéaires

d'ordre supérieur ($\alpha\delta - \beta\gamma = n$). La représentation adoptée conduit l'auteur à la classification des formes quadratiques et ensuite à une représentation des idéaux d'un corps quadratique (voisine de celle adoptée par M. Poincaré), qui constitue le point de départ arithmétique de l'étude des domaines elliptiques singuliers. Cette étude est faite suivant la voie adoptée par M. Weber, mais présentée de façon plus intuitive.

M. Klein termine par l'examen détaillé de l'irrationnalité attachée à l'icosaèdre, $n \not\equiv 0 \pmod 5$.

Müller (*E.*). — Sur le produit mixte. (589-594).

Étude des transformations du produit mixte [ABC] des grandeurs extensives et en particulier des cas, au nombre de 8, où le produit [A.BC] se laisse exprimer par [ABC] et [ACB].

Franel (*J.*). — Sur une formule fondamentale de Kronecker. (595-602).

Démonstration nouvelle d'une formule de Kronecker qui relie la multiplication complexe des fonctions elliptiques et la théorie des formes binaires quadratiques :

Si la forme à coefficients complexes

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad (x, y \text{ réels})$$

est positive, et si D désigne son discriminant, la fonction

$$F(s) = \Sigma' e^{s \log(am^2 + 2bmn + cn^2)},$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières de m et n ($m = 0$, $n = 0$ excepté) est uniforme en s dans tout le plan complexe, où elle admet le seul pôle simple $s = 1$. On a, au voisinage de ce point,

$$F(s) = \frac{\pi}{\sqrt{D}} \frac{1}{s-1} + A_0 + A_1(s-1) + \ldots.$$

La formule de Kronecker donne l'expression de A_0 :

$$A_0 = \frac{\pi}{\sqrt{D}} \left[\log c - \log 4 - 2 \log \sqrt{D} - 2\Gamma'(1) - 2 \log \eta_1(\omega)\, \eta_1'(\omega) \right],$$

c désigne la constante d'Euler $-\Gamma'(1)$ et

$$\eta_1(\omega) = e^{\frac{i\pi\omega}{12}} \prod_{n}^{\infty} (1 - e^{2ni\pi\omega}).$$

Krause (*M.*). — Gustav-Ferdinand Mehler. (602-616). [Notice nécrologique.]

Simon (*M.*). — Deux théorèmes de géométrie non euclidienne. (607).

Tome XLIX, 1897.

Enriques (*F.*). — Sur les irrationnelles dont peut dépendre la résolution d'une équation algébrique $f(x, y, z) = 0$ à l'aide de fonctions rationnelles de deux paramètres. (1-23).

Toutes les équations $f(x, y, z) = 0$ d'une même *classe de Riemann*, c'est-à-dire transformables birationnellement entre elles, se partagent en *sous-classes* lorsqu'on place dans une même sous-classe deux équations qui dérivent l'une de l'autre par une transformation birationnelle *à coefficients rationnels*.

A l'égard de la classe la plus simple, *pour laquelle x, y, z peuvent être pris rationnels en u et v, ces deux paramètres étant eux-mêmes rationnels en x, y, z*, M. Enriques s'est proposé, par la voie géométrique, la recherche des irrationnelles dont peuvent dépendre ces fonctions rationnelles $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Il arrive aux conclusions suivantes :

Pour une surface algébrique $f(x, y, z) = 0$, dont les trois genres sont nuls (genre géométrique, genre numérique, bigenre), ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour la résolubilité par des fonctions rationnelles *réversibles* de deux paramètres, la détermination de ces fonctions rationnelles x, y, z peut dépendre, en dehors des opérations rationnelles, de l'*extraction de racines carrées et cubiques*, et de la résolution d'une des *équations pour la bissection des arguments :*

(a) des *fonctions abéliennes de genre* 3;
(b) ou des *fonctions abéliennes de genre* 4 ;
(c) ou des *fonctions hyperelliptiques de genre* p ($p = 1, 2, 3, \ldots$).

La méthode suivie conduit à distinguer ces équations $f(x, y, z) = 0$ en quatre *familles :* la première, qui comprend deux types de sous-classes analogues à celle des équations de genre zéro à deux variables, se résout sûrement à l'aide d'une extraction de racine carrée; la seconde, qui donne lieu à plusieurs types de sous-classes, exige pour sa résolution la bissection de l'argument pour les fonctions abéliennes de genre 3, ou une racine carrée et une racine cubique; la troisième et la quatrième donnent lieu à deux types de sous-classes et leur résolution exige les opérations (b) et (c) énoncées plus haut.

Les équations de la seconde famille peuvent en outre se résoudre par des fonctions rationnelles *non réversibles,* à l'aide de racines carrées et cubiques.

La dernière partie est consacrée à l'application de ces résultats à l'équation à quatre variables

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 : \tag{1}$$

(a) Si l'équation $f(x_1, x_2, x_3, a) = 0$, obtenue en faisant $x_4 = a =$ const., est résoluble à l'aide de fonctions rationnelles, l'équation (1) peut toujours se résoudre en prenant pour x_1, x_2, x_3, x_4 des fonctions rationnelles de trois paramètres, qu'on peut construire par des extractions de racines carrées et cubiques.

(*b*) Si toutes les équations

$$f(x_1, x_2, x_3, ax_3 + b) = 0$$

sont résolubles à l'aide de fonctions rationnelles de deux paramètres, on peut prendre pour x_1, x_2, x_3, x_4 des fonctions rationnelles de u, v, w et d'un radical carré qui porte sur un polynome (particulier) en u, v, w.

(*c*) Si toutes les équations

$$f(x_1, x_2, x_3, ax_2 + bx_3 + c) = 0$$

sont résolubles par des fonctions rationnelles de deux paramètres, on peut prendre pour tous les x_i des fonctions rationnelles de trois paramètres (non réversibles).

Dans chacun de ces cas, on obtient des simplifications quand l'équation modifiée à trois variables appartient à l'une des familles caractérisées plus haut. *On n'exclut pas d'ailleurs la possibilité de résolutions plus simples.*

Bouwman (*W.*). — Les nombres de Plücker de la *courbe de déviation*. (24-38).

M. Bouwman appelle ainsi *le lieu des centres des coniques qui passent par cinq points infiniment voisins sur une courbe* C_n : de même que ces *coniques de déviation* généralisent la notion du cercle osculateur, le lieu de leurs centres généralise la notion de développée. L'auteur, qui s'est proposé la détermination des singularités plückériennes de la courbe de déviation Δ, connaissant celles de C_n, parvient aux conclusions suivantes :

n, m, g, k, b étant l'ordre, la classe, le genre, le nombre des rebroussements et celui des inflexions de C_n, N, M, G, K, B les nombres correspondants pour Δ, on a

$$G = g,$$
$$K = 2(m + 3n + 10g - 10) - (\beta + \rho + 2\varkappa - 3\beta' + 3\varkappa'),$$
$$B = 2(m + g - 1) - (\beta + 2\rho + 2\varkappa + 3\beta' + 3\varkappa'),$$
$$N = 2(m + 2n + 6g - 6) - (\beta + 2k + 3\beta' + 3\varkappa'),$$
$$M = 2(m + 2n + 3g - 3) - (\beta + \rho + 2\varkappa + 3\beta' + 3\varkappa'),$$

en supposant β inflexions et $\varkappa$ rebroussements sur la droite de l'infini, pour lesquels cette droite de l'infini n'est pas tangente, β' inflexions, $\varkappa'$ rebroussements et ρ autres points sur la droite de l'infini où elle est tangente à la courbe C_n.

Hoyer (*P.*). — Applications de la théorie de la *connexion dans les suites* à la théorie des groupes de substitutions. (39-48).

Si l'on choisit dans un groupe G les substitutions s_1, ... s_k, de telle sorte qu'aucune d'entre elles ne soit identique à une puissance de l'une des autres, et que, d'autre part, toute substitution du groupe soit une puissance de l'une d'elles, elles forment une *base* du groupe. Si on les décompose en substitutions circulaires, la suite des lettres de ces k substitutions s'appelle *suite-base*. Soit c_α l'excès de la substitution s_α (n diminué du nombre des substitutions circulaires

de s_α, y compris la substitution identique); le nombre

$$g = \Sigma e_\alpha - (n - 1)$$

s'appelle le *degré de la connexion* de la suite-base. M. Hoyer montre ici qu'on peut conclure de la seule valeur de ce degré, quand il est au plus égal à 6, des indications très précises sur G, et même la détermination du groupe *transitif* G.

Si $g = 0$, le groupe est formé des puissances d'une substitution.

Si $g > 0$, G contient au moins trois substitutions.

Si $g > 0$ pour un groupe *transitif*, g est égal au *degré* du groupe. [Une seule exception, le groupe dont la suite-base est

$$1, \quad (x_1 x_2)(x_3 x_4), \quad (x_1 x_3)(x_2 x_4), \quad (x_1 x_4)(x_2 x_3)$$

pour lequel $g = 3$.]

Hirsch (A.). — Sur une propriété caractéristique des équations différentielles du calcul des variations. (50-72).

Quelles sont les propriétés caractéristiques d'une équation différentielle

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

qui correspond à un problème de calcul des variations?

Jacobi a montré que la détermination de la fonction y, qui rend maximum ou minimum l'intégrale simple

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx,$$

où x_0, x_1 sont invariables, exige l'intégration de l'équation différentielle d'ordre $2n$

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) = V(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) = 0;$$

il a remarqué en outre que l'équation linéaire d'ordre $2n$ en u

$$\delta F = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\partial F}{\partial y_k} u^{(k)} = 0$$

est *identique à son adjointe*. M. Hirsch établit que *cette dernière condition est suffisante pour qu'on puisse trouver par quadratures une fonction f d'ordre n, c'est-à-dire un problème de variation correspondant à l'équation* F = 0. On sait que, pour les équations d'ordre impair

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(2n+1)}) = 0,$$

le résultat est tout différent. Si

$$\delta F = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\partial F}{\partial y_k} u^{(k)}$$

est identique à l'adjointe *changée de signe*, la fonction F est linéaire par rapport à y et à ses dérivées.

L'auteur cherche à étendre ces résultats aux problèmes de variations des intégrales multiples et aux équations aux dérivées partielles correspondantes. L'extension présente des difficultés quand le nombre des variables indépendantes dépasse 3. Pour $n = 2, 3$, lorsqu'une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$F = 0$$

est telle que l'équation linéaire du même ordre

$$\delta F = \sum \frac{\partial F}{\partial y_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} u_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = 0$$

soit identique à son adjointe, on peut déterminer par quadratures une fonction f du second ordre telle que l'on ait

$$F = V(f) = \sum (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \frac{d^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{dx_1^{\alpha_1} \ldots dx_n^{\alpha_n}} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} \right).$$

L'équation $F = 0$ est alors celle à laquelle conduit l'étude de la variation de l'intégrale multiple

$$J = \int_n f \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n.$$

Baur (*L.*). — Sur le lien qui existe entre la *base normale* de Dedekind-Weber et le *système fondamental absolu* de Hensel. (73-82).

Soit θ une fonction algébrique de la variable indépendante x, définie par l'équation irréductible

$$a_1 \theta^n + a_1 \theta^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

où les coefficients sont des polynomes en x sans diviseur commun; l'ensemble des fonctions rationnelles de θ et x forme un *corps algébrique* Ω de degré n, et l'ensemble des fonctions de Ω entières en x $\left(\text{ou en } \bar{x} = \frac{1}{x}\right)$ forme le système O (ou le système $\overline{\text{O}}$).

Si y désigne une fonction quelconque du système O, on appelle *exposant* de y le plus petit nombre r pour lequel $\frac{y}{x^r}$ est contenu dans $\overline{\text{O}}$. On détermine ce nombre en posant $\bar{y} = \frac{y}{x^r}$ dans l'équation qui définit y, et exprimant, après division par le coefficient de la plus haute puissance de $\bar{y}$, que tous les coefficients sont entiers en $\bar{x}$.

Quand les fonctions $\omega_1, \ldots, \omega_n$, dont les exposants sont $r_1, \ldots, r_n$, forment une base pour $\text{O}\,(\omega_1 = 1)$, les fonctions $\bar{\omega}_i = \omega_i \bar{x}^{r_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ne forment pas toujours une base pour $\overline{\text{O}}$; mais, si cela a lieu, elles forment une *base normale*, et il en est de même de $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Posons maintenant

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad \tau_1 = y x_2^r,$$

on trouve sans difficulté que τ_1 est de *dimension* r par rapport aux variables homogènes x_1, x_2 ; l'équation transformée qui définit τ_1 peut être regardée comme définissant le corps Ω, et il suffira de faire, dans un système fondamental $\tau_{11}, \ldots, \tau_{1n}$ de M. Hensel, la substitution $x_1 = x$, $x_2 = 1$ pour en déduire une base normale $\omega_1, \ldots, \omega_n$ pour O.

M. Baur montre en outre qu'on peut déduire de là sans difficulté les éléments des intégrales de première espèce, sous la forme donnée par Riemann.

Weber (*H.*). — Sur les groupes de nombres dans les corps algébriques. (83-100).

M. Weber donne ici une partie des résultats indiqués dans l'Introduction de la première Partie de ce travail (*M. A.*, t. XLVIII) et que nous avons résumés.

Idéaux premiers du premier degré dans les classes d'idéaux. Groupes harmoniques spéciaux. Le corps des classes.

Heffter (*L.*). — Sur les systèmes de ternes (101-112).

Le problème des systèmes de ternes consiste à caractériser les nombres n d'éléments qu'on peut grouper 3 à 3, de façon que deux éléments quelconques figurent dans un terne et dans un seul, et à former les ternes correspondants. On sait que n doit être de l'une des formes $6m+1$ ou $6m+3$ et que le nombre des ternes d'un système est $\frac{n(n-1)}{6}$.

M. Netto a montré, en particulier, comment une disposition cyclique des ternes est possible quand n est un nombre premier de la forme $6m+1$, ou encore quand $n = 6m+3$ est le triple d'un nombre premier $6k+5$. M. Moore a établi ensuite que pour tout nombre $6m+1$ ou $6m+3$ il existe des systèmes de ternes.

Dans un travail antérieur (*M. A.*, t. XXXVIII, 1891), l'auteur avait signalé les rapports du problème précédent avec celui des *domaines voisins :* sur une surface de genre assez grand, on appelle *points voisins* un ensemble de n points tels que chacun d'eux puisse être joint aux autres par une ligne continue sans que ces $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes se croisent; dans certains cas, la surface est partagée en $\frac{n(n-1)}{3}$ triangles, et, si l'on attribue aux points les indices $0, 1, \ldots, n-1$, il arrive que l'on puisse couvrir de hachures la moitié des triangles, de façon que toute ligne sépare un triangle blanc d'un triangle couvert de hachures; les triangles blancs (et aussi les autres) donnent alors un système de ternes pour le nombre n.

Il applique les résultats de ce travail à la construction des systèmes de ternes et à leur disposition en *cycles :* de $\frac{n-1}{6}$ ternes on déduit les autres par permutation circulaire des n éléments. Ces problèmes sont résolus pour les cas nouveaux : $n = 12k+7$ où $4k+3$ est un nombre premier, avec la racine primitive 2; $n = 6m+3 = 3p$ où p est premier, et pour tous les nombres $6m+1$, $6m+3$ inférieurs à 100.

Bochert (*A.*). — Sur le nombre des valeurs différentes que prend une fonction de *n* lettres pour toutes les permutations de ces lettres. (112-132).

Continuation de recherches antérieures (*M. A.*, t. XXX et XL) sur le même sujet. Citons comme exemple des résultats obtenus le théorème suivant :

Si une fonction de n lettres change de valeur par toute substitution de moins de $u_0 + 3(2^h - 1)$ *de ces lettres, différente de la substitution identique* [u_0 *et h étant des entiers quelconques : l'un inférieur à n, l'autre positif*], *le nombre* ν *des valeurs qu'elle prend pour toutes les substitutions de n lettres satisfait aux relations*

$$\nu \geq u_0!\left(\left[\frac{n-u_0}{h+1}\right]!\right)^h,$$

$$\nu^{h+1} \geq (u_0!)^{h+1}\left(\left[\frac{n-u_0}{2}\right]!\right)^2\left(\left[\frac{n-u_0}{3}\right]!\right)^3\cdots\left(\left[\frac{n-u_0}{h+1}\right]!\right)^{h+1},$$

où $[x]$ *désigne, selon la coutume, le plus grand entier inférieur ou égal à* x.

Bochert (*A.*). — Sur la classe des groupes transitifs de substitutions (132-144).

Suivant une méthode indiquée dans un travail antérieur (*M. A.*, t. XL) l'auteur cherche à reculer la limite inférieure de la *classe* des groupes simplement ou doublement transitifs qui ne contiennent pas le groupe alterné de leur degré :

Si un groupe plusieurs fois transitif de n lettres ne renferme pas le groupe alterné de son degré, chaque substitution de ce groupe altère non seulement plus de trois, mais plus de $\sqrt{n}$ *et plus de* $\frac{n}{3} - \sqrt{n}$ *lettres* $\left(\frac{n}{6}\right.$ est compris entre ces deux limites$\left.\right)$.

Stäckel (*P.*). — Sur l'intégration de l'équation d'Hamilton par séparation des variables. (145-147).

L'auteur montre que les conclusions auxquelles il est parvenu (*M. A.*, t. XXXV) dans la recherche des cas où l'équation à deux variables

$$E\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + 2F\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} + G\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - 2(\pi + \alpha) = 0$$

s'intègre par séparation des variables, subsistent dans le domaine des variables complexes.

Netto (*E.*). — Une formule arithmétique. (148).

Elle donne le nombre $N(\lambda, \lambda')$ des systèmes de coniques linéairement indépendants avec caractéristiques λ, λ'.

2e Partie -

Stäckel (*P.*) et *Engel* (*Fr.*). — Gauss, les deux Bolyai et la Géométrie non euclidienne. (149-206).

Quels sont les rapports des recherches des deux Bolyai avec celles de Gauss? Les auteurs donnent ici, pour répondre à cette intéressante question, la partie mathématique des lettres échangées entre Gauss et les Bolyai, et aussi la *Théorie des parallèles* de Wolfgang Bolyai, jointe à la lettre du 16 septembre 1804 (texte latin et traduction).

Le *Bulletin* a donné la traduction française de leur travail.

Cantor (*G.*). — Contributions à la constitution d'une théorie des ensembles transfinis (2e article). (208-246).

Voir *Bulletin*, t. XXIX, 2e série, p. 83_2, l'analyse du premier article.

Les ensembles *bien ordonnés* F sont ceux dont les éléments f se suivent dans un ordre déterminé à partir d'un premier élément f_1, de telle sorte que :

I. Il y ait dans F un premier élément f_1.

II. Si F′ est une partie de F et si F possède un ou plusieurs éléments de rang supérieur à ceux de F′, il existe un élément f' de F qui suit *immédiatement* l'ensemble F′.

Toute partie F_1 d'un ensemble bien ordonné a un premier élément.

Si un ensemble simplement ordonné F possède, ainsi que chacune de ses parties, un premier élément, il est *bien ordonné*.

Chaque partie d'un ensemble bien ordonné est un ensemble bien ordonné.

Si dans un ensemble bien ordonné on remplace deux éléments g et g' par des ensembles bien ordonnés G et G′, le nouvel ensemble est bien ordonné.

Si f est un élément de F autre que le premier f_1, l'ensemble des éléments de F qui précèdent f constitue une *section* de F, définie par f; l'ensemble des autres (f compris) constitue le *reste* défini par f.

Un ensemble bien ordonné F n'est semblable à aucune de ses *sections*, mais il y a toujours, si F est infini, des *parties* de F qui lui sont semblables.

Si F et G sont deux ensembles bien ordonnés quelconques, ou bien : 1° ils sont semblables, ou 2° une section B_1 de G est semblable à F, ou 3° une section A_1 de F est semblable à G. Chacun de ces cas exclut les autres.

Chaque ensemble bien ordonné a (on l'a vu antérieurement) un certain *type d'ordre,* auquel appartiennent tous les ensembles *semblables;* ce type d'ordre sera appelé son *nombre ordinal.*

Soient α et β les nombres ordinaux de F et de G, les trois possibilités rappelées plus haut s'écriront

$$\alpha = \beta, \qquad \alpha < \beta, \qquad \alpha > \beta.$$

Si l'on a, entre trois nombres ordinaux, les inégalités

$$\alpha < \beta, \qquad \beta < \gamma,$$

on a aussi

$$\alpha < \gamma.$$

Comme l'ensemble (F, G) est bien ordonné en même temps que F et G, son type d'ordre $\alpha + \beta$ est un nombre ordinal; α s'appelle l'*Augendus*, β l'*Addendus.* On a toujours $\alpha < \alpha + \beta$ puisque F est une section de (F, G), mais on a seulement $\beta \leq \alpha + \beta$.

Si $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, on a aussi $\beta = \gamma$.

En général, $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$, mais la loi associative subsiste :

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Si dans l'ensemble bien ordonné G de type β on remplace chaque élément g par un ensemble bien ordonné F_g de type α, on obtient un ensemble bien ordonné H de type $\alpha.\beta$; α est le *multiplicande*, β le *multiplicateur*.

En général, $\alpha.\beta \neq \beta.\alpha$, mais $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$. On a aussi

$$\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma.$$

Si $\beta > 1$, on a toujours $\alpha.\beta > \alpha$, mais on peut avoir $\alpha.\beta \geqq \beta$; si $\alpha.\beta = \alpha.\gamma$, on en déduit $\beta = \gamma$.

Lorsque α et β sont deux nombres ordinaux, $\alpha < \beta$, il existe toujours un nombre ordinal $\beta - \alpha$ qui vérifie l'équation

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

Les nombres ordinaux se laissent aussi ajouter en nombre infini, de telle sorte que la somme soit indépendante de l'ordre des parties : si l'on a une suite simplement infinie G_1, G_2, ..., G_ν, ... d'ensembles bien ordonnés, leur réunion donne un ensemble bien ordonné G dont le nombre ordinal β est

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu + \ldots.$$

En posant $\alpha_\nu = \beta_1 + \ldots + \beta_\nu$, les α_ν vont en croissant avec ν; ils dépassent tout nombre ordinal inférieur à β. Le nombre β suit donc *immédiatement* la suite des α_ν; on l'appellera *limite* de α_ν.

Les nombres ordinaux finis coïncident avec les nombres cardinaux finis; il n'en est pas de même pour les nombres ordinaux transfinis : à un même nombre cardinal a correspond une infinité de nombres ordinaux qui forment la *classe de nombres* $Z(a)$; c'est une partie de la *classe de types* $[a]$.

La première classe de nombres $\{\nu\}$ sera l'ensemble de tous les nombres ordinaux finis; la *seconde classe* $Z(\aleph_0)$ est l'ensemble $\{\alpha\}$ de tous les types d'ordre α des ensembles bien ordonnés de puissance $\aleph_0$: son premier nombre est

$$\omega = \lim.\nu.$$

Les nombres de la seconde classe sont de deux sortes : les uns suivent *immédiatement* un nombre de la classe (nombres de *première espèce*), les autres (de *seconde espèce*) sont *la limite d'une suite croissante* de nombres de la classe :

$$\alpha = \lim.\alpha_\nu,$$

avec la seule condition $\alpha_{\nu+1}$ suivant α_ν.

L'ensemble des nombres de la seconde classe $\{\alpha\}$ forme un ensemble bien ordonné, dont la *puissance* (nombre cardinal) est le second nombre transfini $\aleph_1$. Tout ensemble infini de nombres de la seconde classe a la puissance $\aleph_0$ ou la puissance $\aleph_1$.

M. Cantor entre ensuite dans une étude approfondie des règles de calcul des nombres ordinaux de la seconde classe, que nous résumerons très rapidement :

Les nombres qui se présentent d'abord sont des polynomes entiers en ω : ils

peuvent se mettre d'une seule manière sous la forme

$$\varphi = \omega^{\mu}\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \nu_{\mu},$$

où $\nu_1, \ldots, \nu_{\mu}$ peuvent être nuls. On peut aussi, d'une seule manière, mettre φ sous la forme d'un produit

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau} + 1)\varkappa_{\tau-1}\ldots(\omega^{\mu_0-\mu_1} + 1)\varkappa_0,$$

dont les facteurs $\omega^{\lambda} + 1$ sont indécomposables. Si $\mu_\tau = 0$, φ est de première espèce, sinon il est de seconde espèce.

Il existe une fonction uniforme et déterminée de la variable ξ qui satisfait aux conditions suivantes :

1° $f(0) = 1$;

2° La fonction est constamment croissante;

3° On a $f(\xi + 1) = f(\xi)\gamma$, où $\gamma > 1$ est quelconque;

4° Si $\{\xi_\gamma\}$ est une suite croissante, dont ξ est la limite, il en est de même de $\{f(\xi_\gamma)\}$ qui a pour limite $f(\xi)$.

Cette fonction sera représentée par γ^{ξ}; elle suit les lois habituelles de l'exponentielle

$$\left.\begin{aligned}\gamma^{\alpha+\beta} &= \gamma^{\alpha}\cdot\gamma^{\beta}\\ \gamma^{\alpha\beta} &= (\gamma^{\alpha})^{\beta}\end{aligned}\right\}\ \alpha, \beta \geqq 0,$$

et l'on a toujours, pour $\gamma > 1$,

$$\gamma^{\xi} \geqq \xi.$$

Tout nombre de la seconde classe se laisse mettre d'une seule manière sous la *forme normale*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \ldots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau,$$

où les α_i sont des nombres *de la première ou de la seconde classe :*

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_\tau \geqq 0,$$

pendant que les $\varkappa_i$ sont des nombres non nuls de la première classe.

Le nombre α_0 est le *degré*, α_τ l'*exposant* de α.

Suivant que α_τ est égal ou supérieur à zéro, α est de la première ou de la seconde *espèce*.

Le nombre α peut aussi s'écrire, et d'une seule façon, sous forme de produit

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\varkappa_\tau(\omega^{\gamma_1} + 1)\varkappa_{\tau-1}\ldots(\omega^{\gamma_\tau} + 1)\varkappa_0$$

avec

$$\gamma_0 = \alpha_\tau, \qquad \gamma_1 = \alpha_{\tau-1} - \alpha_\tau, \qquad \ldots, \qquad \gamma_\tau = \alpha_0 - \alpha_1.$$

Pour que l'on ait $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, il est nécessaire et suffisant que

$$\alpha = \gamma\mu, \qquad \beta = \gamma\nu,$$

μ, ν étant de la première classe.

Pour que l'on ait $\alpha\beta = \beta\alpha$, il est nécessaire et suffisant que

$$\alpha = \gamma^{\mu}, \qquad \beta = \gamma^{\nu},$$

où μ, ν sont de première classe.

Le degré α_0 d'un nombre α n'est jamais plus grand que α; il y a des nombres pour lesquels $\alpha_0 = \alpha$: ce sont évidemment les racines de l'équation

$$\omega^\xi = \xi;$$

M. Cantor les appelle *les nombres* ε.

La limite des nombres γ_i, tels que

$$\gamma_{i+1} = \omega^{\gamma_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu, \ldots),$$

$\gamma_0 = \gamma$ n'étant pas un ε, est un ε que l'on représente par $E(\gamma)$.

Le nombre $\varepsilon_0 = E(1) = \lim \omega_\nu$, où l'on a

$$\omega_{i+1} = \omega^{\omega_i} \qquad (i = 1, \ldots, \nu, \ldots),$$

est le plus petit de tous les ε; après cela vient le nombre $E(\varepsilon_0 + 1)$ que l'on désignera par ε_1, puis $E(\varepsilon_1 + 1)$, etc. L'ensemble des ε est bien ordonné, son type est le type Ω de l'ensemble des nombres de seconde classe, et sa puissance est, par suite, $\aleph_1$.

Ces nombres ε possèdent des propriétés *singulières :* si $\alpha < \varepsilon$, on a

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \qquad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \qquad \alpha^\varepsilon = \varepsilon,$$

et les racines de l'équation $\alpha^\varepsilon = \varepsilon$ sont tous les ε supérieurs à α.

Basset (*A.-B.*). — Une théorie des actions magnétiques sur la lumière. (247-254).

Le but de ce travail est d'apporter une amélioration à la théorie proposée par M. Rowland et développée par M. Basset (*Phil. Trans.*, 1891, et *Physical Optics,* Ch. XX), théorie qui expliquait en particulier les expériences de Kerr et Kundt sur la réflexion de la lumière par les corps magnétiques. La théorie exigeait la *discontinuité de la composante tangentielle de la force électromotrice à la surface de séparation de deux milieux;* M. Basset parvient à écarter cette hypothèse gênante, et modifie les équations de Maxwell en regardant une partie de l'énergie due au champ magnétique comme *statique* au lieu de la regarder tout entière comme *cinétique*.

Stäckel (*P.*). — Déformations et systèmes conjugués. (255-310).

Soient $S_1(x_1, y_1, z_1)$, $S_2(x_2, y_2, z_2)$ les points correspondants de deux surfaces qui ont même élément linéaire

$$ds_1^2 = ds_2^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2;$$

si l'on pose

$$d\xi_1 = P\frac{\partial x_1}{\partial p}\,dp + Q\frac{\partial x_1}{\partial q}\,dq,$$

$$d\xi_2 = P\frac{\partial x_2}{\partial p}\,dp + Q\frac{\partial x_2}{\partial q}\,dq,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

P et Q étant choisis de façon à satisfaire aux conditions d'intégralité, les points

$\Sigma_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $\Sigma_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ décrivent encore deux surfaces qui ont même élément linéaire

$$d\sigma_1^2 = d\sigma_2^2 = P^2 E\, dp^2 + 2PQF\, dp\, dq + Q^2 G\, dq^2.$$

Les conditions d'intégrabilité sont les six équations

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(P\frac{\partial\theta}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(Q\frac{\partial\theta}{\partial q}\right),$$

où θ est à remplacer par $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$: elles expriment simplement que les deux surfaces S_1, S_2 sont rapportées à leur système conjugué commun (p, q); les six coordonnées vérifient alors l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial q} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial q} = 0,$$

et P, Q seront déterminés par les deux équations linéaires

$$\frac{\partial P}{\partial q} + (P - Q)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial p} + (Q - P)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Cette proposition est due au géomètre russe K. Peterson, dont l'Ouvrage *Ueber Curven und Flächen* (Moscou, Leipzig, 1868) (premier fascicule seul paru) est passé presque inaperçu. M. Stäckel en indique de nombreuses applications particulières, et retrouve ainsi d'un même point de vue les résultats connus et quelques résultats nouveaux.

Si sur S_1 les lignes (p, q) sont géodésiques, elles sont encore conjuguées et géodésiques sur Σ_1.

Si les lignes $p =$ const., $q =$ const. sont les génératrices de la surface de translation S_1, elles le sont encore pour la surface, également de translation, Σ_1.

Conditions pour qu'un système conjugué (p, q) sur S_1 reste conjugué dans une déformation continue de cette surface : l'auteur retrouve les conditions données par M. Cosserat (*C. R.*, t. CXIII, 1891).

Déformations des hélicoïdes; application de la méthode de Peterson. Déformations des surfaces moulures. Cas simples où l'on sait intégrer le système en P, Q.

La correspondance entre S_1 et Σ_1 a été depuis étudiée souvent, en particulier par M. Guichard, sous le nom de *correspondance par réseaux parallèles*.

Ahrens (*W.*). — Sur le système d'équations qui définit la distribution d'un courant dans un conducteur linéaire. (311-324).

Kirchoff (*Poggendorff's Annal.*, t. LXXII, 1847) a donné complètement la loi de formation des intensités d'un courant qui passe dans un système de conducteurs linéaires, en faisant intervenir le postulat physique suivant : Il revient au même de supprimer un fil ou de regarder sa résistance comme infinie.

Comme le problème de la répartition des intensités est un problème *mathématique*, l'auteur s'est proposé d'en donner une solution purement mathématique. Elle exige une étude préalable de la connexion des systèmes de lignes :

points de croisement, cycles, ponts, etc., après laquelle l'auteur établit que les deux lois de Kirchoff donnent les équations linéaires nécessaires pour calculer les intensités et indique une règle pour ce calcul.

Pincherle (*S.*). — Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif. (325-382).

L'objet de ce Mémoire, écrit en langue française, est l'étude des opérations distributives qu'on peut appliquer aux fonctions analytiques, plus spécialement aux séries de puissances entières de la variable x et qui donnent comme résultat des séries de même nature. Ces opérations donnent lieu à un calcul qui offre assez d'analogie avec le calcul ordinaire des fonctions grâce à l'introduction du symbole D pour représenter la dérivation ordinaire : les expressions formelles en D auxquelles on est conduit (série de puissances de D, D^{-1}, etc.) sont, sous des restrictions convenables, aussi valables que les séries convergentes ordinaires.

M. Pincherle commence par les opérations distributives A dans un espace fonctionnel à un nombre fini de dimensions (système linéaire de fonctions à coefficients constants); l'étude des racines [solutions de $A(\alpha) = 0$] et des variétés invariantes [solutions de $A(\alpha) = k\alpha$, k constant] l'amène à retrouver simplement le concept des *diviseurs élémentaires* de Weierstrass.

Il passe ensuite aux propriétés générales des opérations distributives appliquées aux séries. Étude de quelques opérations simples : multiplication par une constante; dérivation

$$Dx^n = nx^{n-1}, \qquad D^{-1}x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

qui lui permet de définir F(D) (F polynome en D) et de considérer l'opération inverse F^{-1}; substitution $S_\alpha(x^n) = \alpha^n$.

La *dérivation fonctionnelle* de l'opération distributive A donne

$$A' = A(x\varphi) - xA(\varphi);$$

on peut obtenir le développement de $A(\varphi\psi)$ sous une forme analogue à la série de Taylor,

$$A(\varphi\psi) = A(\varphi)\psi + A'(\varphi)D\psi + \ldots + \frac{1}{n!}A^{(n)}(\varphi)D^n\psi + \ldots,$$

dont M. Pincherle étudie les conditions de validité.

Une opération fonctionnelle peut être déterminée par une équation symbolique. L'auteur détermine l'opération A qui vérifie

$$\lambda_0 A^{(n)} + \lambda_1 A^{(n-1)} + \ldots + \lambda_n A = 0,$$

où les λ sont des fonctions données.

Toute opération A peut, au moins formellement, être mise sous forme de série de puissances symboliques de D,

$$A(\varphi) = A(1)\varphi + A'(1)D(\varphi) + \ldots + \frac{1}{n!}A^{(n)}(1)D^n(\varphi) + \ldots;$$

si la série converge pour toute fonction φ, elle est dite de *première espèce*.

M. Pincherle étudie aussi les séries de seconde espèce et celles qui procèdent suivant les puissances de D^{-1}; il termine en indiquant l'expression de $D^s\varphi$ *pour s quelconque :*

$$D^s(\varphi) = e^x \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^n(e^{-x}\varphi)$$

et, en appliquant ses méthodes, à l'équation différentielle linéaire non homogène

$$F(\psi) = \varphi.$$

Kneser (*A.*). — Quelques théorèmes sur l'expression asymptotique des intégrales des équations différentielles linéaires. (383-399).

Si la fonction réelle $f(x)$ est finie et continue à partir de x assez grand, s'il en est de même pour sa dérivée $f'(x)$ et si $\lim f(x) = a^2$ pour x infini, on sait, d'après M. Poincaré, que chaque intégrale de

$$(1) \qquad y'' = y f(x)$$

vérifie

$$\lim \frac{y'}{y} = \pm a$$

pour x infini.

M. Kneser a démontré (*J. de Crelle*, t. 116) qu'il y a bien des intégrales pour lesquelles il faut prendre $-a$. Il prouve ici que, si $f(x) - a^2$ finit par avoir pour x assez grand un signe constant, les intégrales de (1) s'expriment sous une des formes

$$B e^{\pm ax}(1 + \varepsilon),$$

B constant, $\lim \varepsilon = 0$.

Si, en particulier,

$$f(x) = a^2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots,$$

où la série réelle est convergente pour x assez grand, il montre, en supposant $a_1 = 0$, que ε peut être *exprimé asymptotiquement* (au sens de M. Poincaré) par une série *divergente* de puissances de $\frac{1}{x}$.

Krazer (*A.*). — Sur la convergence des séries thêta. (400-416).

Ce travail contient en particulier des recherches de MM. Krazer et Prym sur la convergence des séries thêta, p-fois infinies, dont les points essentiels figurent dans le Livre des auteurs : *Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen*, Leipzig, 1892.

Conditions nécessaires et suffisantes de convergence. Si le terme général tend vers zéro quand l'une quelconque des lettres par rapport auxquelles on fait la sommation augmente indéfiniment en valeur absolue, la série est absolument convergente.

M. Krazer fait ensuite une étude critique de toutes les démonstrations connues de la convergence.

Sonin (*N.-J.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. (417-447). [Traduit du russe par Fr. Engel.]

Dans ce travail, paru en août 1874 dans le Tome VII du *Bulletin de la Société mathématique de Moscou*, l'auteur s'était proposé de former et d'étudier les équations aux dérivées partielles du premier ordre que doivent vérifier les premiers membres des équations d'ordre quelconque

$$\varphi = \text{const.},$$

dans le cas où elles ont, avec une équation donnée du second ordre, une infinité d'intégrales communes dépendant de constantes ou d'une fonction arbitraire, c'est-à-dire d'étudier les équations du second ordre auxquelles s'applique la méthode de M. Darboux (*Ann. de l'École Normale*, 1870).

Les résultats sont ceux qui peuvent se conclure immédiatement de ceux de M. Darboux; l'exposition seule présente quelques innovations.

Lœwy (*A.*). — Sur la théorie des substitutions linéaires, 2e Partie. (448-452).

Dans la première partie de ce travail (*M. A.*, t. XLVIII) l'auteur a établi en particulier que, *si deux substitutions linéaires* U_1 *et* U_2 *transforment en elle-même une forme quadratique* S *à déterminant non nul, elles peuvent être transformées l'une dans l'autre au moyen d'une substitution* R *qui possède la même propriété,* c'est-à-dire que l'on a

$$U_1 = R U_2 R^{-1}.$$

Il donne ici une nouvelle démonstration de cette proposition, valable à la fois pour les formes bilinéaires symétriques et pour les formes bilinéaires alternées.

M. Lœwy répond également à une question laissée en suspens par M. Taber (*M. A.*, t. XLVI) : conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution linéaire, qui n'altère pas une forme bilinéaire alternée à déterminant non nul, puisse être regardée comme le carré d'une substitution linéaire de même nature.

Horn (*J.*). — Utilisation des expressions asymptotiques pour la recherche des intégrales d'une certaine équation différentielle linéaire. (I, 453-472; II, 472-496).

L'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1x + b_1)\frac{dy}{dx} + (a_2x + b_2)y = 0$$

peut, quand l'équation

$$x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

a des racines distinctes, être ramenée à la forme

$$\text{(A)} \qquad xy'' + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2)y' - [x + i(\lambda_1 - \lambda_2)]y = 0.$$

Elle possède deux intégrales linéairement indépendantes

$$y_1 = G_1(x),$$
$$y_2 = x^{-\lambda_1-\lambda_2-1}G_2(x),$$

où les G désignent des fonctions transcendantes entières; l'auteur s'est proposé d'étudier ces fonctions dans le voisinage de $x = \infty$ au moyen des séries *divergentes*

$$s_1 = e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right),$$

$$s_2 = e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots\right),$$

dont les coefficients sont calculés de façon à satisfaire *formellement* à l'équation différentielle.

Le cas de l'équation qui définit les fonctions de Bessel

$$\frac{d^2J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J = 0$$

a déjà été étudié longuement (JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. II).

La première partie est consacrée à la recherche, pour les diverses valeurs de arg. x au voisinage de $x = \infty$, des expressions qui représentent *asymptotiquement* y_1 et y_2, au sens adopté par M. Poincaré. Dans la seconde, l'auteur détermine *le genre* des fonctions entières $G_1(x)$ et $G_2(x)$, qui est égal à l'unité, en utilisant l'expression asymptotique des zéros de ces fonctions.

Application est aussi faite, dans le même but, des résultats connus de MM. Poincaré et Hadamard sur la relation entre le genre et la croissance du coefficient de x^n dans le développement taylorien de la fonction.

L'auteur utilise enfin les expressions asymptotiques pour l'étude des intégrales réelles quand x est très grand.

Study (*E.*). — Le problème d'Apollonius. (497-542).

Suivant l'exemple de M. Klein [*Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes* (*M. A.*, t. XLIII)], M. Study s'est proposé l'étude systématique du problème classique de la *recherche du cercle tangent à trois cercles* en faisant jouer au groupe (complexe) des transformations circulaires, qui est le plus grand groupe de contact changeant des cercles tangents en cercles tangents, le rôle essentiel.

La solution qu'il recherche doit donc garder son caractère par une transformation circulaire; elle doit en outre faire appel au nombre minimum d'irrationnelles, avoir le plus grand degré de généralité possible, ne devenir illusoire, par exemple, que lorsque le problème lui-même disparaît, enfin avoir égard à la réalité des solutions et pouvoir s'obtenir par des constructions réelles toutes les fois où il existe un ou des cercles réels.

Toutes ces conditions empêchent qu'elle puisse s'exprimer aussi simplement, en apparence, que celle donnée par Gergonne qui ne satisfait à aucune d'elles.

La véritable simplicité, dit l'auteur, est cependant là : les formules qu'il obtient présentent en effet une symétrie et une élégance remarquables.

Invariants d'un système de cercles par l'inversion ; comment se formule algébriquement le problème. Solution algébrique. Solutions couplées. Dépendance des diverses solutions. Cercles auxiliaires. Triangles sphériques ; invariants des groupes de quatre cercles d'Apollonius. Introduction des fonctions elliptiques. Cercles isogonaux à quatre cercles. Quadruples de seconde espèce et cercles de Hart. Triples supplémentaires de cercles. Hexagones associés, extension du théorème de Feuerbach. Quadruples couplés. Les triples indépendants. Géométrie des inversions : constructions linéaires, quadratiques. Solution géométrique du problème d'Apollonius. Construction des cercles de Hart. Conclusions.

Weber (*E.* v.). — Théorie des systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à un nombre quelconque de fonctions inconnues et de variables indépendantes. 1re Partie. (542-572).

Tout système d'équations aux dérivées partielles peut être ramené par l'introduction de fonctions inconnues nouvelles à un système du premier ordre. Parmi ceux-ci, les plus intéressants sont les systèmes *en involution* (au sens de Lie) : résolubles par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues $z_1, \ldots, z_m$, relatives aux variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, et parmi ceux de même forme admettant les solutions les plus étendues.

L'auteur commence par étudier les conditions qui expriment qu'un système donné est en involution et par fixer la généralité de la solution la plus étendue, en suivant la marche adoptée pour cela par M. Bourlet (*Ann. de l'Éc. Norm.*, 1891). L'examen des propriétés d'une certaine matrice le conduit à la *théorie des caractéristiques* et à la définition d'une classe particulière de systèmes, *les systèmes normaux,* pour lesquels il expose une théorie d'intégration basée sur la possibilité de réduire alors le nombre des variables indépendantes.

Les développements sont réservés pour un second Mémoire.

Beke (*E.*). — Sur la théorie de M. Picard des équations différentielles linéaires homogènes. (573-582).

Invariance numérique et invariance formelle : L'auteur donne un exemple simple montrant qu'il est nécessaire de distinguer, comme dans la théorie de Galois, entre ces deux invariances.

Détermination du groupe de rationalité :

Si l'on connaît l'équation résolvante irréductible dont dépend la fonction *sensible* de M. Picard

$$V = u_1 y_1 + \ldots + u_n y_n,$$

où les u sont indéterminés, les coefficients $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ de cette résolvante demeurent formellement invariables par les substitutions du groupe dualistique au groupe de rationalité, et par celles-là seulement.

Fonction rationnelle attachée à un groupe donné. Théorème correspondant à celui de Lagrange.

Beke (*E.*). — Sur la simplicité du groupe alterné. (581-582).

Le théorème supposé vrai pour n est démontré pour $(n+1)$ éléments.

Gubler (*E.*). — Démonstration d'une formule de M. Sonin. (583-584).

Démonstration directe de

$$(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-c\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi = \int_1^{\infty} \sin\left[\frac{c}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) - \frac{n\pi}{2}\right] s^{n-1}\, ds.$$

Reye (*Th.*). — Nouvelles propriétés du complexe de droites du second ordre (585-595).

Dans une publication antérieure de l'auteur (*J. de Crelle*, t. 82) se trouve signalé un lien remarquable entre le complexe quadratique et certains systèmes covariants de surfaces du second degré. La publication du Livre de M. R. Sturm sur la Géométrie réglée l'a décidé à indiquer ici quelques propriétés nouvelles du complexe quadratique. Ce complexe peut être particulier, contenir des droites doubles (même une infinité); dans un cas spécial il peut coïncider avec l'ensemble des tangentes d'une quadrique; on suppose seulement que *toutes les courbes du complexe ne sont pas inscrites dans un des tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique fixe* F_2 et la propriété dualistique correspondante.

Une quadrique Φ_2 d'équation tangentielle

$$\Sigma\, a_{ik}\xi_i\xi_k = 0$$

et la quadrique F_2 d'équation ponctuelle

$$\Sigma\, \alpha_{ik} x_i x_k = 0$$

sont *apolaires* si l'on a

$$\Sigma\, a_{ik}\alpha_{ik} = 0.$$

M. Reye dit que F_2 *soutient* ou *porte* Φ_2 et que Φ_2 *s'appuie* ou *repose* sur F_2. Les plans des courbes du complexe qui *reposent* sur une F_2 enveloppent une Φ_2 et inversement. Il y a un système quadratique à huit paramètres de F_2 qui *soutiennent* les Φ_2 correspondantes; ce système est covariant avec le complexe. Une surface du second degré quelconque est, par rapport au système de ces F_2, *conjuguée* avec d'autres surfaces dépendant aussi de huit paramètres. Propriétés dualistiques correspondantes; relations des systèmes à huit paramètres F_2 et Φ_2, etc.

Morley (*F.*). — Construction, par la règle, d'un point covariant avec cinq points donnés. (596-600).

L'auteur donne une construction projective du covariant linéaire d'une forme binaire du cinquième degré. On peut supposer les cinq points sur une conique.

Si cette conique est

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2t : t^2,$$

en prenant les points t_α ($\alpha = 1, \ldots, 2n$), l'invariant

$$\Pi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2t_\alpha \frac{\partial}{\partial x_2} + t_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)(4x_1x_3 - x_2^2)^n,$$

égalé à zéro, exprime que les $2n$ points *sont à eux-mêmes leurs apolaires.*

Si l'on prend cinq points sur la conique, on peut de deux manières différentes ajouter un sixième point, de façon à obtenir un système de six points apolaire à lui-même; la droite qui les joint peut être construite projectivement : elle coupe la tangente en un des cinq points de la conique à son intersection avec la *polaire-conjuguée* de ce point par rapport aux quatre autres. (La *polaire-conjuguée* d'un point est la polaire du point conjugué du premier par rapport à toutes les coniques qui passent par les quatre points.)

M. Morley construit ensuite un système de six points apolaire avec un couple triple et en déduit un point de la conique qui représente un autre covariant linéaire.

Tome L, 1898.

Weber (H.). — Sur les groupes de nombres dans les corps algébriques (3e Partie). Application à la multiplication complexe et à la division des fonctions elliptiques. (1-26).

L'auteur adopte les notations de son Ouvrage (*Fonctions elliptiques et Nombres algébriques.* Braunschweig, 1891).

Fonctions elliptiques de Weierstrass. Multiplication complexe de $\wp(u)$.

Les corps de la division. Multiplication des fonctions de Jacobi. L'équation de la division pour m impair. Application aux modules singuliers. Irréductibilité de l'équation de la division pour les modules singuliers. Les idéaux premiers du corps Ω.

Kneser (A.). — Sur le calcul des variations. (27-50).

Si l'on considère toutes les courbes C pour lesquelles la première variation d'une intégrale

$$J = \int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

s'annule, et si toutes les courbes C qui passent en un point A ont une enveloppe Γ, l'intégrale J prise le long d'une d'entre elles C_1, à partir du point A, cesse d'être un minimum quand on l'étend jusqu'au point de contact de cette courbe C_1 avec l'enveloppe Γ.

M. Kneser démontre analytiquement cette proposition, étudiée en détail par M. Darboux pour le cas des géodésiques et étendue au cas général des courbes dont la courbure géodésique est une fonction donnée des coordonnées (*Leçons sur la Théorie des surfaces,* Livre VI).

Liebmann (*H.*). — Classification des mouvements d'un solide autour d'un point fixe d'après la nature du groupe des paramètres. (51-67).

M. T. Levi-Civita a appliqué dans deux Notes récentes la théorie des groupes de Lie à la recherche de cas intégrables du mouvement d'un solide autour d'un point fixe (Roma, *Acc. dei Lincei Rendiconti*, 1896). Sur les indications de M. Klein, l'auteur recherche systématiquement tous les cas où le potentiel et la force vive admettent des transformations infinitésimales formant un groupe à deux paramètres, ce qui conduit à des mouvements qu'on peut déterminer par des quadratures.

Bolza (*O.*). — L'involution cubique, la trisection et la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques. (68-102).

Si l'on représente la variable $\frac{x_1}{x_2}$ d'une involution cubique par les points d'une conique, les côtés du triangle qui correspond à un groupe involutif enveloppent une seconde conique fixe (conique d'involution); il existe donc une relation entre cette théorie et celle des triangles inscrits dans une conique et circonscrits à une autre, c'est-à-dire avec la division par trois des fonctions elliptiques. C'est cette relation que l'auteur développe : il en déduit l'expression par les fonctions elliptiques de toutes les involutions cubiques avec des éléments singuliers donnés; les invariants rationnels de l'involution sont obtenus comme formes modulaires elliptiques, etc.

Il montre ensuite que les fonctions elliptiques associées à deux involutions cubiques conjuguées dérivent les unes des autres par une transformation du troisième ordre.

La recherche de certains *combinants irrationnels* de l'involution amène l'auteur à des fonctions elliptiques et modulaires de seconde et sixième espèce, dont il trouve l'interprétation géométrique par la considération du triangle conjugué commun aux deux coniques, et qui se rattachent aux fonctions considérées par M. Fricke (*Modulfonctionen*).

Petrovitch (*M.*). — Contribution à la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. (103-112).

Il peut arriver que la fonction $y(x)$ qui vérifie la relation

$$Q(x, y) = 0,$$

résultat de l'élimination de y' entre l'équation algébrique du premier ordre

$$F(x, y, y') = 0$$

et sa dérivée

$$\frac{dF}{dy'} = 0,$$

satisfasse à l'équation différentielle *sans être une enveloppe des courbes intégrales.* Il suffit pour cela qu'elle rencontre ces courbes intégrales en des points

fixes. M. Petrovitch, s'appuyant sur un résultat antérieur (*Sur les zéros et les infinis des intégrales*, Paris, 1894), recherche dans quel cas une équation donnée possède de telles solutions particulières, et signale le parti qu'on en peut tirer pour l'intégration.

Gordan (*P.*). — Résultants des formes ternaires. (112-132).

Soit une forme ternaire, produit de formes linéaires

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_m};$$

si les points u_{α_i} forment l'intersection complète de deux courbes f_1, f_2, les invariants simultanés symétriques Π des facteurs linéaires $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_m}$ sont aussi des invariants simultanés des formes f_1 et f_2.

Le résultant d'une forme quelconque $f = a_x^n$ et de f_1 et f_2 est une fonction entière des coefficients de ces trois formes.

D'après la formule

$$R = f(\alpha_1) f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_m),$$

c'est aussi un invariant simultané symétrique de f et des α; il se laisse développer en somme dont les termes peuvent s'obtenir par *rejet* (*Ueberschiebung*) des Π sur les invariants de f et dont les coefficients sont numériques.

Il existe un invariant V dont l'évanouissement exprime que f se décompose en facteurs linéaires; le résultant est alors un invariant simultané R_1 de f et de v.

Si $V \neq 0$ la différence $R - R_1$ est une somme de termes qui s'obtiennent par *rejet* de V sur d'autres formes convenablement choisies; si $n \geq m$ cette différence est nulle.

Calcul et expression symbolique du résultant d'une forme f biquadratique et de deux formes quadratiques.

Nœther (*M.*). — James-Joseph Sylvester. (132-156).

Notice sur les travaux de Sylvester.

Brill (*A.*). — Sur la décomposition d'une forme ternaire en facteurs linéaires. (157-182).

Conditions nécessaires. Conditions suffisantes. Examen du cas $n = 3$.

M. Brill indique un système de $3(n-1)^3$ relations entre les coefficients des formes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ à deux variables qui donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme ternaire d'ordre n

$$t^n f_0 + t^{n-1} f_1 + \ldots + t f_{n-1} + f_n$$

soit un produit de facteurs linéaires. Ces relations ne sont pas indépendantes.

Schleiermacher (*L.*). — Sur les fonctions thêta à deux variables et les surfaces de Kummer correspondantes. (183-212).

Après avoir rappelé les points essentiels de la théorie des fonctions thêta de

deux variables, l'auteur montre comment on peut déduire des formules de H. Weber, qui donnent les coordonnées homogènes d'un point d'une surface de Kummer, des formules analogues et simples donnant les coordonnées d'un plan tangent à cette surface. Ces dernières mettent en évidence le fait que la surface est sa propre polaire réciproque par rapport à certaines quadriques.

Des formules moins simples se déduisent pour les coordonnées tangentielles des expressions de Cayley pour les coordonnées ponctuelles; l'auteur, en les signalant, observe que M. Klein en est passé très près en étudiant les configurations remarquables, à la fois inscrites et circonscrites à la surface (*M. A.*, t. XXVII). D'autres expressions des coordonnées ponctuelles au moyen des fonctions thêta de deux variables sont indiquées.

L'auteur recherche ensuite l'expression des fonctions thêta avec un argument double au moyen de carrés de fonctions thêta de même module avec un argument simple, et applique ses formules à l'étude du système sextuple de surfaces de Kummer qui touchent une surface donnée suivant une courbe du huitième ordre. D'autres formules liant entre elles les fonctions thêta de deux systèmes de quatre arguments, qui se déduisent l'un de l'autre par une substitution orthogonale, ont pour but d'éclaircir le sens du théorème d'Abel, sous la forme utilisée par MM. Klein et Humbert, dans la théorie des fonctions thêta.

Moore (*E.-H.*). — Un invariant universel pour les groupes finis de substitutions linéaires, avec application à la réduction d'une substitution linéaire de période finie à sa forme canonique. (213-219).

Tout groupe fini de substitutions linéaires et homogènes à n variables laisse invariante une forme d'Hermite (forme bilinéaire à indéterminées conjuguées, les coefficients correspondants étant conjugués); cette forme peut toujours être prise égale à

$$x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_n x'_n,$$

x'_i étant la quantité imaginaire conjuguée de x_i.

Maschke (*H.*). — La réduction des substitutions linéaires et homogènes de période finie à leur forme canonique. (220-224).

Application d'une méthode employée par Lipschitz (*Acta Mathematica*, t. X, p. 137) pour exprimer qu'une substitution linéaire est de période finie, au problème indiqué.

Moore (*E.-H.*). — Concernant les systèmes de ternes *abéliens réguliers* transitifs. (224-240).

Tout *système de ternes* Δ_t de t éléments ($t = 6m + 1$, $6m + 3$) est invariant pour un certain groupe maximum G_t de substitutions de ses t éléments; ce système est dit *transitif* si le groupe G_t l'est, *cyclique* si G_t contient une substitution circulaire de tous ses éléments.

Si le groupe G_t contient un sous-groupe *régulier* H_t^t de t éléments, Δ_t est dit *régulier;* $\Delta_t \mid H_t^t$ représente cet *aspect régulier* de Δ_t. Deux *aspects* qui ne dif-

fèrent que par la notation des éléments sont *équivalents*. Si H_t^t est un groupe abélien, Δ_t est *abélien* et *régulier*.

Un groupe abélien d'ordre t est caractérisé par son *caractère invariant*

$$\left[p_1^{n_1}, \ldots, p_i^{n_i}, \ldots, p_d^{n_d}\right]$$

(groupement des facteurs premiers qui entrent dans les ordres des divers groupes cycliques contenus dans H_t).

Les $\frac{t(t-1)}{6}$ ternes d'un système Δ_t, d'aspect abélien régulier $\Delta_t \mid H_t^t$, se partagent en m_1 configurations $Cf_1\begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & t \end{pmatrix}$ et m_2 configurations $Cf_2\begin{pmatrix} t & 1 \\ 3 & \frac{1}{3}t \end{pmatrix}$ régulières par rapport à H_t^t; ces configurations dépendent elles-mêmes de certains groupes de six éléments (ou deux) de H_t. L'auteur fait effectivement la construction de ces groupes et détermine l'aspect correspondant quand H_t est un groupe abélien d'ordre $6m+3$ ayant un seul caractère invariant 3 et que l'on prend $m_1 = m$, $m_2 = 0$, ou encore pour certaines valeurs $t = 6m+1$ (où les facteurs premiers de la forme $6k+5$ entrent un nombre pair de fois) quand H_t est un groupe abélien dont le caractère invariant ne renferme que des facteurs premiers à la première puissance, dans l'hypothèse

$$m_1 = m, \qquad m_2 = 0.$$

Baur (*L.*). — Sur les racines distinctes d'une équation algébrique (Lettre à M. H. Weber). (241-246).

Si la variable y est liée à x par une équation algébrique de degré n en y, la condition nécessaire et suffisante pour que, parmi les valeurs $y_1, \ldots, y_n$ de y pour $x = a$, il s'en trouve précisément ρ distinctes est que tous les mineurs de degré $(\rho+1)$ du système

$$\mid s_{h+i} \mid \qquad (h, i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

s'annulent pour $x = a$, sans qu'il en soit de même pour les mineurs de degré ρ, ou encore que le *rang* du système précédent soit ρ.

Après avoir démontré et transformé de différentes manières cet énoncé, M. Baur indique le moyen d'obtenir comme *déterminant* l'équation de degré ρ qui détermine les racines distinctes.

Roussiane (*C.*). — Sur les formes canoniques d'une expression différentielle $X_1\,dx_1 + \ldots + X_p\,dx_p$. (247-260).

Extrait abrégé d'un travail de l'auteur (*Mémoires de l'Université de la Nouvelle Russie*, t. LXVII, 1896) qui a pour but de donner, pour trouver les relations entre deux formes canoniques, une méthode nouvelle basée sur des propriétés *nouvelles* des variables de la forme canonique. Ces propriétés sont exprimées par les formules

$$\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i}, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i}, \qquad \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}, \qquad \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i},$$

si l'on suppose la forme réduite *paire*

$$\Phi_1\, d\varphi_1 + \ldots + \Phi_n\, d\varphi_n = F_1\, df_1 + F_2\, df_2 + \ldots + F_n\, df_n,$$

f, F sont $2n$ variables indépendantes.

Si l'on considère une forme réduite *impaire*

$$df_1 + F_2\, df_2 + \ldots + F_{n-1}\, df_{n+1}$$

à $(2n+1)$ variables indépendantes et sa transformée

$$d\varphi_1 + \Phi_2\, d\varphi_2 + \ldots + \Phi_{n+1}\, d\varphi_{n-1},$$

on aura les relations

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = 1, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial F_i}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_k} = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_i},$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial f_i}.$$

Heffter (L.). — Sur les groupes métacycliques et les *configurations voisines.* (261-268).

Construction d'un domaine géométrique, voisin du réseau de polygones de W. Dyck, qui demeure invariant par les substitutions du groupe métacyclique $G_{p(p-1)}$ engendré par

$$S = (z,\ gz), \qquad T = (z,\ z+1);$$

l'auteur en déduit une fonction invariante par ce groupe.

Rudzki (M.-P.). — Sur une classe de problèmes d'hydrodynamique avec des conditions aux limites particulières. (269-281).

Il s'agit de cas où la pression à la surface du liquide ou à la surface de séparation de deux liquides en mouvement est constante. L'auteur signale le suivant (où l'on peut intégrer), qu'il étudie en détail et applique à divers exemples numériques :

Mouvement stationnaire, non tourbillonnaire, d'un liquide incompressible pesant, quand il peut être ramené à un mouvement à deux dimensions dans un plan vertical yOx (Oy verticale vers le haut).

Soient :

ρ la densité du liquide;
φ le potentiel des vitesses;
ψ la fonction de flux;
p la pression.

L'énergie potentielle par unité de volume est $C - \rho g y$; l'énergie cinétique pour ce même volume sera

$$\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Si le liquide est limité par un sol fixe, dont l'équation en x, y est $F = 0$, on aura aux limites

$$\psi = 0 \qquad \text{pour} \qquad F = 0.$$

A la surface, on aura

$$\psi = \psi_1$$

avec

$$\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] = C - \rho g y;$$

la forme de la surface $\psi = \psi_1$ est naturellement à trouver.

Si l'on pose

$$\omega = \varphi + i(\psi - \psi_1),$$
$$z = x + iy,$$

M. Budzki trouve

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{e^{i\theta}\left(A + iB + 3ig\int e^{-i\theta}\,d\varphi\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(A - iB - 3ig\int e^{i\theta}\,d\varphi\right)^{\frac{1}{3}}},$$

pour $\psi - \psi_1 = 0$, et à l'intérieur du liquide

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{e^{-i\Theta}\left(A - iB - 3ig\int e^{i\Theta}\,d\omega\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(A + iB + 3gi\int e^{-i\Theta}\,d\omega\right)^{\frac{2}{3}}},$$

où Θ est une fonction de ω dont la partie imaginaire s'annule pour $\psi = \psi_1$ et où θ désigne alors la partie réelle. On peut déterminer la forme de Θ, connaissant celle du sol $\psi = 0$, ou se donner arbitrairement Θ et calculer ψ.

Weltzien (*C.*). — Sur les puissances de déterminants. (281-284).

Pochhammer (*L.*). — Sur les équations différentielles des séries F du quatrième ordre. (285-302).

D'après les méthodes indiquées par l'auteur et appliquées par lui aux séries F du troisième ordre (*M. A.*, t. XLVI), il étudie ici les séries F du quatrième ordre et intègre les équations différentielles qu'elles vérifient par des intégrales définies triples, en ramenant le problème au troisième ordre.

La série F d'ordre n la plus générale est, par définition, avec $m \leq n$,

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}; x) = 1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1\cdot\rho_1\ldots\rho_{n-1}}x$$
$$+ \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1\cdot 2\,\rho_1(\rho_1+1)\rho_2(\rho_2+1)\ldots\rho_{n-1}(\rho_{n-1}+1)}x^2 + \ldots.$$

L'équation du quatrième ordre

$$(1)\quad \begin{cases} x^3\dfrac{d^4y}{dx^4} + (\rho + \sigma + \tau + 3)x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} \\ \qquad + (\rho\sigma + \rho\tau + \sigma\tau + \rho + \sigma + \tau + 1)x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (\rho\sigma\tau - x)\dfrac{dy}{dx} - \alpha y = 0 \end{cases}$$

admet, comme solutions principales, les séries

$$F(\alpha; \rho, \sigma, \tau; x), \qquad x^{1-\rho} F(\alpha - \rho + 1; 2 - \rho, \sigma - \rho + 1, \tau - \rho + 1; x)$$

et celles qui se déduisent de la seconde par permutation circulaire de ρ, σ, τ. La substitution

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W_1 \, dw$$

donnera pour W_1 une équation de même forme que (1), mais du troisième ordre seulement, qu'on sait intégrer par une intégrale double. Le cas $n = 4$, $m = 1$ est ainsi élucidé. Les cas $m = 2$, $m = 3$ se traitent de même.

Lilienthal (*R. v.*). — Sur la théorie des transformations de contact (303-313).

La Géométrie des transformations de contact de S. Lie a inspiré à l'auteur le désir de rechercher les transformations de contact qui changent en elles-mêmes les courbes intégrales d'une équation de Pfaff, et qui, comme les transformations de contact du plan, dépendent, en outre des trois coordonnées ponctuelles, d'une quatrième variable qui sera la tangente d'un certain angle.

Bolza (*O.*). — Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques du premier ordre aux intégrales elliptiques par une transformation du troisième degré. (314-324).

Quand une intégrale hyperelliptique de première espèce de genre $p = 2$ est réductible par une transformation rationnelle de degré k à une intégrale elliptique, il en existe toujours (théorème de Weierstrass-Picard) une autre qui possède la même propriété; sa détermination par voie algébrique est difficile. Pour $k = 3$, M. Goursat y est parvenu, par un artifice de calcul qu'il n'a justifié en aucune façon. M. Bolza s'est proposé de traiter la question géométriquement, en partant de théorèmes sur l'involution cubique; après avoir retrouvé successivement les deux intégrales réductibles, il montre comment on parvient naturellement aux transformations de calcul indiquées par M. Goursat.

Si l'intégrale $\int \frac{(x\delta)(x\,dx)}{\sqrt{R(x)}}$, où $R(x)$ est une forme binaire du sixième degré, est réductible à une intégrale elliptique par une transformation du troisième degré

$$z = \frac{u(x)}{v(x)},$$

$R(x)$ peut être décomposé en deux facteurs du troisième degré

$$\varphi = (x\alpha_1)(x\alpha_2)(x\alpha_3), \qquad \psi = (x\beta_1)(x\beta_2)(x\beta_3),$$

de telle sorte que α_1, α_2, α_3 constituent un triple de l'involution cubique J,

$$\lambda u + \mu v = 0,$$

pendant que β_1, β_2, β_3 sont trois points de ramification.

Le zéro δ est alors l'élément double correspondant au quatrième point de ramification.

Si l'on représente $x_1 : x_2$ par les points d'une conique N, les triangles dont les sommets sont des triples de l'involution enveloppent une seconde conique J : la condition de réduction est qu'il existe une conique inscrite dans le triangle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et circonscrite à $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

En prenant la polaire réciproque de la figure par rapport à la conique Σ, pour laquelle les triangles α et β sont polaires réciproques, on a une seconde conique J′ définissant une nouvelle involution cubique à laquelle correspondra la seconde intégrale. Le point δ' est le zéro de cette seconde intégrale.

En prenant pour variables les facteurs $(x\delta)$ et $(x\delta')$ on obtient les formes normales de M. Goursat.

Boltzmann (*L.*). — Sur la courbe H. (325-332).

L'auteur s'est proposé d'indiquer les propriétés de la courbe H qu'il a utilisée pour expliquer certains théorèmes de sa théorie cinétique (*Wied. Ann.*, t. LX) en rattachant sa construction à un problème simple de probabilités.

Une urne contient un nombre égal de boules blanches et de boules noires identiques : on tire au hasard une boule et on la remet; désignons dans leur ordre par

$$Z_{-N}, \quad Z_{-N+1}, \quad \ldots, \quad Z_0, \quad Z_1, \quad \ldots, \quad Z_N$$

$(2N+1)$ de ces tirages.

Soit en outre n un nombre pair quelconque inférieur à $2N+2$; désignons par a_k le nombre des boules blanches données par les n tirages

$$Z_k, \quad Z_{k+1}, \quad \ldots, \quad Z_{k+n-1},$$

où k peut prendre une quelconque des valeurs comprises entre $-N$ et $N-n+1$.

A chaque valeur de k, M. Boltzmann fait correspondre le point B_k, dont les coordonnées cartésiennes rectangulaires sont

$$OA_k = x = \frac{k}{n}, \qquad A_k B_k = y = \left| 1 - \frac{2a_k}{n} \right|;$$

il fait ensuite augmenter indéfiniment n et N de façon que $\frac{N}{n}$ augmente aussi indéfiniment : la différence des abscisses des deux points B_k et B_{k+1} est $\frac{1}{n}$, celle des ordonnées est au plus $\frac{2}{n}$; ces deux points se rapprochent donc. L'ensemble des B_k constitue la courbe H : M. Boltzmann montre qu'on peut la compléter entre deux points B_k et B_{k+1} de façon à obtenir un trait continu, dont il étudie l'allure.

Landsberg (*G.*). — Recherches algébriques sur le théorème de Riemann-Roch. (333-380).

Suivant la voie ouverte par le Mémoire fondamental de Dedekind-Weber (*J. de Crelle*, t. 92), l'auteur s'est proposé de donner du théorème de Riemann-Roch une démonstration purement algébrique, en écartant toutes considéra-

tions géométriques ou de théorie des fonctions. Néanmoins, dans le travail actuel, il s'est servi des résultats de Puiseux sur les développements en série d'une fonction algébrique au voisinage d'un point singulier au lieu d'employer les systèmes de modules de Dedekind ou les systèmes de diviseurs de Kronecker.

Le théorème de Riemann-Roch et la formation immédiate des intégrales abéliennes d'un corps algébrique avec des infinis donnés à l'avance résultent de la proposition suivante qui est fondamentale :

Soit (G) *un système quelconque de m points qui peuvent être ou non distincts et distincts ou non des points de ramification; il y a toujours une forme binaire entière*

$$P = c_0 x_1^\lambda + c_1 x_1^{\lambda-1} x_2 + \ldots + c_\lambda x_2^\lambda$$

qui s'annule en tous les points G : *ses autres zéros, en nombre $n\lambda - m = m'$, quand n désigne l'ordre du corps algébrique que l'on étudie, forment un système* (H) réciproque *de* G.

Soient alors

$$\Phi_1 = \Sigma b_{1h} H_h, \quad \Phi_2 = \Sigma b_{2h} H_h, \quad \ldots, \quad \Phi_n = \Sigma b_{nh} H_h \quad (h = 1, \ldots, n)$$

un *système fondamental* de formes pour toutes les formes entières qui s'annulent en (H) [toutes ces formes sont linéaires et homogènes en $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, les coefficients étant des formes binaires de même dimension]; si l'on calcule au moyen des équations

$$PZ_g = \Sigma b_{gh} \Psi_h \quad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

les n formes $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, elles forment un système fondamental pour toutes celles qui s'annulent en (G).

Dans cet énoncé, il est nécessaire de rappeler la définition des H et des Z : les H forment pour le corps algébrique un *système fondamental absolu*, à l'aide duquel toute forme entière du corps s'exprime linéairement, les coefficients étant des formes binaires en x_1, x_2; les Z sont les éléments réciproques du système formé par les H et leurs conjuguées, ou encore sont un système fondamental particulier des *formes de première espèce*.

Pick (*G.*). — Sur la théorie des formes appartenant à un domaine algébrique. (381-397).

I. Définition et étude du *rejet* (*Ueberschiebung*) dans un domaine algébrique.

Dans un domaine algébrique de genre p, soit τ_1 l'une des $3p-3$ variables *automorphes* sans singularités; supposons que l'on puisse écrire

$$\tau_1 = \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

où ξ_1, ξ_2 n'ont pas de singularités et subissent par tout déplacement fermé dans le domaine une substitution linéaire et homogène de déterminant 1; l'existence

de ces fonctions et l'arbitraire dont elles dépendent résulteront de la formation de l'équation différentielle qu'elles vérifient). M. Pick prend ξ_1 et ξ_2 comme variables indépendantes : $(\xi_1 \, d\xi_2 - \xi_2 \, d\xi_1) = d\omega$ est de degré $+2$, les adjointes φ sont de degré -2, etc. Si A, B sont deux formes de degrés respectifs α, β,

$$(A, B)^1 = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial(A, B)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \frac{\frac{1}{\beta} A \, dB - \frac{1}{\alpha} B \, dA}{d\omega}$$

définit le premier *rejet* de A et B.

Si z_1, z_2 sont deux formes multiplicatives entières, sans points de ramification avec n zéros et les mêmes multiplicateurs, $z = \frac{z_1}{z_2}$ est une fonction à n valeurs du domaine ; la relation

$$dz = -\frac{n}{p-1} \frac{(z_1, z_2)^1}{z_1^2} d\omega$$

montre que les zéros de $(z_1, z_2)^1$ sont les points de ramification de la surface de Riemann qui représente le domaine sur le plan complexe z.

Une étude des *rejets* d'ordre supérieur des formes du domaine conduit en particulier à l'identité

$$(A, B)^2 = M - \frac{\alpha + \beta - 2}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \Phi . AB,$$

où M désigne une forme multiplicative entière de même degré que $(A, B)^2$ et possédant les mêmes multiplicateurs, *et où* Φ *de degré* -4 *avec* $4p-4$ *zéros est indépendante de* A *et* B *et sans points de ramification*. M. Pick applique ce résultat à l'établissement des équations différentielles qui définissent les fonctions ξ_1, ξ_2.

Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ est une fonction uniforme, z_1, z_2 étant des formes multiplicatives de degré ν, sans points de ramification, et si l'on représente par $[a, b]^1$ un *rejet* où les variables sont z_1, z_2, on a, par exemple, en posant

$$(z_1, z_2)^1 = \sigma, \qquad (z_1, z_2)^3 = \tau,$$

l'équation

$$[\sigma^2, \xi] = \frac{\nu - 2}{6\nu - 8} \cdot \frac{\tau}{\sigma} \cdot \xi,$$

dont ξ_1, ξ_2 sont deux solutions particulières. Dans cette équation $\frac{\tau}{\sigma}$ se réduit, en tenant compte de la formule rappelée plus haut, à

$$\frac{6\nu - 8}{(\nu - 1)(\nu - 2)} \Phi,$$

où Φ pourra être, par suite, une forme entière sans points de ramification avec $4p - 4$ zéros.

II. La seconde Partie du travail contient l'application à un domaine hyperelliptique, à un domaine binaire et l'indication des problèmes à résoudre (calcul de trois formes fondamentales) pour un domaine algébrique quelconque.

Par exemple, pour un domaine hyperelliptique

$$f = a_z^{2p+2},$$

on peut poser

$$(z_1, z_2)^1 = \sqrt{f}, \qquad d\omega = -\frac{p-1}{2}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f}};$$

en prenant deux formes linéaires

$$u_z = u_1 z_1 + u_2 z_2,$$
$$v_z = v_1 z_1 + v_2 z_2,$$

on a

$$(u_z, v_z)^3 = -2\frac{(p-1)(p+2)}{p(p+1)}\Phi(uv)\sqrt{f},$$

ce qui donne, pour l'équation non singulière,

$$[f, \xi]^2 = \frac{4(p+2)}{(p+1)(2p+1)}\Phi.\xi.$$

Staude (*O.*). — Les fondements algébriques des propriétés focales des surfaces du second ordre. (388-428).

Les propriétés focales des cinq espèces de quadriques résultent des deux identités

$$-a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\}$$
$$=\left\{a^2-\left(\frac{r_2+r'_2+r_1+r'_1-4e}{4}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{a^2-\left(\frac{r_2+r'_2-r_1-r'_1}{4}\right)^2\right\}\times\left\{a^2-\left(\frac{r_2-r'_2-r_1+r'_1}{4}\right)^2\right\}$$

et

$$-p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}=(p-x-r_1)(p-x-r_2)(p-x-r_3),$$

dans lesquelles :

1° Les quantités r_1, r_2, r'_1, r'_2 sont le maximum et le minimum de chaque somme des distances d'un point c pris sur l'ellipse focale à l'un de ses foyers et au point (x, y, z);

2° r_1, r_2, r_3 sont définis de même à l'aide de la parabole focale.

Hirsch (*A.*). — Les conditions d'existence du potentiel cinétique généralisé. (429-441).

Le problème analytique à résoudre est de déterminer les conditions sous lesquelles n fonctions données

$$F_\varkappa(x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(r_1+r_\varkappa)}; \quad \ldots; \quad y_n, y'_n, \ldots, y_n^{(r_n+r_\varkappa)}) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$

se laissent mettre sous la forme

$$F_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{r_\varkappa} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}}\right);$$

M. Hirsch montre que ces conditions sont précisément celles qui expriment que le système des expressions linéaires

$$\delta F_\iota = \sum_{\varkappa, \lambda} \frac{\partial F_\iota}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}} u_\varkappa^{(\lambda)}$$

est identique au système adjoint.

Pringsheim (*A.*). — Sur une espèce particulière de points singuliers des fonctions analytiques. (442-461).

Dans un travail antérieur (*M. A.*, t. XLII) l'auteur a étudié différents types de fonctions analytiques régulières à l'intérieur du cercle de rayon 1, finies et continues, ainsi que toutes les dérivées lorsqu'on passe à la circonférence et sur cette circonférence, et pour lesquelles cependant cette circonférence est une *coupure*. En supposant que les singularités soient *isolées* sur un arc de cercle, M. Pringsheim a montré comment on peut les obtenir comme limites de pôles simples avec des suites de fractions $\sum_0^\infty \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$; il avait cru pouvoir conclure que ces points singuliers devaient toujours constituer une coupure toutes les fois où ils formaient la frontière du domaine et où les α_ν étaient *extérieurs* au domaine. M. Borel a montré depuis que son raisonnement n'était pas décisif. L'auteur profite de réclamations de priorité de la part de M. Lerch pour, en répondant à ce dernier, donner des exemples de distribution symétrique des α_ν avec lesquels son théorème est exact.

Baker (*H.-F.*). — Sur les fonctions sigma hyperelliptiques. (462-472).

On sait que chacune des 2^{2p} fonctions thêta auxquelles conduit l'équation

$$y^2 = (x, 1)_{2p+2} = f(x)$$

est associée à une décomposition du polynome $f(x)$ en deux facteurs

$$f(x) = \varphi_x^{p+1-2\mu} \psi_x^{p+1+2\mu};$$

l'auteur s'occupe presque uniquement ici des 2^p fonctions qui résultent des décompositions pour lesquelles

$$\varphi_x^{p+1-2\mu} = Q(x).(x, 1)_{\dots},$$

où

$$Q(x) = (x - c_1)\dots(x - c_p)(x - c)$$

2ᵉ P. 1-5

est le même pour toutes les décompositions. On suppose en outre $f(x)$ de degré $2p+1$ seulement, l'un des points de ramification étant à l'infini et la surface de Riemann correspondante rendue simplement connexe par l'emploi des coupures classiques de Neumann. Dans ces hypothèses, M. Baker définit les fonctions σ à 1, 2, 3 indices et les applique à la transformation des fonctions θ à 3, 4, ... indices.

Gerbaldi (*F.*). — Sur le groupe de 360 transformations linéaires. (472-476).

L'auteur rappelle d'abord qu'il a étudié antérieurement (*Atti dell'Accad. di Torino*, t. XVII) le système de six coniques qui sont deux à deux harmoniquement inscrites et circonscrites (*sextuple de coniques en involution*); la configuration des triangles conjugués par rapport aux 15 couples de ces coniques est précisément celle qui intervient dans l'étude de G_{360}, découvert sept ans après par Valentiner.

M. Gerbaldi étudie ici les relations de ce groupe avec la théorie de l'équation générale du sixième degré, selon la méthode de M. Klein.

Pour le groupe de transformations linéaires G_{360}, il existe deux sextuples de coniques en involution, tels que les transformations de G_{360} produisent parmi les coniques d'un sextuple les permutations du groupe alterné. L'auteur amène ces deux sextuples à une forme normale qui lui permet de construire les invariants fondamentaux de G_{360} et ensuite les divers types de résolvantes pour l'équation du sixième degré.

Noether (*M.*). — Francesco Brioschi. (476-491).

Notice nécrologique.

Maschke (*H.*). — Sur le caractère arithmétique des substitutions des groupes finis de substitutions linéaires. (492-498).

Si un groupe de substitutions linéaires est d'ordre fini et s'il contient au moins une substitution dont l'équation caractéristique a ses racines distinctes, on peut toujours le transformer de telle sorte que les coefficients de ses substitutions soient exprimés rationnellement au moyen de racines de l'unité.

Hoyer (*P.*). — Fondements d'une théorie analytique des problèmes de groupements. (499-517).

L'auteur se propose de montrer comment les propriétés générales des suites qui résultent de groupements d'autres suites (par exemple : groupes transitifs d'une suite, son degré de connexion, ses cycles, les décompositions qu'elle admet, etc.), se laissent déterminer analytiquement.

Ahrens (*W.*). — Sur les faisceaux discrets de transformations continues. (518-524).

L'auteur, considérant un groupe complexe formé d'un nombre limité de faisceaux de transformations continues, et pour lequel, si τ_a et τ_b sont deux trans-

formations quelconques, les produits $\tau_a \tau_b$ et $\tau_b \tau_a$ appartiennent toujours au même faisceau, établit l'existence d'un certain nombre de faisceaux *fondamentaux,* dont les autres peuvent se déduire par composition de leurs transformations.

Horn (J.). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires (premier Mémoire). (525-566).

On sait que M. Poincaré a étudié la façon dont se comportent les intégrales de l'équation

$$P_0 y^{(m)} + P_1 y^{(m-1)} + \ldots + P_m y = 0,$$

où les P_i sont des polynomes d'ordre p, au voisinage de $x = \infty$,

$$P_i = a_i x^p + \ldots,$$

en les exprimant sous la forme

$$y = \int_l v e^{zx} dz,$$

où la fonction v vérifie la transformée de Laplace

$$(a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots) v^{(p)} + \ldots = 0,$$

qui est d'ordre p et dont les coefficients sont des polynomes de degré m, le contour d'intégration l étant choisi convenablement.

Il a obtenu ainsi la signification des *séries normales* divergentes qui satisfont formellement à l'équation.

M. Horn s'est proposé de poursuivre, dans cette voie, l'étude des y et il a réussi à suivre ces fonctions dans tout le voisinage de $x = \infty$, alors que M. Poincaré avait seulement reconnu comment elles se comportaient le long d'un chemin déterminé. Les résultats sont complètement développés pour l'équation différentielle linéaire du deuxième ou du troisième ordre.

Lœwy (A.). — Sur les formes bilinéaires avec variables conjuguées. (556-576).

Extraits d'un travail plus étendu, publié ailleurs, consacré à l'étude des transformations en elle-même d'une forme bilinéaire à déterminant non nul et à variables imaginaires conjuguées : ces variables sont soumises à deux transformations linéaires à coefficients imaginaires conjugués. Ces recherches sont en liaison étroite avec celles relatives à l'indice d'inertie d'une forme quadratique d'Hermite.

Caractère des substitutions linéaires qui n'altèrent pas une forme bilinéaire à variables conjuguées. Expression de ces substitutions. Formes bilinéaires définies. Expression des transformations linéaires qui transforment en elle-même une forme d'Hermite. Indice d'inertie et *caractéristique* des formes d'Hermite. Caractéristique d'une forme quadratique réelle. Théorèmes d'existence pour les formes quadratiques réelles invariables par des substitutions réelles données.

Landsberg (*G.*). — Sur l'analogue du théorème de Riemann-Roch dans la théorie des nombres algébriques. (577-582).

Si l'idéal G d'un corps de nombres de degré n a la base

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

et si le système quadratique

$$\chi_i^{(h)} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, n)$$

est le *réciproque* du système analogue formé par la base et ses n conjugués

$$\varphi_i^{(h)} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, n),$$

les éléments $\chi'_h, \chi''_h, \ldots, \chi_h^{(n)}$ sont les conjugués d'un nombre χ_h du corps dont le dénominateur idéal est le produit de G et de la *différente* Δ du corps (p. g. c. d. des différentes de tous les nombres entiers du corps) ou un diviseur de ce produit; tout nombre χ dont le dénominateur idéal est diviseur de GΔ peut s'exprimer sous la forme

$$\chi = \nu_1\chi_1 + \ldots + \nu_n\chi_n,$$

où les ν_i sont des nombres entiers.

Ce théorème, analogue à celui de Riemann-Roch, a été donné par M. Hilbert; M. Landsberg en indique une nouvelle démonstration identique à celle qu'il a donnée déjà du théorème de Riemann-Roch.

Klein (*F.*). — Rapport concernant le troisième Volume de la *Théorie des groupes de transformations* de S. Lie et l'attribution du Prix Lobatschewsky. (583-602).

Prix Benecke. (603-604).

Sujet de Concours pour l'année 1901.

Tome LI, 1898-1899.

Hilbert (*D.*). — Sur la théorie des corps numériques quadratiques relatifs. (1-127).

Soient k un corps algébrique quelconque d'ordre m, μ un nombre de ce corps qui n'est pas carré parfait d'un nombre du même corps; l'ensemble des nombres k et $\sqrt{\mu}$ constitue un corps d'ordre $2m$, $K(\sqrt{\mu})$, que M. Hilbert nomme *quadratique relatif*. Il s'est proposé de développer pour ce corps quadratique une théorie analogue à celle que l'on doit à Gauss, dans le cas où k est rationnel. On parvient ainsi en particulier à une extension de la loi de réciprocité des résidus quadratiques.

Les méthodes appliquées s'étendraient aux corps abéliens *relatifs*, et conduisent naturellement à des lois de réciprocité pour les résidus des puissances d'ordre quelconque. M. Hilbert fait observer que, dans le cas où l'on étudie les restes des puissances d'ordre l dans le domaine des racines d'ordre l de l'unité, on peut démontrer la loi de réciprocité due à Kummer sans faire intervenir la loi particulière de réciprocité déduite par Eisenstein de l'étude de la division du cercle.

Parmi les applications figure la recherche des critères sous lesquels une équation quadratique de Diophante à coefficients algebriques est résoluble dans le domaine de rationalité formé par ces coefficients.

La première Partie de ce travail comprend les définitions et les théorèmes préparatoires dans le cas où le corps k est quelconque. Dans la seconde Partie, l'auteur étudie *complètement* un corps k *imaginaire ainsi que tous ses conjugués,* dans le cas où le nombre des classes d'idéaux est *impair*.

Il indiquera les théorèmes les plus importants dans le cas d'un corps k quelconque, aux *Göttinger Nachrichten*.

Klein (*F.*). — Sur l'état de l'édition des *Œuvres de Gauss*. (127-133).

Enriques (*F.*). — Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues. (133-153).

Cet article reproduit les matières traitées par l'auteur dans sa conférence au Congrès international des mathématiciens à Zurich (août 1897).

Il s'agit de rechercher les résolutions *algébriques* des équations ou *systèmes d'équations* à plusieurs inconnues, *indéterminés,* c'est-à-dire renfermant plus d'inconnues que d'équations, que l'on doit regarder comme les plus simples.

M. Enriques indique les différentes questions qui se présentent et les réponses que l'on a pu faire à quelques-unes :

Si l'on peut résoudre la relation $f(x, y) = 0$ en prenant pour x, y des fonctions rationnelles d'un paramètre t, on peut choisir ce paramètre de façon qu'il soit rationnel en x, y et donne lieu à une représentation *propre* (à une valeur de x, y correspond une seule valeur du paramètre) (Lüroth). Ce théorème a été démontré pour trois variables par M. Castelnuovo. Il reste en suspens pour un plus grand nombre de variables.

Si l'on peut résoudre $f(x, y) = 0$ avec une irrationnelle d'ordre n (n étant l'ordre le plus petit possible), la représentation est *propre* et le paramètre peut être choisi rationnel en x, y (Enriques).

Pour trois variables, l'équation $f(x, y, z) = 0$ du quatrième degré se résout par une seule racine carrée portant sur une fonction rationnelle de deux paramètres, qui ne seront jamais rationnels en x, y, z lorsque f est général de son degré.

Après quelques mots sur les transformations simplement ou doublement rationnelles des variétés algébriques, M. Enriques revient à l'étude générale de la résolution de $f(x, y) = 0$ au moyen d'une irrationnelle $t(x, y)$, rationnelle en x et y : influence du choix de $t(x, y)$ sur l'irrationnelle $x(t)$, influence de $f(x, y)$?

Former toutes les équations qu'on peut résoudre avec des irrationnelles de

nature donnée : sans irrationnelles on sait que $f(x, y) = 0$ est de genre zéro ; avec une racine carrée on a les équations hyperelliptiques $y^2 = f(x)$. Si l'on donne le *groupe* de l'irrationnelle $x(t)$, peut-on trouver l'équation qui définit $x(t)$, même en assignant à l'avance le genre de cette équation ?

Comment utiliser les résultats sur la résolution de $F(x_1, x_2) = 0$ pour l'équation à n variables

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 ?$$

Résultats simples obtenus par M. Nœther, dans le cas où $F(x_1, x_2)$ est de genre zéro, pour trois variables.

Étude des équations à trois inconnues $f(x, y, z) = 0$: les cas $n = 1, 2, 3$ se résolvent par des fonctions rationnelles, $n = 4$ par une racine carrée (pas d'autre résolution plus simple) ; cas remarquables d'après les valeurs des genres $p^{(n)}$, $p^{(g)}$, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, ...

Scorza (*G.*). — Sur les figures polaires des courbes planes du troisième ordre. (154-157).

Démonstration géométrique d'un théorème de M. London (*M. A.*, t. XXXVI) : Trois cubiques planes ont en général deux hexagones polaires en commun.

Interprétation géométrique d'une relation invariante indiquée par le même auteur : condition pour que deux cubiques puissent être regardées comme les polaires de deux points par rapport à une même quartique.

Love (*A.-E.-H.*). — Note sur un problème d'hydrodynamique. (158).

Prix de la Société des Sciences de Göttingen pour 1901. (159-160).

Lüroth (*J.*). — Études sur la représentation géodésique. (161-180).

Considérant entre deux parties de surfaces F et F′ une correspondance ponctuelle qui possède la propriété suivante :

« En tout point A de F on définit une *direction*, qui n'est pas nécessairement normale à F, l'angle des plans menés par cette direction et deux points quelconques de la surface B, C est égal à l'angle correspondant pour F′ » ; M. Lüroth la nomme *représentation géodésique*, par analogie avec la représentation de la surface terrestre sur un ellipsoïde. Il a montré (*Sitzungsberichte der Münchener Akademie*, Bd. XXXII, 1892, p. 27-52) que la correspondance entre F et F′ est simplement projective, c'est-à-dire ne conserve pas la *forme* des figures. En étudiant à nouveau cette représentation, il cherche, en s'appuyant sur les résultats obtenus, à trouver les conditions qui assurent la similitude des figures tracées sur F et sur F′.

Dans une représentation géodésique, au sens de M. Lüroth, ou bien F′ est semblable à F, ou bien :

1° Les *directions* correspondant aux points de F, et aussi celles de F′, se coupent en un point unique, à distance finie ou non.

2° Ces *directions* correspondent dualistiquement aux cordes d'une courbe gauche du quatrième ordre de première espèce, et forment une partie de la congruence des génératrices rectilignes d'une famille de quadriques homofocales.

Anissimoff (*W.*). — Sur les méthodes d'intégration des équations différentielles ordinaires et quelques applications de la méthode de différentiation. (181-195).

Quelques considérations générales sur des cas où la méthode de différentiation peut conduire à la solution d'une équation différentielle d'ordre n, cas signalés par J.-A. Serret.

Hurwitz (*A.*). — Sur les coefficients du développement des fonctions lemniscatiques. (196-226).

Ces recherches se rapportent aux nombres, analogues aux *nombres de Bernoulli,* définis par l'équation

$$\sum \frac{1}{(r+is)^{4n}} = \frac{(2\omega)^{4n}}{(4n)!} \mathrm{E}_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

où la sommation est étendue à tous les entiers complexes, sauf zéro, et ω désigne la valeur de l'intégrale

$$2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2,622057\ldots.$$

Les E_n se présentent comme coefficients du développement de $\wp(u, g_2, g_3)$ pour $g_2 = 4$, $g_3 = 0$:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{2^4\mathrm{E}_1}{4}\frac{u^2}{2!} + \frac{2^8\mathrm{E}_2}{8}\frac{u^6}{6!} + \ldots + \frac{2^{4n}\mathrm{E}_n}{4n}\frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!} + \ldots,$$

dont la période réelle est ω, de même que les nombres de Bernoulli dans le développement de la cotangente.

L'auteur s'est proposé ici de développer les propriétés des E_n qui correspondent aux théorèmes de Clausen et v. Staudt relatifs aux nombres de Bernoulli. Il parvient en particulier aux résultats suivants :

$$\mathrm{E}_n = \mathrm{G}_n + \frac{1}{2} + \sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p},$$

où G_n est entier, la sommation est étendue aux nombres premiers p de la forme $4k+1$, pour lesquels $p-1$ est un diviseur de $4n$. Le nombre a, qui correspond au facteur p, est donné par le carré impair dans la décomposition

$$p = a^2 + b^2;$$

il est pris avec un signe tel que

$$a \equiv b + 1 \pmod 4.$$

Des indications sont données sur la nature de l'entier impair G_n.

Dantscher (*V. v.*). — Sur la théorie des maxima et minima d'une fonction de *n* variables. (226-252).

Les recherches de MM. A. Mayer et O. Stolz sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction des variables $x_1, \ldots, x_n$, dont le développement commence en $a_1, \ldots, a_n$ par une forme semi-définie en $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$, présente en ce point un véritable maximum ou minimum, ont amené l'auteur à étudier cette question comme il l'avait fait pour le cas de deux variables (*M. Annalen*, t. XLII), c'est-à-dire en déterminant la variation de la fonction sur une droite arbitraire issue du point considéré et dans le voisinage de ce point.

Maschke (*H.*) — Détermination des groupes de collinéations ternaires et quaternaires qui sont holoédriquement isomorphes avec un groupe symétrique ou alterné de substitutions de *n* lettres. (252-298).

Chaque groupe ternaire de transformations linéaires isomorphe holoédrique au groupe symétrique ou au groupe alterné de *n* lettres appartient à l'un des *types* suivants :

Deux $G_{\frac{1}{2}3!}$, engendrés par

$$E_1: \quad \rho z'_1 = z_1, \qquad \rho z'_2 = \varepsilon z_2, \qquad \rho z'_3 = \varepsilon^2 z_3, \qquad \varepsilon^3 = 1$$

ou

$$E'_1: \quad \rho z'_1 = \tau_1 z_1, \qquad \rho z'_2 = \tau_1 z_2, \qquad \rho z'_3 = \tau_1^7 z_3, \qquad \tau_1^9 = 1;$$

un $G_{\frac{1}{2}4!}$ (tétraèdre); un $G_{\frac{1}{2}5!}$ (icosaèdre); un $G_{\frac{1}{2}6!}$, engendré par les transformations correspondantes à

$$E_1 = (123), \qquad E_2 = (12)(34), \qquad E_3 = (12)(45), \qquad E_4 = (12)(56);$$

un $G_{3!}$ engendré par E_1, E_4 et un $G_{4!}$ engendré par E_1, E_2, E_4.

Les groupes quaternaires sont plus nombreux; l'auteur en a donné également un tableau complet avec les transformations génératrices. Il en indique vingt-cinq types distincts : trois $G_{\frac{1}{2}3!}$, trois $G_{\frac{1}{2}4!}$ (tétraèdre), cinq $G_{\frac{1}{2}5!}$ (icosaèdre), un $G_{\frac{1}{2}6!}$, un $G_{\frac{1}{2}7!}$, trois $G_{3!}$, cinq $G_{4!}$ (octaèdre), trois $G_{5!}$, un $G_{6!}$. Comme l'avait déjà montré M. Wiman, il n'y a pas de $G_{\frac{k!}{2}}$ quaternaire pour $k > 7$, ni de $G_{k!}$ pour $k > 6$.

Brodén (*T.*). — Sur la représentation des fonctions réelles avec des zéros formant un ensemble dense, par des produits infinis de fonctions analytiques. (299-320).

Pour chaque zéro, tous les facteurs u_n à partir d'une certaine valeur de *n* s'annulent; l'auteur ajoute qu'on pourrait s'arranger pour qu'un seul facteur du produit infini s'annule pour chaque zéro.

Les produits qu'il considère sont, par exemple, de la forme

$$\prod_{n=1}^{\infty} \varphi[\cos(2\pi K_n x)],$$

où

$$\varphi(t) = t e^{t-1}, \qquad K_n = k_1 k_2 \ldots k_n, \qquad K_0 = 1,$$

les nombres $k_1, \ldots$ formant une suite d'entiers positifs impairs non inférieurs à 3 ; les zéros sont ici tous les points $\frac{2m-1}{4K_n}$, où m est entier positif ou négatif.

Kneser (*A.*). — Déduction de conditions suffisantes du maximum ou du minimum des intégrales simples en partant de l'étude de la variation seconde. (321-345).

Après avoir rappelé que, dans une fonction de m variables où les termes de degré minimum sont du second degré, les termes de degré supérieur ne peuvent être négligés devant ceux-là pour les petites valeurs des variables que *si le discriminant de la forme est différent de zéro*, et à quelles conséquences cette remarque conduit pour l'étude de la variation seconde d'une intégrale simple, M. Kneser montre qu'on peut compléter la théorie de cette variation seconde et en déduire rigoureusement des conditions suffisantes pour un *extrême* de l'intégrale. C'est la première fois, dit-il, que cette question est résolue.

Horn (*J.*). — Recherche de l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre au moyen d'approximations successives. (346-359).

L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y + f\left(\frac{1}{x}, y\right),$$

où f est développable suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et y, et converge quand leurs valeurs absolues sont assez petites, possède une seule intégrale ou une infinité telles que

$$\lim_{x=+\infty} y = 0,$$

suivant que α est positif ou négatif. Chacune de ces intégrales se représente asymptotiquement pour les grandes valeurs de x par une série en général divergente, satisfaisant formellement à l'équation, c'est-à-dire qu'on a

$$y = \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}, \qquad \lim_{x=+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Horn (*J.*). — Sur une équation différentielle du premier ordre. (360-368).

Application des méthodes précédentes à la recherche de l'expression asymptotique des intégrales réelles de l'équation de Briot et Bouquet :

$$x\frac{dy}{dx} = y\,P(x, y),$$

où $P(0, 0) = 0$, et P désigne une série de puissances convergentes pour les petites valeurs de $|x|$ et $|y|$, qui s'annulent en même temps que x.

Franel (J.). — Sur une formule utile dans la détermination de certaines valeurs asymptotiques. (368-387).

Généralisation de la formule par laquelle Dirichlet a exprimé la somme

$$\sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s),$$

au moyen de deux autres où les limites supérieures des indices de sommation sont de l'ordre de $\sqrt{n}$.

L'auteur donne comme application, à une grandeur près d'ordre de $n^{\frac{2}{3}}$, la valeur asymptotique de la somme

$$\sum_{xy\leq n}\left[\frac{n}{xy}\right]$$

sous la forme

$$\frac{n}{2}\left[(\log n + 3c - 1)^2 - 3c^2 + 6c_1 + 1\right],$$

où les c sont les premiers coefficients du développement

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + c + c_1(s-1) + \frac{c_2}{1.2}(s-1)^2 + \ldots,$$

c est la constante d'Euler. Il indique aussi la valeur moyenne du nombre des solutions entières et positives de $xyz = n$.

Anissimoff (W.). — Sur une formule nouvelle relative aux déterminants, et son application à la théorie des équations différentielles linéaires. (388-400).

La formule, qui n'est pas nouvelle, exprime le déterminant D_m du système des formes algébriques

$$\Phi_1^{i_1}.\Phi_2^{i_2}\ldots\Phi_n^{i_n} \qquad (i_1 + i_2 + \ldots + i_n = m)$$

au moyen du déterminant D_1 des formes linéaires à n variables $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$; elle s'écrit

$$D_m = D_1^{\gamma}$$

avec

$$\gamma = C^{n}_{n+m-1}.$$

L'auteur l'applique à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire d'ordre n vérifient une relation algébrique homogène à coefficients constants d'ordre m.

Schur (*F.*). — Sur le théorème fondamental de la géométrie projective. (400-409).

L'auteur, partant des axiomes de Pasch sur la *congruence* de deux figures et laissant tomber l'axiome d'Archimède, montre qu'on peut construire la Géométrie projective en démontrant le théorème de Desargues sur les triangles ou le théorème de Pascal sur une conique réduite à deux droites, comme l'avait affirmé H. Wiener (*Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. I, p. 47).

Morley (*F.*). — Quelques constructions polaires. (410-416).

L'auteur a pour but la construction par la règle du covariant de sept points (*voir M. A.*, t. XLIX celle du covariant de cinq points); il résout d'abord plusieurs problèmes simples, plus importants.

Moore (*E.-H.*). — Concernant l'équation générale du septième et du huitième degré. (417-444).

L'auteur s'est proposé de mettre en évidence l'intérêt que présente, pour l'étude des relations entre les équations $F_8(x) = 0$, $F_7(x) = 0$ et leurs résolvantes $G_{15}(y) = 0$, $H_{15}(z) = 0$ (après adjonction de la racine carrée du discriminant), la considération des systèmes de *ternes* de 7 éléments et des systèmes de *quaternes* de 8 éléments.

Nœther (*M. A.*, t. XV) avait déjà employé ces systèmes pour caractériser simplement les groupes de $F_8(x) = 0$ et $F_7(x) = 0$ après l'adjonction respective de y et de z.

Un système de ternes à t éléments Δ_t est un arrangement de ces éléments trois à trois de façon que chaque couple d'éléments figure dans un terne et dans un seul. Un tel système peut contenir un système $\Delta_{t'}$ ($t' < t$). On dit qu'il est *linéaire* si, avec tout Δ_3 qui y est contenu et un élément extérieur a, on peut construire un Δ_7 contenu entièrement dans le système donné.

Les systèmes *linéaires* de ternes sont de degré $t = 2^k - 1$ et sont tous équivalents (se correspondent bi-univoquement).

Les systèmes Δ_7 tous homologues (en nombre 30) dans le groupe $G^{7}_{\frac{7!}{2}}$ admettent tous un groupe de substitutions G^{7}_{168}, sous-groupe d'indice 15 du groupe alterné de 7 lettres.

Les systèmes de ternes ayant un seul triple en commun forment une *triade;* l'auteur étudie les groupements de ces triades et montre que le groupe de la résolvante $G_{15}(y) = 0$ est donné par un système linéaire de triades.

De même, un système de *quaternes* de 9 éléments est un arrangement de ces éléments 4 à 4, de façon que tout terne figure dans un seul quaterne du système. Les systèmes de quaternes de 8 lettres sont au nombre de 30, le groupe de substitutions qu'ils admettent est un $G^{8}_{8.168}$. On les partage en deux faisceaux de 15 systèmes reliés triadiquement; l'un d'eux définit le groupe de $G_{15}(y) = 0$.

L'auteur signale trois fonctions à 8 valeurs des quinze racines de cette résol-

vante. Pour définir le groupe de $H_{15}(z) = 0$, on peut prendre l'une quelconque de ces trois fonctions des racines $z_1, \ldots, z_{15}$.

Par une méthode simple et naturelle, M. Moore est alors conduit à un solution définitive du *problème des quinze jeunes filles, de Kirkmann;* ce problème classique consiste en effet à déterminer :

1° Tous les systèmes de ternes Δ_{15};

2° Pour chacun d'eux, tous les partages des 15 éléments entre 5 ternes du système;

3° Et enfin, tous les groupements des 35 ternes d'un système en 7 tels groupes de 5 ternes.

Le problème admet 240 solutions.

Hoyer (*P.*). — Nouveaux fondements de la théorie des groupes et des substitutions. (445-462).

Comment ces théories peuvent-elles se développer en partant des résultats de l'auteur sur les *liaisons dans les suites* (*M. A.*, t. XLII), et de la méthode qu'il a indiquée (*M. A.*, t. L), pour traiter analytiquement tous les problèmes de *groupement?*

L'auteur montre ici, en faisant correspondre certaines *suites* aux substitutions, comment le degré de transitivité, l'ordre et la classe d'un groupe se laissent définir comme degrés de certains déterminants, et conclut la première Partie de ses recherches en donnant la condition nécessaire et suffisante pour que des substitutions données forment un groupe. La seconde Partie est simplement une application consacrée aux rapports, avec la théorie des groupes, de la recherche de toutes les expressions d'une même substitution au moyen des substitutions fondamentales d'un groupe.

Lachtin (*L.*). — La résolvante différentielle d'une équation algébrique du sixième degré dont le groupe est d'ordre 360. (463-472).

M. Valentiner a découvert en 1889 un groupe de 360 transformations linéaires isomorphe avec le groupe des substitutions paires de 6 éléments : il est dérivé de deux substitutions fondamentales S, T d'ordres respectifs 5 et 2, et comprend 6 groupes de l'icosaèdre homologues, dont l'un est dérivé de S et

$$T_1 = S^2TS^3TS^2TS^3.$$

M. Wiman a signalé toutes les formes invariantes par ce G_{360}; celle d'ordre minimum est

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^6 + 15x_1x_2x_3^4 - 15x_1^2x_2^2x_3^2 - 10x_1^3x_2^3 - 3\sqrt{5}(x_1^5 - x_2^5)x_3,$$

et la courbe $F = 0$ de genre 10 n'a pas de points singuliers.

Ces résultats ont amené l'auteur à penser qu'il existait des équations du sixième degré (avec le groupe G_{360}), dont les racines étaient des fonctions rationnelles des intégrales d'une certaine équation différentielle linéaire du troisième ordre avec 3 points singuliers.

Considérant le système invariant

$$\begin{gathered} F(u_1, u_2 \text{[illegible]} 0, \\ c_0\Phi^2(u_1, u_2) \text{[illegible]} x, \\ H(u_1, u_2 \text{[illegible]} \end{gathered}$$

où l'on a posé

$$u_1 = \frac{x_1}{x_3}, \qquad u_2 = \frac{x_2}{x_3},$$

H = au hessien de F, Φ = au hessien bordé (d'ordre 30), les trois expressions

$$y_1 = u_1 y_3, \qquad y_2 = u_2 y_3, \qquad y_3 = \sqrt[3]{\frac{\Psi(u_1, u_2)}{H^4(u_1, u_2)}},$$

où la fonction Ψ désigne le déterminant fonctionnel de F, H et Φ, sont des solutions formant un système fondamental de l'équation linéaire déduite de

$$0 = x^2(x^2-1)v''' + (6x-3)x(x-1)v'' + \left(\frac{518}{75}x^2 - \frac{8513}{1200}x - \frac{15}{16}\right)v' + \left(\frac{616}{675}x - \frac{4389}{4320}\right)v,$$

en posant

$$y = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}v.$$

La fonction

$$f = x_3^2 + \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}x_1 x_2,$$

invariante par le groupe de l'icosaèdre, conduit à une résolvante en ω, où

$$\omega = \frac{\{f(u_1, u_2)\}^6}{H(u_1, u_2)},$$

qui est du sixième degré et dont le groupe est d'ordre 360.

Berzolari (*L.*). — Sur les faisceaux de formes binaires cubiques pour lesquels on donne une forme du faisceau syzygétique déterminé par la Jacobienne. (473-477).
(Lettre adressée à M. O. Bolza).

Soit $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ un faisceau de formes cubiques; en désignant par des indices les *rejets* (*Ueberschiebungen*), posons

$$\mathfrak{J} = (f_1, f_2)_1, \qquad J = (f_1, f_2)_3,$$
$$H_{\mathfrak{J}} = (\mathfrak{J}, \mathfrak{J})_2, \qquad i_{\mathfrak{J}} = (\mathfrak{J}, \mathfrak{J})_4, \qquad j_{\mathfrak{J}} = (\mathfrak{J}, H)_4,$$

ce qui entraîne

$$J^2 = 6 i_{\mathfrak{J}};$$

les quatre *éléments de ramification* sont les racines du covariant

$$J\mathfrak{J} + 3H_{\mathfrak{J}},$$

en sorte que la question revient à trouver $\frac{\mathfrak{J}}{J} = \rho$, qui détermine la forme f par la condition

$$\lambda J\mathfrak{J} + \mu H_{\mathfrak{J}} = F,$$

où F est donné.

L'auteur trouve

$$\varphi = \lambda \frac{\left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{36}\right) J^2 F - \mu H_F}{\left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{36}\right)^2 J^4 - \frac{1}{6}\mu^2 i_F},$$

J^2 étant donné par l'équation

$$\left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{36}\right)^3 J^8 - \left(6\lambda^2 + \frac{\mu^2}{3}\right)\left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{36}\right) i_F J^4 + 12\lambda^3\mu\, j_F J^2 - \mu^2 i_F^2 = 0;$$

il applique ce résultat à la recherche des quatre faisceaux de formes binaires cubiques pour lesquels la hessienne de la jacobienne est une forme biquadratique F.

Bolza (*O.*). — Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques du premier ordre aux elliptiques par une transformation du troisième ordre. (477-480).

Un théorème donné par l'auteur dans son travail antérieur de même titre (*M. A.*, t. L) a été démontré déjà par M. Humbert [*Sur les surfaces de Kummer elliptiques* (*Am. J. of Math.*, t. XVI)]; en le rappelant ici, M. Bolza ajoute quelques remarques sur le travail de M. Humbert.

Schilling (*F.*). — Sur la théorie des fonctions S symétriques avec un point singulier accessoire. (481-522).

L'auteur redonne ici la partie essentielle de son Habilitationsschrift : *Théorie analytique et géométrique des fonctions* S *symétriques avec un point accessoire* (*Nova Acta Leopoldina*, Halle, 1897).

Ces fonctions S représentent d'une manière conforme le demi-plan sur le domaine simplement connexe limité par trois arcs de cercle, sans point singulier à son intérieur, ayant sur sa frontière un nœud simple d_1 et trois sommets a_1, b_1, c_1, avec les angles $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Elles satisfont à l'équation de M. Schwarz :

$$\frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 = R(z),$$

avec

$$R(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)} \times \left[\frac{1-\lambda^2}{2}\,\frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{z} - \frac{3}{2}\,\frac{(d-a)(d-b)(d-c)}{z-d} + A\right],$$

a, b, c sont les points de l'axe réel qui correspondent aux sommets a_1, b_1, c_1; d est également un point du même axe dont l'exposant est 2, enfin la constante A est déterminée de façon que le point d soit *point singulier accessoire*, c'est-à-dire que le terme en $\log(z-d)$ manque dans le développement de S au voisinage du point d.

M. Schilling étudie à part le cas singulier $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 1$ et en conclut les circonstances qui se présentent en général quand le point d_1 se trouve à la fois sur deux arcs de cercle frontière sans coïncider avec un sommet.

Darwin (*G.-H.*). — Orbites périodiques. (523-583).

Abrégé du Mémoire de l'auteur (*Acta Mathematica*, t. XXI), auquel il renvoie pour les détails.

Le cas particulier du problème des trois corps considéré dans ce travail est celui où la masse du troisième corps P est infiniment petite vis-à-vis de celles des deux autres, dont l'un J tourne autour de l'autre S, suivant une orbite circulaire dont le plan contient constamment le corps P.

Soient 1 la masse de J, ν celle de S; la vitesse angulaire de J sur son orbite n est donnée par $n^2 = \nu + 1$. Si l'on prend comme unité la longueur SJ, les coordonnées x, y du point P, par rapport à des axes passant par S, SJ étant l'axe des x, satisfont aux équations

$$x'' - 2ny' = \frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

$$y'' + 2nx' = \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

$$2\Omega = \nu\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \rho^2 + \frac{2}{\rho},$$

avec

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \rho^2 = (x-1)^2 + y^2.$$

La vitesse V de P, relativement aux axes qui tournent, est donnée par

$$V^2 = 2\Omega - C,$$

C constante.

Les solutions périodiques du système considéré ne dépendront que de la constante C, et M. Darwin, après les avoir recherchées, les classe d'après les formes des *orbites relatives* pour les diverses valeurs de cette constante.

Indiquons les sujets des divers paragraphes de cet important travail : Équations du mouvement. Partage de l'espace en régions, suivant les valeurs de l'énergie relative de P et suivant la nature de la courbure de l'orbite. Comment tracer une courbe d'après sa courbure. Variation de l'orbite. Stabilité et instabilité d'une orbite; modules d'instabilité, forme de la solution. Orbites périodiques; non périodiques : $C = 39$, $C = 40$. Tables de résultats où C varie de 38 à 40, 50. Formes probables des orbites périodiques pour $C < 38$. Classification des orbites stables de satellites.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'abaissement du nombre des paramètres indépendants dans les équations de Lagrange par élévation de l'ordre du potentiel cinétique. (584-607).

Dans quel cas les équations de Lagrange pour *un potentiel cinétique d'ordre k* [*voir* les Mémoires de l'auteur (*J. de Crelle*, t. 118, 119)] se laissent-elles remplacer après élimination de certains paramètres par d'autres équations de même forme *pour un potentiel cinétique d'ordre* $(k+1)$? M. Kœnigsberger répond ici, dans le cas le plus simple, de la manière suivante :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que, le potentiel cinétique étant

$$H = \omega(p_1, p_2)\,p'_1\,p'_2 + \Omega(p_1, p_2),$$

les équations de Lagrange correspondantes

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_1}\right) + Q_1 = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_2}\right) + Q_2 = 0,$$

où Q_1, Q_2 dépendent de p_1, p_2 seuls, conduisent par élimination de p_1 à une équation pour p_2, qui ait la forme de Lagrange *étendue à un potentiel du second ordre h*

$$\frac{\partial h}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial p'_2}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial h}{\partial p''_2}\right) + q = 0,$$

où q dépend de p_2 seul, sont en général que l'on ait

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial p_1};$$

le potentiel cinétique h est alors

$$h = \int dp''_2 \int (\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p''_2} dp''_2$$

si la première des équations de Lagrange donne

$$p_1 = \varphi(p_2, p'_2, p''_2),$$

et si l'on pose

$$(\omega) = \omega(\varphi, p_2).$$

J. D.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, par MM. les Secrétaires perpétuels.

T. CXLII, 1906 (¹).

Guichard (C.). — Sur la déformation des quadriques. (22-25).

A 8850 7240

Auric. — Théorèmes sur les fonctions entières. (34-35).

A 3610

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXX_2, p. 66.

Lerch. — Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat. (35-38).

A 2810

Hadamard (*J.*). — Sur les transformations planes. (74-77).

A 3230

Stekloff (*W.*). — Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement. (77-79).

B 2470

Seux (*E.*). — Sur la stabilité des aéroplanes et la construction rationnelle des plans sustentateurs. (79-81).

B 2860

Bouquet de la Grye. — Sur l'atterrissage des aéroplanes. (121-122).

B 2860

Goursat (*E.*). — Sur les intégrales infiniment voisines des équations aux dérivées partielles. (137-139).

A 4830

Merlin (*E.*). — Sur une famille de réseaux conjugués à une même congruence. (139-142).

A 8870

Zemplèn (*G.*). — Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz. (142-143).

B 2490

Krebs (*A.*). — Conditions d'établissement et d'application d'un amortisseur progressif à la suspension des véhicules sur routes. (143-145).

B 3640

Kohn (*A.*). — Sur un théorème relatif aux dérivées secondes du potentiel d'un volume attirant. (199-200).

A 3270 B 1220 3200

Guichard (*C.*). — Sur certains systèmes de cercles et de sphères qui se présentent dans la déformation des surfaces. (261-264).

A 8850 7240

Gambier. — Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale est uniforme. (266-269).

A 4820 3610

Duhem (*P.*). — Sur les quasi-ondes de choc et la distribution des températures en ces quasi-ondes. (324-327).

B 2490

Holmgren (*E.*). — Sur un problème du calcul des variations. (331-333).

A 3280

Kohn (*A.*). — Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les déplacements des points de la surface sont donnés. (334-336).

B 3220

Duhem (*P.*). — Quelques lemmes relatifs aux quasi-ondes de choc. (377-380).

B 2490

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions entières. (384-386).

A 3610

Remy (*L.*). — Sur un hessien hyperelliptique. (386-388).

A 8040 8050

Boulanger (*A.*). — Extinction de l'onde solitaire propagée le long d'un tube élastique horizontal. (388-391).

B 2800

Laussedat. — Sur le relevé des monuments d'architecture d'après leurs photographies, pratiqué surtout en Allemagne. (435-438).

A 0080 6840

Boussinesq (*J.*). — Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique homogène et isotrope; étude de l'onde corrélative aux variations de densité. (480-485).

B 3220

Duhem (*P.*). — Sur une inégalité importante dans l'étude des quasi-ondes de choc (491-493).

B 2400-2490 C 2440

Boutroux (*P.*). — Sur l'indétermination d'une fonction d'une variable au voisinage d'une singularité transcendante. (499-501).

A 3610 3620

Fejèr (*L.*). — Sur la série de Fourier (501-503).

A 5610

Dulac (*H.*). — Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point dicritique. (504-505).

A 4870

Fatou (*P.*). — Sur l'application de l'analyse de Dirichlet aux formes quadratiques à coefficients et à indéterminées conjuguées. (505-506).

A 2830 2840 2890

Fredholm (*J.*). — Sur la théorie des spectres. (506-508).

A 5630 B 2040 C 3820

Korn (*A.*). — Sur la vibration d'un corps élastique dont la surface est en repos. (508-510).

A 5630 B 3220

Banachiewitz (*T.*). — Sur un cas particulier du problème des *n* corps. (510-512).

B 1610

Humbert (*G.*). — Sur quelques conséquences arithmétiques de la théorie des fonctions abéliennes (537-541).

A 2840 2890 4070

Boussinesq (*J.*). — Propagation du mouvement autour d'un centre, dans un milieu élastique homogène et isotrope : étude de l'onde produite sans changement de densité. (542-545).

B 3220

Bianchi (*L.*). — Sur la déformation des quadriques. (562-564).

A 8850 7260

Bernstein (*S.*). — Sur les singularités des solutions des équations aux dérivées partielles du type elliptique. (564-565).

A 4840

Boussinesq (*J.*). — Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique, homogène et isotrope; caractères de l'onde totale. (609-612).

B 3220

Duhem (*P.*). — Sur les quasi-ondes de choc au sein des fluides mauvais conducteurs de la chaleur. (612-616).

B 2400 2490 C 2440

Volterra (*V.*). — Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions. (691-695).

A 0000 3200 5660

Juhel-Rénoy. — Sur les affixes des racines d'un polynome de degré n et de sa dérivée. (700).

A 2410 6430

Boggio (*T.*). — Nouvelle solution du problème de l'induction magnétique pour une sphère isotrope. (701-703).

A 5650 C 5400

Henry (*Ch.*). — Sur les lois de l'élasticité musculaire et leur application à l'énergétique. (729-732).

B 0170 0820 Q 4033

Duhem (*P.*). — Sur les quasi-ondes de choc au sein d'un fluide bon conducteur de la chaleur. (750-752).

B 2400 2490 C 2440

Tarry (*G.*). — Sur un carré magique (757-760).

A 2800

Goursat (*E.*). — Sur la théorie des caractéristiques (760-763).

A 4840

Zoretti (*L.*). — Sur les ensembles discontinus (763-764).

A 0430 3600

Fatou (*P.*). — Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables. (765-767).

A 5610

Rémy (*L.*). — Sur les surfaces hyperelliptiques définies par les fonctions intermédiaires singulières (768-770).

A 4070 8060

Cuénot (*G.*). — Sur les déformations des voies de chemins de fer. (770-772).

B 3620

Seux (*E.*). — Sur un mode de construction des plans aéroplanes. (772-773).

B 2860

Schoute (*P.-H.*). — La réduction analytique d'un système quelconque de forces en E_n (826-828).

B 1210 A 6410

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions hypertranscendantes (829-830).

A 4880 2820 3600

Jouguet. — Sur l'accélération des ondes de choc planes. (831-833).

B 2400 C 2400

Picard (*E.*). — Sur quelques problèmes de Physique mathématique se rattachant à l'équation de M. Fredholm. (861-865).

A 4460 5630 6030

Clairin (*J.*). — Sur les transformations des systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre. (867-869).

A 5230

Brillouin (*M.*). — Les courbures du géoïde dans le tunnel du Simplon (916-918).

B 0180 E 5100

Fabry (*E.*). — Courbes algébriques à torsion constantes. (945-948).

A 8440

Taber (*H.*). — Sur les groupes réductibles de transformations linéaires et homogènes. (948-951).

A 2030 1230

Lery (*G.*). — Sur l'équation de Laplace à deux variables (951-953).

A 5650 5660

Chauveau (*A.*). — Rapports simples des *actions statiques* du muscle avec l'énergie qui les produit (977-982).

B 0170 0820 Q 4033

Guichard (*C.*). — Sur les variétés doublement infinies de points d'une quadrique de l'espace à quatre dimensions applicables sur le plan. (982-986).

A 8840 8870

Ocagne (*M. d'*). — Sur un théorème de J. Clark. (988-990).

A 0090 6430

Bochet (*Henri* et *Léon*). — Sur le résultat de l'étude expérimentale d'un ventilateur centrifuge. (990-992).

B 2530

Buhl (*A.*). — Sur la généralisation des séries trigonométriques (1028-1030).

A 5610

Schlesinger (*L.*). — Sur certaines séries asymptotiques (1031-1033).

A 4850 3630

Jouguet. — Sur l'accélération des ondes de choc sphériques.

B 2400 C 2400

Guyou (*E.*). — Sur un effet singulier du frottement. (1055-1056).

B 2500

Vieille (*P.*) et *Liouville* (*R.*). — Influence de la vitesse sur la loi de déformation des métaux. (1057-1058).

B 3620

Haton de la Goupillière. — Centres de gravité de systèmes discontinus. (1069-1075).

B 0410

Chauveau (*A.*). — Rapport simple des actions dynamiques du muscle avec l'énergie qui les produit. (1125-1130).

B 0170 0820 Q 4033

Haton de la Goupillière. — Lieux géométriques de centre de gravité. (1130-1136).

B 0410

Haton de la Goupillière. — Centre de gravité de systèmes spiraloïdes. (1172-1177).

B 0410

Autonne (*L.*). — Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité. (1183-1184).

A 3600 0850

Bourget (*H.*). — Sur une classe particulière de fonctions Θ. (1185-1187).

A 4070

Guccia (*G.-B.*). — Un théorème sur les courbes algébriques planes d'ordre *n*. (1256-1259).

A 7610 8030

Lerch (*M.*). — Sur le problème du cylindre elliptique. (1325-1328).

A 4450

Tzitzéica (*G.*). — Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales. (1401-1403).

A 7640 8840

Gambier (*E.*). — Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. (1403-1406).

A 4880

Léry (*G.*). — Sur l'équation de Laplace à deux variables. (1406-1407).

A 4840 3630

Picard (*E.*). — Sur le problème de Dirichlet généralisé et l'équation de M. Fredholm. (1459-1462).

A 5660 6030

Chauveau (*A.*). — Le *travail extérieur* créé par les actions statiques et dynamiques du *travail intérieur* du moteur muscle. Relation entre l'énergie liée à ces actions et l'énergie qui passe dans le travail extérieur. (1474-1479).

B 0170 0820 Q 4033

Tzitzéica (*G.*). — Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales. (1493-1494).

A 7640 8840

Guccia (*G.-B.*). — Un théorème sur les surfaces algébriques d'ordre *n*. (1494-1497).

A 7640 8040

Gambier (*E.*). — Sur les équations différentielles du deuxième ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est uniforme. (1497-1500).

A 4880

Fournier (*E.*). — Diminution de la vitesse et changement d'assiette des navires par l'action réflexe de l'eau sur le fond. (1500-1503).

B 2850

Tome CXLIII; 1906.

Carrus (*S.*). — Familles de Lamé à trajectoires planes, les plans passant par un point fixe. (23-26).

A 8830

Maillet (*E.*). — Sur la classification des irrationnelles. (26-28).

A 2920

Schule (*F.*). — Recherches sur le béton armé et l'influence de l'enlèvement des charges. (28-30).

B 3620

Alliaume. — Influence de la tension superficielle sur la propagation des ondes parallèles à la surface d'une lame liquide. (30-32).

B 2480

König (*J.*). — Sur la mesure des ensembles. (110-112).

A 0430

Buhl (*A.*). — Sur le caractère arbitraire des développements des solutions, même uniques, de la Physique mathématique et sur de nouvelles propriétés des séries trigonométriques généralisées. (162-165).

A 5600 5610

Waelsch (*E.*). — Extension de l'algèbre vectorielle à l'aide de la théorie des formes binaires avec des applications à la théorie de l'élasticité. (204-207).

A 0840 2050 1230 B 3200

Petrovitch (*M.*). — Sur une classe de séries entières. (208-210).

A 3610

Zinger (*N. de*). — La projection de Lagrange appliquée à la Carte de la Russie d'Europe. (211-213).

A 8840 J 84

Duhem (*P.*). — Sur les deux chaleurs spécifiques d'un milieu élastique faiblement déformé. (335-339).

B 3210 C 0400

Duhem (*P.*). — Sur les deux chaleurs spécifiques d'un milieu élastique faiblement déformé; extensions diverses de la formule de Reech. (371-374).

B 3210 C 0400

Rémoundos (*G.*). — Sur la croissance des fonctions multiformes. (391-394).

A 3620

Buhl. (*A.*). — Application du procédé de sommation de M. Borel aux séries trigonométriques généralisées (445-447).

A 5610

Zeuthen (*H.-G.*). — Le principe de correspondance pour une surface algébrique. (491-495).

A 8040

Zeuthen (*H.-G.*). — Le principe de correspondance pour une surface algébrique. (535-539).

A 8040

Rothe (*R.*). — Sur la transformation de M. Darboux et l'équation fondamentale des surfaces isothermiques. (543-546).

A 8860

Fatou. — Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. (546-548).

A 6030

Bertin (*E.*). — Du travail emmagasiné dans la houle trochoïdale. (565-568).

B 2480

Raffy (*L.*). — Surfaces rapportées à leurs lignes de longueurs nulles et surfaces isothermiques de première classe. (575-578).

A 8860

Rothe (*R.*). — Sur les surfaces isothermiques. (578-581).

A 8860

Riquier. — Sur les conditions d'intégrabilité complète de certains systèmes différentiels. (581-583).

A 4800

Bianchi (*L.*). — Sur la déformation des quadriques. (633-635).

A 8850 8455

Clairin (*J.*). — Sur les transformations de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (636-637).

A 5230

Traynard (*E.*). — Sur le système d'intégrales de différentielles totales appartenant à une surface hyperelliptique. (637-639).

A 8060

Dautriche. — Sur les vitesses de détonations des explosifs. (641-644).

B 0160

Autonne (*L.*). — Sur certains groupes linéaires. (670-672).

A 0850 1230

Korn (*A.*). — Sur les potentiels d'un volume attirant dont la densité satisfait à l'équation de Laplace. (672-674).

B 1220

Riesz (*F.*). — Sur les ensembles de fonctions. (738-741).

A 0430 3200

Gambier. — Sur les équations différentielles du second ordre et de premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. (741-743).

A 4820

Lefèvre (*J.*). — Sur l'équivalent moteur du travail résistant en énergétique animale (757-760).

B 2010 Q 4033

Lattès (*E.*). — Sur les courbes qui se reproduisent périodiquement par une transformation (X, Y; x, y, y'). (765-767).

A 5230

Remy (*L.*). — Sur une famille de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre. (767-769).

A 8060 7640

Duhem (*P.*). — Sur l'histoire du principe employé en Statique par Torricelli. (809-812).

B 0010

Clairin (*J.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui admettent un groupe d'ordre pair de transformations de contact. (818-820).

A 4840 5230

Le Roux (*J.*). — Sur l'intégration des équations différentielles. (820-822).

A 4820

Maillet (*E.*). — Sur certains nombres transcendants. (873-874).

A 2920

Raffy (*L.*). — Remarques sur la recherche des surfaces isothermiques. (874-877).

A 8860

Hurwitz (*A.*). — Sur les points critiques des fonctions inverses. (877-879).

A 3610 3620

Cousin (*P.*). — Sur les fonctions périodiques. (879-881).

A 4070

Duhem (*P.*). — Sur quelques découvertes scientifiques de Léonard de Vinci. (946-949).

B 0010

Bernstein (*F.*). — Sur la théorie des ensembles. (953-955).

A 0430 0000

Schmidt (*E.*). — Sur la puissance des systèmes orthogonaux de fonctions continues. (956-957).

A 3210 0430

Fejèr. — Sur le calcul des limites (957-959).

A 4810

Rivereau. — Sur une classe d'équations différentielles réductibles aux équations linéaires. (959-961).

A 4820 4850

Picard (*E.*). — Rapport sur le grand prix des Sciences mathématiques : *Perfectionner en un point important l'étude de la convergence des fonctions continues algébriques*. (998-1004).

A 3220 3610

Boussinesq (*J.*). — Rapport sur le prix Boileau. (1006-1007).

B 2810

Picard (*E.*). — Sur la détermination des intégrales des équations du type ellyptique par certaines conditions aux limites. (1109-1111).

A 5650 5660

Painlevé (*P.*). — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (1111-1117).

A 4880

Hadamard (*J.*). — Sur une méthode de calcul des variations. (1127-1129).

A 3280

Clairin (*J.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui admettent un groupe d'ordre impair de transformations de contact. (1130-1132).

A 5230

Lecornu (*L.*). — Sur l'extinction du frottement. (1132-1133).

B 1620

Violle (*P.*) *et Liouville* (*R.*). — Sur une méthode de mesure des résistances opposées par les métaux à des déformations rapides. (1218-1221).

B 3620

J. T.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXXIV, 1906 (¹).

Fontené (*G.*). — Sur une configuration remarquable dans l'espace (3-16).

I. Les trois couples de sommets d'un quadrilatère complet sont trois couples de points tels que la droite joignant un point d'un couple à un point d'un autre passe par un point du troisième; le nombre de ces droites est 2^2. La figure corrélative, en géométrie plane, est le quadrangle, avec ses trois couples de côtés. M. Fontené obtient, par extension à l'espace, une figure qui est sa propre corrélative, et qu'il appelle *octuple gauche complet*.

Elle offre quatre couples de points tels que tout plan passant par trois points appartenant à trois couples différents passe par un point du couple restant; ces plans sont au nombre de 2^3. Corrélativement, ces quatre couples de points sont tels que le point commun à trois plans, pris dans trois couples, appartient à un plan du couple restant. La figure dépend de 17 paramètres.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXX_2, p. 81.

Elle donne lieu de trois manières différentes à un *polyèdre* Π ou polyèdre de genre *un*, ayant 8 sommets, 8 faces et 16 arêtes ($F+S=A$), polyèdre dont les faces sont des quadrilatères et dont les angles solides sont des angles tétraèdres.

II. Les quadrilatères complets inscrits à une cubique plane donnent lieu sur cette courbe à une correspondance bien connue (*couples steinériens*). Une correspondance analogue résulte, sur une biquadratique gauche, de la considération des octuples complets inscrits à la courbe : ces octuples sont en nombre triplement infini, et l'on retrouve ainsi les trois involutions auxquelles conduit la représentation de la courbe par les fonctions elliptiques.

III. Un quadrilatère complet étant inscrit dans une cubique plane, si l'on inscrit une conique dans ce quadrilatère, il existe une infinité de quadrilatères complets inscrits dans la cubique et circonscrits à la conique. De même, un octuple gauche complet étant inscrit dans une biquadratique Ω, si l'on considère une quadrique (S) tangente aux 8 plans de cet octuple, il existe une double infinité d'octuples gauches complets inscrits dans la biquadratique et circonscrits à la quadrique. Ce théorème se rattache aux recherches de M. G. Humbert sur les conditions pour qu'il existe une double infinité de tétraèdres inscrits dans une biquadratique et circonscrits à une quadrique.

IV. Le problème qui consiste à construire un *polyèdre* Π inscrit dans une quadrique et circonscrit à une autre rentre dans un problème général que M. Fontené a précédemment abordé (*Bulletin de la Soc. Mathém. de France*, t. XXXII, p. 284) en vue d'étendre à l'espace, *au moyen de polyèdres*, le théorème des polygones de Poncelet.

Bricard (*R.*). — Sur certains systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadriques. (17-30).

Un système linéaire ponctuel de quadriques étant représenté par l'équation

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0,$$

où les S_i sont les premiers membres des équations de quatre quadriques fixes, les λ_i des coefficients arbitraires, ce système comprend en général *dix* quadriques formées de deux plans (Reye). Peut-il arriver qu'un tel système (S) contienne une infinité de quadriques réduites à deux plans et comment est-il alors défini ?

Tel est le problème que M. Bricard se pose et qu'il traite sous la forme corrélative : *trouver les systèmes linéaires tangentiels, à trois paramètres, de quadriques, qui contiennent une infinité de quadriques réduites à deux points*. Désignant par (Σ) un tel système, l'auteur établit d'abord qu'un système (Σ), s'il existe, est défini, si l'on appelle *points conjugués* d'une biquadratique gauche deux points dont les arguments elliptiques diffèrent d'une même demi-période, par les quatre quadriques réduites à deux points qui constituent quatre couples quelconques de points conjugués sur une telle biquadratique. Il prouve ensuite que tout système défini de cette façon contient une infinité de quadriques réduites à deux points; l'une quelconque de ces quadriques dégénérées consiste en deux points conjugués sur la biquadratique gauche (C).

Tout système (Σ) contient ∞^3 quadriques et ∞^2 coniques. Les quadriques sont celles qu'on peut inscrire dans les divers octaèdres qui ont leurs sommets opposés conjugués sur (C). Les coniques sont inscrites dans les quadrilatères plans ayant leurs sommets opposés conjugués sur (C).

Un cas remarquable est celui où l'une de ces coniques se réduit à l'ombilicale. Voici les résultats que l'auteur énonce à ce sujet.

Soit $(abc\ a'b'c')$ *un octaèdre, tel que ses sommets opposés soient symétriques par rapport à une droite* (D). *Il existe une infinité de quadriques de révolution inscrites dans cet octaèdre. Leurs foyers ont pour lieu une biquadratique* (C) *qui contient les sommets de l'octaèdre et qui admet* (D) *pour axe de symétrie. Les deux foyers d'une quadrique de révolution inscrite dans l'octaèdre sont symétriques par rapport à* (D).

Les quadriques inscrites dans l'octaèdre sont en nombre doublement infini. L'ensemble des quadriques qui leur sont homofocales constitue un système (Σ) *linéaire tangentiel, à trois paramètres, qui contient une infinité de quadriques réduites à deux points : deux tels points sont sur* (C) *et symétriques par rapport à* (D).

Les diverses coniques du système (Σ) *sont les focales des quadriques inscrites à l'octaèdre.*

M. Bricard indique en terminant comment les résultats qui précèdent peuvent s'étendre à l'espace à n dimensions.

Boutroux (*Pierre*). — Propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un. (30-39).

L'objet principal de cette Note est la démonstration du théorème suivant :

On considère une fonction

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

holomorphe dans un cercle C *ayant son centre à l'origine. On suppose qu'elle ne prend ni la valeur zéro ni la valeur un à l'intérieur de ce cercle. Soit* M *le module maximum que prend* $F(x)$ *dans un cercle concentrique et intérieur à* C. *Ce module maximum est inférieur à un nombre fixe qui ne dépend que du coefficient* a_0.

Cette proposition conduit, entre autres conséquences, à celle par laquelle M. Landau a récemment généralisé le théorème de M. Picard, et qui s'énonce ainsi :

Soit une fonction entière

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

pour laquelle on suppose $a_0(a_0 - 1)\, a_1 \neq 0$. Il existe un nombre R indépendant des coefficients $a_2, a_3, \ldots$, c'est-à-dire fonction de a_0 et de a_1 seulement, tel que $F(x)$ prenne sûrement l'une des valeurs zéro et un dans le cercle de rayon R ayant son centre à l'origine.

Lecornu (*L.*). — Sur l'herpolhodie. (40-41).

Démonstration simple du théorème classique sur l'absence de points d'inflexion dans cette courbe.

De Sparre. — Note au sujet du valet de menuisier. (41-47).

Introduction. — M. Painlevé avait signalé un certain nombre de problèmes où les lois du frottement de glissement semblent, à première vue, conduire à une impossibilité ou à une indétermination.

Toutefois, M. Lecornu a montré, dans deux communications des 6 mars et 27 mars 1905, à l'Académie des Sciences, que cette impossibilité disparaît si l'on admet que, lorsque deux corps en mouvement sont mis en contact, le coefficient de frottement prend la valeur limite relative au mouvement, à moins qu'il n'existe une valeur plus petite de ce coefficient de frottement qui rende certaines des réactions infinies, auquel cas il se produit des percussions entraînant un arcboutement dynamique, entièrement semblable aux arcboutements statiques depuis longtemps connus.

J'ai eu également occasion de revenir sur cette question dans une communication du 31 juillet 1905, et de montrer que l'indétermination disparaît, aussi bien que l'impossibilité, si l'on tient compte du mouvement antérieur qui a produit les circonstances initiales.

Je me propose, dans cette petite Note, de revenir en quelques mots sur la théorie d'un appareil bien connu, le valet de menuisier, qui présente ce phénomène remarquable de pouvoir éprouver soit l'arcboutement statique seul, soit en même temps l'arcboutement statique et l'arcboutement dynamique; de plus, cet appareil se prêterait facilement à des expériences sur la question, si l'on jugeait utile d'en organiser.

Hadamard. — Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles. (45-52).

Dans les *Leçons sur la propagation des ondes*, l'auteur a étendu la notion de *caractéristique* aux systèmes de p équations à p fonctions inconnues, qui sont résolubles par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé des fonctions inconnues relativement à une même variable indépendante. Mais il y a des systèmes pour lesquels cette résolution n'est pas possible.

En vue d'étendre à certains d'entre eux la notion de caractéristiques, M. Hadamard considère ici trois fonctions inconnues u, v, w de n variables indépendantes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant à trois équations du second ordre, linéaires par rapport aux dérivées secondes.

Si l'on se donne les valeurs de u, v, w et de leurs dérivées premières sur la multiplicité

$$x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

les dérivées secondes p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} de u, v, w par rapport à la variable x_n vérifient trois équations linéaires, dont le déterminant H dépend des dérivées premières. La supposition que H soit *identiquement nul* caractérise les systèmes dont il s'agit maintenant. En vertu de cette hypothèse, les équations en p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} forment un système indéterminé; leur solution dépend en général d'un paramètre ρ. La considération des dérivées troisièmes montre que

φ doit vérifier, sur la multiplicité $x_n = f$, une équation finie et du second degré $N = 0$. M. Hadamard dit que cette multiplicité est *caractéristique* si l'équation $N = 0$ a ses deux racines égales.

Cette définition, appliquée au système bien connu qui s'offre dans le problème de la déformation des surfaces, donne comme caractéristiques les lignes asymptotiques, conformément à l'énoncé classique établi par la réduction du système à une équation unique.

Potron. — Sur une formule générale d'interpolation. (52-60).

L'auteur donne l'expression générale de certains polynomes $P_{p,q}(x)$ que M. Borel a définis dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles* (p. 82).

Combebiac. — Sur l'application des équations de Lagrange à la détermination des actions exercées par un fluide parfait incompressible, animé d'un mouvement irrotationnel. (63-70).

Introduction. — C'est dans l'ouvrage de Thomson et Tait : *Natural Philosophy,* qu'il a été fait, pour la première fois, application des équations de Lagrange à la détermination des actions exercées sur ses parois par un fluide parfait incompressible, animé d'un mouvement irrotationnel et acyclique. Si $q_1, q_2, \ldots, q_r$ désignent les paramètres qui déterminent la position des parois, la force vive T_1 du fluide s'exprime, dans le cas spécifié, par une fonction quadratique des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ des paramètres, et les forces extérieures Q relatives aux paramètres q et faisant équilibre aux forces dues à l'inertie du fluide ont pour expression

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q} - \frac{\partial T_1}{\partial q},$$

exactement comme si les paramètres q étaient ceux du système formé par le fluide.

Dans le cas où le mouvement du fluide n'est pas acyclique, la force vive du fluide peut, comme sa vitesse, être décomposée en deux parties qui se déterminent indépendamment l'une de l'autre et dont l'une T_1 correspond à un mouvement acyclique dépendant uniquement du mouvement des parois, tandis que l'autre T_0 ne dépend que de la position de ces parois et des modules de circulation, c'est-à-dire des valeurs de la circulation le long de certaines lignes fermées convenablement choisies. Les équations de Lagrange ne sont plus applicables, et Carl Neumann a établi la formule générale donnant, dans ce cas, l'expression des actions exercées par le fluide sur ses parois (y compris celles des corps qui pourraient être baignés dans le fluide). Lorsque la partie T_1 de l'énergie hydrocinétique qui correspond à la partie acyclique du mouvement s'annule (parois au repos) ou est négligeable par rapport à l'autre (parois limitant des corps filiformes), la formule de Neumann se réduit à

$$Q = \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

où Q désigne la force extérieure relative au paramètre q; T_0 est exprimée en

fonction du paramètre q et des modules de circulation, qui d'ailleurs doivent être considérés comme constants si le fluide est parfait (dépourvu de viscosité).

Cette formule diffère par le signe de son second membre de celle qui résulterait de l'application pure et simple des équations de Lagrange, et l'on sait que cette différence de signes se retrouve lorsqu'on compare les forces d'origine hydrodynamiques aux forces électromagnétiques dues aux courants électriques.

On se propose de montrer que les équations de Lagrange sont encore applicables dans le cas étudié, moyennant un changement de variables dans l'expression de l'énergie hydrocinétique, de sorte que la masse fluide s'assimile alors à un système cyclique dont les coordonnées contrôlables seraient les paramètres q déterminant la position des parois.

Hadamard. — Sur les transformations ponctuelles. (71-84).

Les équations

$$(1) \qquad X_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

font correspondre à un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un espace e_n à n dimensions un point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'un espace analogue E_n, point qui peut être appelé *l'image* du premier.

Ces équations sont-elles résolubles en $x_1, x_2, \ldots, x_n$? Peut-on faire à tout point de E_n correspondre d'une manière univoque un point de e_n auquel il serve d'image?

Telles sont les deux questions que se pose l'auteur.

On peut d'abord formuler une première condition : *si μ_ρ désigne le minimum du rapport*

$$\mu = \sqrt{\frac{dX_1^2 + dX_2^2 + \ldots + dX_n^2}{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}}$$

sur la sphère $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2$ de l'espace e_n, il faut que l'intégrale

$$\int_0^\infty \mu_\rho \, d\rho$$

soit infinie. Alors, une ligne de longueur infinie tracée dans e_n ne pourra avoir pour image une ligne de longueur finie.

Il s'en faut de beaucoup que cette condition soit suffisante. Mais, si elle est vérifiée et si *de plus μ est différent de zéro en tout point de l'espace e_n*, l'inversion des équations (1) est possible et univoque.

Après avoir établi cette proposition par un raisonnement classique à peine modifié, M. Hadamard expose le mode de démonstration qu'il avait résumé dans une Note antérieure des *Comptes Rendus* (8 janvier 1906). Ce raisonnement, relatif au seul cas de deux équations

$$(1)' \qquad X_1 = f_1(x_1, x_2), \qquad X_2 = f_2(x_1, x_2),$$

est plus compliqué, mais il a l'avantage de montrer comment se comporte le prolongement d'une transformation telle que (1) à partir du moment où elle

a cessé d'être biunivoque : ce prolongement, tout d'abord possible, doit nécessairement conduire à une impossibilité lorsqu'on veut l'étendre indéfiniment.

Goursat (*E.*). — Remarques sur quelques théorèmes d'existence. (85-108).

L'auteur commence par étudier le développement d'une fonction analytique F (x, y) de deux variables, holomorphe lorsque la variable x reste dans un cercle de centre x_0 de rayon R et y daus un autre domaine D_y. Le développement de Taylor

$$F(x, y) = F(x_0, y) + \sum_1^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right)_{x=x_0}$$

est convergent et représente une fonctiou holomorphe dans le domaine D_y. Ce résultat est valable quel que soit le nombre des variables.

M. Goursat aborde ensuite l'équation

$$p = f(x, y, z, q)$$

et en cherche une intégrale se réduisant pour $x = x_0$ à une fonction $\varphi(y)$ qu'on peut supposer identiquement nulle moyennant une transformation simple. En supposant que $f(x, y, z, q)$ est holomorphe quand y reste dans un domaine fermé D_y, tandis que les modules de x, x_0, z, q ne dépassent pas certaines valeurs données, on détermine de proche en proche par de simples différentiations les coefficients d'une série

$$z = \varphi_1(y)(x-x_0) + \varphi_2(y)(x-x_0)^2 + \ldots + \varphi_n(y)(x-x_0)^n + \ldots,$$

qui satisfait formellement à l'équation $p = f$, et l'on a le théorème suivant

Si D'_y est un domaine quelconque intérieur à D_y, limité par une ou plusieurs courbes n'ayant aucun point commun avec la frontière de D_y, on peut associer à ce domaine D'_y un nombre positif R tel que la série z soit convergente pour tout point y de D'_y pourvu que le module $|x-x_0|$ soit inférieur ou égal à R; elle représente une fonction holomorphe de x et y dans ces domaines.

Comme vérification, M. Goursat traite directement l'équation

$$p = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{q}{\rho}\right)} - M,$$

où M, a, b, c, ρ sont des nombres positifs, qui admet une intégrale Z (x, y) holomorphe dans le domaine du point $x = 0$, $y = 0$, et se réduisant identiquement à zéro pour $x = 0$. A tout nombre positif $\theta < 1$ on peut associer un autre nombre positif η, tel que l'intégrale Z (x, y) soit sûrement holomorphe lorsque les modules $|x|$ et $|y|$ ne dépassent pas respectivement les nombres θb et η. De cet énoncé on peut inversement conclure celui qui précède.

La méthode de M. Goursat s'étend à un système d'équations aux dérivées

partielles d'ordre quelconque, résoluble par rapport aux plus hautes dérivées de toutes les fonctions relativement à la même variable.

L'auteur indique diverses applications aux équations différentielles ordinaires, et obtient des résultats qui se généralisent en théorèmes d'existence pour les équations aux dérivées partielles. Ainsi soit

$$s = F(x, y, z, p, q, r, t) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \alpha_1 p + \beta_1 q + ar + bt + \ldots$$

une équation du second ordre, où F désigne une fonction holomorphe dans le voisinage des valeurs

$$x = y = z = p = q = r = t = 0,$$

et s'annulant pour ces valeurs. On peut développer suivant les puissances de x et y en série convergente, sous la condition $4|ab| < 1$ déjà obtenue par M. Riquier, l'intégrale holomorphe dans le domaine des valeurs $x = 0$ ou $y = 0$. C'est le problème auquel on est ramené quand on cherche à déterminer une intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre passant par deux courbes données qui se coupent sans être tangentes en leur point commun.

De Sparre. — Note au sujet du frottement de glissement. (108-132).

L'auteur répond à deux communications faites par M. Painlevé (*Académie des Sciences,* 21 août-20 octobre 1905). Il traite à nouveau les exemples donnés dans ces deux Notes et conclut :

« En résumé, l'hypothèse de M. Lecornu nous donne une image des phénomènes qui, pour le détail de ceux qui se produisent au moment du contact des corps, peut être moins exacte que celle que l'on obtient en tenant compte de l'élasticité des liaisons; mais, en revanche, elle nous permet de prévoir d'une façon beaucoup plus simple, et avec une exactitude très suffisante, le résultat final qui se produit après cette période de mise en contact des corps, ce qui est le but principal que l'on se propose. »

Hadamard. — Sur le principe de Dirichlet. (135-139).

La possibilité du problème de Dirichlet (formation d'une fonction harmonique dans une aire donnée S et prenant des valeurs données sur le contour) peut, d'après M. Hilbert, être démontrée par la méthode même qui avait servi à Riemann et qui consiste à prouver directement que l'intégrale

$$I = \int\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy,$$

étendue à l'aire donnée S, admet un minimum.

Or il peut arriver que la méthode de M. Hilbert devienne inapplicable, parce qu'il n'existe aucune fonction u qui donne à l'intégrale I un sens : c'est ce que M. Hadamand établit en prenant pour S un cercle de rayon un, bien qu'alors le problème de Dirichlet admette effectivement une solution.

De Montcheuil. — Les anticaustiques du paraboloïde hyperbolique équilatère. (139-152).

Dans la première section de ce Mémoire, l'auteur rappelle ou démontre les propositions suivantes :

1° *Le paraboloïde équilatère défini par l'équation* $4az = y^2 - x^2$ *est la surface moyenne de la cyclide de Dupin.*

2° *Il admet cette surface pour anticaustique, les rayons incidents étant parallèles à l'axe des z.*

3° *La caustique est formée du système de deux paraboles situées dans deux plans perpendiculaires et telles que le sommet de chacune d'elles soit au foyer de l'autre.*

4° *Les cosinus directeurs des rayons réfléchis et les coordonnées de l'anticaustique s'expriment rationnellement en fonction des coordonnées de la projection de la surface dirimante sur le plan des xy.*

5° *Les coordonnées du paraboloïde et celles de la cyclide sont liées par une transformation birationnelle qui fait correspondre point par point deux familles de sections paraboliques de la quadrique aux cercles qui sont les lignes de courbure de la cyclide.*

Il est établi, en outre, une correspondance birationnelle entre le paraboloïde de révolution et la sphère qui a pour centre le foyer de ce paraboloïde.

La seconde section traite des anticaustiques de diverses courbes tracées sur le paraboloïde et peut être résumée dans l'énoncé suivant :

Les rayons parallèles à l'axe des z se réfléchissent sur les paraboles de la surface situées dans des plans parallèles aux plans coordonnés suivant les génératrices d'un cône de révolution. Ces cônes ont leur sommet sur l'une des paraboles auxquelles se réduisent les deux nappes de la développée de la cyclide de Dupin normale aux rayons réfléchis. Ils enveloppent la seconde de ces paraboles, la parabole de section, et admettent pour sections droites leurs intersections avec la cyclide et toutes les surfaces qui lui sont parallèles.

Fontené (G.). — Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre *un*. (153-163).

Dans un Mémoire antérieur (*Bull. Soc. Math.*, t. XXXII, 1904) l'auteur a prouvé que l'extension du théorème de Poncelet à l'espace a des chances de réussir, si l'on emploie des polyèdres de genre *un*, dont les faces sont des quadrilatères et dont les angles solides sont des angles tétraèdres, et il a établi effectivement que cette extension réussit pour des polyèdres ayant 9 faces et 9 sommets.

Dans le présent travail, M. Fontené montre qu'il en est de même pour les polyèdres ayant 8 faces et 8 sommets.

Rudzki (M. P.). — Note sur la chute des corps pesants. (163-164).

Si dans la solution de ce problème on tient compte de la rotation de la Terre.

il convient aussi d'introduire les composantes des forces qui produisent les marées.

Petrovitch (Michel). — Sur certaines transcendantes entières (165-177).

L'auteur étudie, sous le nom de *transcendantes* $\Delta(z)$, les séries entières

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

susceptibles d'être représentées par l'intégrale à limites réelles

$$\Delta(z) = \int_a^b u(t) e^{z r(t)} \, dt,$$

les fonctions $u(t)$ et $r(t)$ étant réelles, finies et de signe invariable entre a et b. La dérivée d'une transcendante $\Delta(z)$ est une transcendante $\Delta(z)$. Si $r(t)$ ne s'annule pas entre a et b, limites comprises, l'intégrale de $\Delta(z)$ est, à une constante additive près, une transcendante $\Delta(z)$. *Toute transcendante* $\Delta(z)$ *est de genre inférieur à deux.*

Pour x réel, l'ordonnée de la courbe $y = \Delta(z)$ varie constamment dans le même sens et l'axe des x est une asymptote.

Les équations linéaires à coefficients constants qui ont pour second membre une transcendante $\Delta(z)$ *s'intègrent, en général, à l'aide des transcendantes* $\Delta(z)$.

Après avoir appliqué ces principes à la transcendante remarquable

$$\Delta_1(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

M. Petrovitch considère, après Laguerre, les séries entières

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

à coefficients réels, positifs et tels que les diverses équations

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_k z^k = 0$$

aient toutes leurs racines réelles, quel que soit leur degré k. Désignant ces séries par le nom de *fonctions* $\Omega(z)$, il prouve que *les coefficients d'une fonction* $\Omega(z)$ *quelconque sont au plus égaux à ceux de la fonction*

$$A_0 + A_1 z \, \Delta_1\left(\frac{A_1 z}{A_0}\right),$$

Δ_1 étant la transcendante définie ci-dessus. *Toute fonction* $\Omega(z)$ *est de genre zéro ou un.*

L'auteur donne ensuite pour le module et pour les coefficients d'une pareille fonction des limites supérieures plus précises que celles qu'avait obtenues Laguerre.

l établit que *toute fonction* $\Omega(z)$ *croît moins vite que la fonction*

$$A_1\sqrt{\frac{2\pi A_0}{A_1 e}}\,\frac{e^{hz}}{\sqrt{z}}, \qquad h = \frac{A_1}{A_0 e},$$

et indique en terminant que *le produit des modules des k premiers zéros de* $\Omega(z)$ *est égal ou supérieur à* $0{,}6961\,A_0^k : A_1^k$.

Remy (*L.*). — Sur quelques théorèmes de géométrie plane liés à la surface de Kummer. (177-187).

Une surface de Kummer, projetée de l'un de ses points doubles sur un plan tangent singulier, a pour contour apparent six droites tangentes à une même conique Γ et formant deux triangles inscrits dans la conique de contact C du plan tangent singulier. C'est par cette considération que l'auteur établit divers théorèmes de géométrie plane, dont voici quelques-uns :

Toute cubique qui passe par les sommets de deux triangles inscrits à une conique Γ *coupe en outre leurs côtés en six points situés sur une conique bitangente à la conique* Γ.

Si deux triangles sont inscrits à une conique, il existe une famille trois fois infinie de quartiques à la fois inscrites et circonscrites aux deux triangles.

Les triangles inscrits et circonscrits à une quartique C_4 *se répartissent en* 36 *groupes. Deux triangles d'un même groupe sont inscrits à une conique* C *et leurs points de contact avec* C_4 *sont également situés sur une conique* Q. *Les quatre autres points d'intersection de* C_4 *avec les coniques* C *et* Q *sont en ligne droite. Les six sommets et les six points de contact sont situés sur une cubique.*

Sanielevici. — Remarques sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles. (187-191).

M. Laisant a montré (*Bull. Soc. Math. de France*, t. XX) que toute fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui est la somme de p fonctions *homogènes* vérifie une équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre p.

$$(1) \qquad a_0 u^{(p)} + a_1 u^{(p-1)} + \ldots + a_{p-1} u^{(1)} + a_p u = 0 \qquad (a_0, \ldots, a_p = \text{const.})$$

où l'on a posé symboliquement

$$u^{(k)} = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u.$$

Réciproquement, toute équation telle que (1) a pour intégrale générale une somme de p fonctions homogènes, dont les degrés sont les racines d'une équation algébrique; M. Laisant n'a pas examiné le cas où cette équation a des racines multiples.

Par l'emploi des *variables canoniques* de Sophus Lie

$$z_1 = \log x_1, \qquad z_2 = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \ldots, \qquad z_n = \frac{x_n}{x_1},$$

M. Sanielevici substitue à l'équation (1) l'équation *à coefficients constants*

$$\frac{\partial^p u}{\partial z_1^p} + b_1 \frac{\partial^{p-1} u}{\partial z_1^{p-1}} + \ldots + b_p u = 0$$

qui ne contient que les dérivées par rapport à z_1. On sait l'intégrer, aussi bien quand son équation a des racines multiples que quand elle n'en a pas. Par là se trouve complétée la proposition de M. Laisant. La méthode s'étend d'elle-même à une infinité d'autres classes d'équations aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants relativement à un symbole *quelconque*

$$\delta = \sum_1^n X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Combebiac. — Remarques sur la question des principes de *l'analysis situs.* (191-196).

Rémoundos (G.). — Sur la représentation uniforme des courbes transcendantes. (197-204).

M. Poincaré a établi (*Bull. Soc. Math.*, t. XI) qu'il est toujours possible de faire une représentation uniforme d'une fonction multiforme quelconque : étant donnée une équation *quelconque*

$$f(z, u) = 0,$$

définissant une fonction *analytique* u de la variable z, on peut trouver une troisième variable t, telle que u et z soient des fonctions *uniformes*

$$u = \mathrm{H}(t), \qquad z = \mathrm{M}(t).$$

M. Rémoundos suppose que les fonctions H et M ne présentent pas de points essentiels *isolés* et dit qu'une valeur u_0 est *exceptionnelle générale* pour une fonction uniforme $u = \sigma(t)$ lorsque l'équation $u_0 = \sigma(t)$ n'admet *qu'un nombre fini de racines dans tout le plan.*

D'après l'hypothèse faite sur H et M, l'ensemble des valeurs *exceptionnelles générales* de chacune de ces fonctions peut être quelconque, continu ou discontinu; il peut former des lignes, des aires recouvrant une partie ou la totalité du plan. C'est l'étude de cet ensemble qui fait l'objet du présent travail, destiné à compléter certaines indications sommaires que l'auteur avait données dans sa thèse de doctorat : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1904).

Autonne (Léon.) — Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes. (205-212).

Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (28 mai 1906) l'auteur a énoncé diverses propositions relatives aux variables et aux fonctions hypercomplexes. Cette théorie générale conduit, pour les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes, à diverses conséquences que M. Autonne développe ici.

2nde Partie –

En adoptant la terminologie de M. Frobenius (*Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin, avril 1903), on peut résumer les présentes recherches en cet unique énoncé :

Pour qu'une quantité hypercomplexe X *soit, par rapport à la variable hypercomplexe x, un polynome de degré m, à coefficients hypercomplexes, il faut et il suffit que les coordonnées de* X *soient, par rapport aux coordonnées de x, des polynomes de degré m, à coefficients scalaires.*

Maillet (*Edm.*). — Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville. (213-227).

En se référant à son *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions* (1906), l'auteur résume comme suit le présent travail :

« Je me propose ici de montrer que les racines positives des équations du deuxième degré, dont les coefficients sont des polynomes à coefficients entiers formés avec un nombre transcendant $\mathrm{I} > 0$ de Liouville, sont, dans des cas étendus, des fractions continues quasi-périodiques. Il en est toujours ainsi quand l'ordre du développement en fraction continue de ce nombre de Liouville est assez grand. I étant un de ces derniers nombres et positif, on peut le choisir de façon que $\sqrt{\mathrm{I}}$ soit d'ordre au plus égal à (2, 0) dans la première classification des fractions continues et (1, 1) dans la deuxième.

« J'indique aussi : 1° des résultats relatifs à la représentation q-imale des nombres de Liouville dans le système de numération de base q entière ; 2° l'impossibilité que e soit racine d'une équation dont les coefficients sont des polynomes en I à coefficients entiers, I étant un nombre de Liouville d'ordre assez grand ; 3° des cas où a^{I} (a entier) et I^{I} sont transcendants. »

Combebiac. — Sur les représentations numériques des ensembles. (227-229).

Vessiot (*E.*). — Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales. (230-269).

En divers passages de sa *Géométrie des transformations de contact*, Sophus Lie avait indiqué que la propagation d'un mouvement ondulatoire, suivant le principe d'Huygens, est l'image d'une transformation de contact infinitésimale ; le Mémoire de M. Vessiot est consacré au développement de cette idée.

Dans les trois premiers chapitres il n'est question que de l'espace à trois dimensions.

I, II. Le mode de propagation est défini par ∞^3 surfaces d'onde caractéristiques associées individuellement aux divers points (x, y, z) de l'espace ; chacune d'elles est la forme limite vers laquelle tend la surface lieu des points atteints au bout du temps dt par l'ébranlement du point (x, y, z). L'origine des coordonnées étant transportée en ce point, le système des surfaces caractéristiques est défini par l'équation tangentielle

$$p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} - \mathrm{Z} = \mathrm{W}(x, y, z, p, q).$$

Les formes successives de l'onde qui résulte d'une onde origine sont les transformés de cette onde origine fournies par les diverses transformations d'un groupe de transformations de contact à un paramètre t qui représente le temps. Le groupe est défini par les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=\frac{\partial W}{\partial p}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial W}{\partial q}, \qquad \frac{dz}{dt}=p\,\frac{\partial W}{\partial p}+q\,\frac{\partial W}{\partial q}-W;\\ &\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial W}{\partial x}-p\,\frac{\partial W}{\partial z}, \qquad \frac{dq}{dt}=-\frac{\partial W}{\partial y}-q\,\frac{\partial W}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Le mode de propagation est déterminé par l'intégration de ce système (3). Mais on peut aussi le définir en cherchant les familles d'ondes; la famille des ondes issues d'une onde origine arbitraire sera donnée par une équation

$$t=f(x,y,z),$$

de sorte qu'il s'agit de trouver une fonction t des variables indépendantes (x, y, z); cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial t}{\partial z}\,W\left(x,y,z,-\frac{t'_x}{t'_z},-\frac{t'_y}{t'_z}\right)+1=0,$$

dont l'intégration équivaut à celle du système (3). Ainsi est constituée une théorie très simple des équations aux dérivées partielles du premier ordre, dans laquelle rentrent la théorie des intégrales complètes et celle des caractéristiques.

Par un changement de notations convenable, on donne aux équations du groupe de transformations de contact une forme analogue à celle des équations canoniques d'Hamilton.

III. Si l'on appelle *trajectoires*, dans le mode de propagation considéré, le lieu des positions successives du point faisant partie d'un élément de contact quelconque, lorsque cet élément de contact se déplace, les trajectoires seront déterminées par l'intégration du système (3), où les fonctions p et q sont considérées comme des inconnues auxiliaires. On obtient pour ces trajectoires, qui sont en nombre quadruplement infini, des équations analogues aux équations classiques de Lagrange, en définissant les surfaces d'onde caractéristiques par leur équation ponctuelle

$$\Omega(x,y,z,X,Y,Z)=1$$

où l'on peut supposer Ω homogène et de degré 1 en X, Y, Z. Le système auquel satisfont les coordonnées des trajectoires est alors

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial x'}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial y'}-\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial z'}-\frac{\partial\Omega}{\partial z}=0$$

avec la condition supplémentaire

$$\Omega(x,y,z,x',y',z')=1.$$

Il exprime que la variation de l'intégrale

$$(13)\qquad \int\Omega(x,y,z,dx,dy,dz)$$

est nulle et que le temps t est précisément la valeur correspondante de cette intégrale.

On a ainsi une interprétation géométrique d'un problème très général de variations, de sorte que la théorie de Lie éclaire non seulement les diverses faces de la théorie des équations aux dérivées partielles, mais aussi ses liens avec le calcul des variations. Il conviendra donc de l'introduire dans toutes les questions qui se rattachent à la variation d'une intégrale telle que l'intégrale (13); brachistochrones, équilibre des fils, lignes géodésiques, problème général de la dynamique.

IV. Avant de passer à cette dernière application, l'auteur montre comment les résultats précédemment obtenus peuvent être étendus aux variétés à n dimensions. Il est alors en mesure d'expliquer le fait, signalé par Lie, que l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de la dynamique

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^2 - 2\,U(x_1, x_2, \ldots, x_n) - 2h = 0$$

revient à la détermination du groupe de transformations de contact qui a pour fonction caractéristique

$$\frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2}}{\sqrt{2(U + h)}}.$$

On peut même généraliser ce théorème, en remontant à sa véritable origine, qui est dans le principe de la moindre action.

Si la force vive d'un système, qu'on représente par

$$\frac{2\,T(x_1, \ldots, x_n;\, dx_1, \ldots, dx_n)}{dt^2},$$

ne dépend pas du temps et s'il en est de même de la fonction des forces U, en supposant que la constante des forces vives a reçu une valeur particulière et qu'on l'a fait rentrer dans la fonction U, on peut écrire ainsi l'équation des forces vives

$$T(x_1, \ldots, x_n;\, dx_1, \ldots, dx_n) = U(x_1, \ldots, x_n)\,dt^2.$$

Dans ces conditions, *les trajectoires sont les mêmes que pour le mode de propagation dans lequel la surface d'onde caractéristique a pour équation ponctuelle*

$$2\sqrt{U(x_1, \ldots, x_n)\,T(x_1, \ldots, x_n;\, X_1, X_2, \ldots, X_n)} = 1,$$

les X étant les coordonnées courantes. Mais ce qui correspond au temps τ de ce mode de propagation, ce n'est pas le temps t du problème de dynamique; c'est *l'action*

$$\tau = 2\int \sqrt{U(x_1, \ldots, x_n)\,T(x_1, \ldots, x_n;\, dx_1, \ldots, dx_n)},$$

de sorte que l'on a

$$dt = \frac{d\tau}{2\,U(x_1, \ldots, x_n)}.$$

« Cette identité de forme, dit M. Vessiot, entre les trajectoires des problèmes de dynamique et de certains problèmes de propagation ondulatoire est certainement curieuse, quoique la différence dans la loi suivant laquelle sont parcourues les trajectoires lui ôte de son intérêt. Le parallèle classique entre la théorie de l'émission et la théorie des ondulations en peut être considéré comme un cas particulier, si l'on suppose que dans la théorie de l'émission les corpuscules lumineux obéissent à des lois analogues à celles de notre dynamique. »

von Koch (Helge). — Remarques sur quelques séries de polynomes (269-274).

Soit x l'affixe d'un point du plan de la variable complexe; on sait que l'équation

$$|x^2 - 1| = 1$$

représente une lemniscate de Bernoulli, dont le point double est $x = 0$ et dont les deux boucles A et B entourent respectivement les deux foyers $x = 1$ et $x = -1$.

L'auteur considère une fonction analytique $f(x)$ régulière dans la boucle A; par la substitution

$$z = 1 - x^2, \qquad x = \sqrt{1 - z} = 1 - \frac{z}{2} + \ldots$$

$f(x)$ devient une fonction de z

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

régulière dans un certain domaine autour de $z = 0$. La série

$$c_0 + c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^2)^2 + \ldots$$

converge et représente $f(x)$ dans la boucle A. Elle converge aussi dans la boucle B, mais représente une autre fonction. De là un moyen simple pour former des séries de polynomes représentant diverses fonctions dans différentes portions du plan. Ainsi, par exemple, la fonction $\log x$ étant rendue uniforme par une coupure partant de l'origine et suivant la partie négative de l'axe imaginaire, la série

$$1 - x^2 + \frac{(1 - x^2)^2}{2} + \frac{(1 - x^2)^3}{3} + \ldots$$

est convergente dans toute l'aire de la lemniscate; mais elle représente $-2\log x$ dans la boucle A et $-2\log x + 2i\pi$ dans la boucle B.

L'auteur forme ensuite, par un passage à la limite, une série de polynomes offrant une singularité de convergence bien plus remarquable. A cet effet il considère la série

$$P_n(x) = -\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1 - x^n)^\nu}{\nu}$$

où n est un entier positif quelconque au moins égal à 2; cette série converge à l'intérieur de la rosace à n branches dont l'équation en coordonnées polaires

est

$$r^n = 2 \cos n\varphi;$$

pour $x = re^{i\varphi}$ ($0 < r \leq 1$), l'argument φ étant un multiple quelconque de $\frac{2\pi}{n}$, on a

$$P_n(x) = \log |x|.$$

Partant de là et posant

$$p_n(x) = -\frac{1}{n}\left[1 - x^n + \frac{(1-x^n)^2}{2} + \ldots + \frac{(1-x^n)^{n^n}}{n^n}\right]$$

il établit que la série

$$\lim_{n=\infty} p_{n!}(x)$$

converge sur tout rayon de longueur 1 issu de l'origine (0 exclu) faisant avec l'axe réel un angle φ en rapport rationnel avec 2π; elle y représente $\log |x|$. Donc, dans un voisinage arbitrairement petit d'un point quelconque intérieur au cercle $|x| = 1$, elle représente une infinité de fonctions analytiques distinctes, les fonctions $\log x + i\varphi$, φ étant en rapport rationnel avec 2π.

L. R.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PUBLIÉ PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION DE CET ÉTABLISSEMENT.

IIe série, Cahier IX; 1904 (1).

Dulac (H.). — Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. (1-125).

Cet important Mémoire, présenté comme thèse de Doctorat à la Faculté des Sciences de Paris, a pour objet l'étude des intégrales d'une équation différentielle

$$(1) \qquad X(x, y)\, dy + Y(x, y)\, dx = 0$$

dans le voisinage de valeurs singulières $x = 0$, $y = 0$, pour lesquelles X et Y sont holomorphes, mais s'annulent simultanément : l'auteur suppose toujours que x est une variable complexe et laisse de côté le cas particulier des intégrales réelles.

Première Partie. — M. Dulac complète sur certains points les résultats acquis dans le cas où, par un changement de variables linéaire, l'équation (1)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXX, p. 151.

prend la forme

$$(2) \qquad (x + \ldots)\, dy = (\lambda y + \ldots)\, dx \qquad (\lambda = \text{const.}),$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier. Il examine successivement les divers cas qui peuvent se présenter.

I. λ *est, soit un nombre complexe, soit un nombre positif autre qu'un entier ou que l'inverse d'un entier.* — MM. Picard et Poincaré ont indiqué des développements qui, dans ce cas, donnent toujours la forme de l'intégrale générale dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$. A l'aide de ces développements, l'auteur étudie, dans le voisinage de $x = 0$, les intégrales autres que les deux intégrales holomorphes. Suivant la façon dont x tend vers zéro, y et $y : x$ tendent ou ne tendent pas vers des limites. Les intégrales admettent le point $x = 0$ comme point critique transcendant et, sauf dans le cas où l'équation (1) admet la courbe intégrale $x = 0$, chaque intégrale présente, dans le voisinage de $x = 0$, une infinité de points critiques algébriques. Cette étude conduit aux conclusions suivantes :

1° Il n'y a pas lieu de distinguer, comme on continue à le faire à l'exemple de Briot et Bouquet, le cas où la partie réelle de λ est positive et celui où elle est négative; seul, le cas où λ est positif se distingue des autres.

2° Il y a lieu d'établir, dans le voisinage d'un point singulier, une distinction entre les *intégrales* et les *caractéristiques*.

M. Dulac appelle *caractéristique* un ensemble de valeurs x et $y(x)$ vérifiant l'équation différentielle et telles qu'une des variables ne prenne que des valeurs figurées dans son plan par les points d'un arc de courbe. La caractéristique est dite passer par l'origine quand $x = 0$, $y = 0$ font partie des valeurs de l'ensemble. Le nom d'*intégrale passant par l'origine* est réservé pour le cas où l'une des variables, x par exemple, peut prendre dans le champ complexe toutes les valeurs voisines de $x = 0$ et où y tend vers zéro quand x tend vers zéro d'une façon quelconque. Quand λ n'est pas réel, il ne passe pas par l'origine d'autres *intégrales* que les intégrales holomorphes; mais il y a toujours une infinité de *caractéristiques* qui y passent.

II. λ *est négatif.* — Briot et Bouquet avaient indiqué qu'il n'y a dans ce cas que *deux intégrales* passant par l'origine. Leur raisonnement avait été reconnu insuffisant; mais on croyait la proposition exacte. On n'avait pas remarqué qu'elle était, au moins dans certains cas, contredite par les résultats que M. Poincaré a établis pour l'équation

$$(x + \ldots)\, dy + (y + \ldots)\, dx = 0,$$

qui est l'équation (2) pour $\lambda = -1$. M. Bendixson, généralisant certains de ces résultats, a montré que, si λ est rationnel et négatif, et s'il existe un développement suivant les puissances de x et y, qui, égalé à une constante, puisse fournir l'intégrale générale de l'equation (2), ce développement est convergent.

M. Dulac ramène l'équation à la forme

$$x\, dy = y(\lambda + \ldots)\, dx,$$

et cherche si, $H(x, y)$ étant holomorphe et non nul pour $x = 0$, $y = 0$, l'équation admet une intégrale générale du type

$$y x^{-\lambda} H(x, y) = \text{const.}$$

Il est conduit à distinguer les trois cas suivants, pour lesquels il propose les dénominations de *col*, *foyer* et *centre*, employées par M. Poincaré dans l'étude des intégrales réelles.

1° λ *n'est pas rationnel*. — La série $H(x, y)$ existe formellement; mais elle est divergente au moins dans certains cas. Il n'y a que les intégrales $x = 0$ et $y = 0$ qui passent par l'origine. Sauf dans le cas où la série H est convergente, on ne peut nier ni affirmer l'existence de *caractéristiques* passant par l'origine. Si de telles caractéristiques existent et si les arguments de x et y sont ω et θ, les deux expressions $|x^m y^n \omega|$ et $|x^m y^n \theta|$ croissent indéfiniment, quels que soient m et n, lorsque x et y tendent vers zéro.

2° λ *est un nombre rationnel, mais* H *n'existe pas*. — Alors, il y a *toujours* une infinité de *caractéristiques* passant par l'origine.

3° λ *est rationnel et* H *existe*. — L'auteur donne une nouvelle démonstration de la convergence de la série H.

III. λ *est un entier positif*. — M. Dulac établit par une méthode nouvelle l'existence d'une intégrale générale, déjà obtenue par MM. Horn et Lindelöf sous la forme

$$\frac{\varphi(x, y)}{[g(x, y)]^\lambda} + a \log g(x, y) = \text{const.},$$

où φ et g sont deux fonctions holomorphes et nulles pour $x = 0$, $y = 0$, a une constante qui peut être nulle. Il montre que, sauf dans le cas $a = 0$, il n'y a que l'*intégrale* $g = 0$ qui passe par l'origine, tandis qu'il y a toujours une *infinité de caractéristiques* qui y passent.

IV. λ *est nul*. — L'auteur montre qu'on peut toujours mettre l'équation sous la forme

$$(3) \qquad [mx(1 + ay^m) + x^2\varphi(x, y) + yf(y)]\,dy + y^{m+1}\,dx = 0,$$

m étant un entier, a une constante, f et φ des fonctions holomorphes pour $x = 0$, $y = 0$. L'intégrale holomorphe, que l'équation (1) admet toujours, correspond à l'intégrale $y = 0$ de l'équation (3). Si l'équation (1) admet une seconde intégrale holomorphe, ce qui n'est pas le cas général, la fonction $f(y)$ est identiquement nulle et cette intégrale correspond à l'intégrale $x = 0$ de l'équation (3).

Briot et Bouquet avaient étudié des équations réductibles au type (3); mais toutes correspondent au cas où la fonction $f(y)$ est identiquement nulle.

M. Dulac ne recherche pas s'il passe par l'origine d'autres intégrales que les intégrales holomorphes; mais il établit qu'il y a toujours une infinité de *caractéristiques* qui y passent.

Si θ est l'argument de y, $\cos m\theta$ reste positif ou tend vers zéro pour toutes ces caractéristiques.

Seconde Partie. — Cette seconde Partie traite du cas général où l'équation (1) ne peut être mise sous la forme (2), ce qui arrive, par exemple, quand $x = 0$, $y = 0$ est un point multiple des courbes $X = 0$ et $Y = 0$. L'auteur étend à ce cas général certains des résultats obtenus pour l'équation (2). Deux problèmes relatifs à ce cas général étaient déjà complètement résolus : MM. Horn

et Bendixson avaient étudié les intégrales réelles; M. Autonne, complétant les recherches de Briot et Bouquet, avait obtenu toutes les intégrales algébroïdes pour $x = 0$. En dehors de ces travaux, ce n'est qu'incidemment et à propos d'équations complètement intégrées que l'on avait acquis quelques renseignements sur les intégrales dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$.

I. *Recherche d'une catégorie d'intégrales.* — M. Dulac recherche les intégrales ou *caractéristiques* passant par l'origine et pour lesquelles $y : x^\mu$ tend, quel que soit μ, vers une limite finie ou infinie. Parmi elles se trouvent les intégrales algébroïdes pour $x = 0$.

Si n est le degré minimum des termes de X et de Y, il y a en général $n+1$ de ces intégrales algébroïdes. S'il y en a moins de $n+1$, il y a, en plus, une infinité de caractéristiques de l'espèce indiquée plus haut. S'il y a plus de $n+1$ intégrales algébroïdes, il y en a une infinité et l'auteur donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

II. *Recherche de l'intégrale générale.* — Par analogie avec ce qui a lieu, en général, pour l'équation (2), M. Dulac recherche si l'intégrale générale ne peut être de la forme

$$(4) \qquad A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \ldots A_p^{\lambda_p} H(x, y) = \text{const.},$$

les λ étant des exposants constants, les A et H des fonctions de x et y, holomorphes pour $x = 0$, $y = 0$, les premières nulles, la dernière différente de zéro pour $x = y = 0$. Laissant de côté le cas où l'équation admet une infinité d'intégrales algébroïdes, on peut, en vue d'obtenir l'intégrale générale (4), prendre pour les fonctions A des expressions de la forme $y + \varphi(x)$, qui, égalées à zéro, fournissent des intégrales algébroïdes. S'il y a moins de $n+1$ de ces intégrales, la forme (4) ne saurait convenir à l'intégrale générale. S'il y a $n+1$ intégrales algébroïdes, on détermine sans ambiguïté les rapports des exposants λ; mais on est ensuite, en général, arrêté par des impossibilités lorsqu'on veut déterminer $H(x, y)$. A la différence de ce qui a lieu pour $n = 1$ [cas de l'équation (2)], l'intégrale générale ne peut, en général, revêtir la forme (4). Dans tous les cas où cette forme est impossible, il y a une infinité d'intégrales ou de *caractéristiques* passant par l'origine.

Quand les coefficients de $H(x, y)$ peuvent être déterminés, le développement est convergent, si les rapports des exposants λ ne sont pas tous positifs. Il y a encore une infinité d'intégrales ou de *caractéristiques* passant par l'origine.

L'examen des cas où les rapports des λ sont tous positifs conduit aux résultats suivants, analogues à ceux qui ont été trouvés pour l'équation (2) dans le cas II :

1° Si les rapports des λ ne sont pas tous rationnels et si l'on peut déterminer les coefficients de $H(x, y)$, le développement H peut être divergent. On ne saurait dire s'il passe ou non par l'origine d'autres caractéristiques que celles qui sont fournies par les intégrales holomorphes.

2° Si les rapports des λ sont tous rationnels et si $H(x, y)$ ne peut être déterminée, il y a une infinité de caractéristiques passant par l'origine.

3° Si les rapports des λ sont tous rationnels et si l'on peut déterminer le développement de $H(x, y)$, les coefficients de ce développement dépendent de constantes arbitraires que l'on peut choisir de manière à le rendre convergent.

Il ne passe par l'origine ni *caractéristiques*, ni intégrales autres que les intégrales holomorphes.

Bricard (*R.*). — Sur l'épicycloïde. (127-150).

On sait que, *si l'on fait rouler sur un cercle fixe* S *le cercle base* C *d'une épicycloïde, l'enveloppe de cette courbe, supposée entraînée avec* C, *est partiellement constituée par une épicycloïde.*

Cette *enveloppe partielle* se complète en général d'une courbe (*enveloppe complémentaire*) dont la nature est d'autant plus compliquée que le rapport des rayons des cercles C et S est moins simple. M. Bricard s'est proposé de chercher *dans quelle condition cette enveloppe complémentaire est elle aussi, une épicycloïde.*

Il fait usage des notations et conventions suivantes : le symbole (o, R) désigne le cercle de centre o, et dont le rayon est égal à la longueur absolue du segment R (positif ou négatif). Quand (o, R) et (o', R') sont deux cercles tangents, leur contact sera *intérieur* ou *extérieur,* suivant que R et R' sont *de même signe* ou *de signes contraires.* Les deux cercles (o, R) et (o', R') étant tangents, soient m un point quelconque, d une longueur dont la valeur absolue est égale à om; l'épicycloïde décrite par le point m entraîné avec le cercle (o', R') roulant sur (o, R) est désignée par la notation $E(o, R, R', d)$. Le théorème énoncé au début s'énonce alors ainsi :

On fait rouler un cercle (o, R) *sur un cercle fixe* (ω, ρ). *L'épicycloïde* $E(o, R, R', d)$, *entraînée avec le cercle* (o, R), *a comme enveloppe partielle l'épicycloïde* $E(\omega, \rho, R', d)$.

Le problème proposé est ramené par l'auteur à cet autre :

Soient op, oq *deux tiges égales articulées en* o; o' *et* ω *deux points marqués respectivement sur ces deux tiges. Pour chaque ouverture de l'angle* poq, *on marque sur la droite* pq *deux points* m *et* ϖ, *tels que les segments* $o'm$ *et* $\omega\varpi$ *aient des longueurs données. On demande qu'un certain point* ω', *marqué sur* $\omega\varpi$, *reste à distance constante du point* m.

Par une discussion qui comporte l'examen de quatre cas de figure, M. Bricard établit que le problème admet deux solutions et deux seulement :

I. *Si l'on fait rouler le cercle* (o, R) *sur le cercle* $(\omega, R - R')$, *l'épicycloïde* $E(o, R, R', d)$ *a pour enveloppe complémentaire l'épicycloïde*

$$E(\omega, R - R', -R', d).$$

II. *Si l'on fait rouler le cercle* (o, R) *sur le cercle* $(\omega, 2R - R')$, *l'épicycloïde* $E(o, R, R', d)$ *a pour enveloppe complémentaire l'épicycloïde*

$$E\left(\omega, \frac{2R - R'}{R'} d, \frac{R}{R'} d, \frac{R}{R'} d\right).$$

Dans le premier cas, l'enveloppe obtenue est une épicycloïde *quelconque;* dans le second, une épicycloïde *ordinaire* à points de rebroussement.

Dans le cas particulier où $R = 2R'$, l'épicycloïde $E(o, R, R', d)$ est une *ellipse,* et l'on obtient les deux théorèmes suivants :

Une ellipse de centre o a pour demi-axes a et b ($a > b$). Si l'on fait rouler l'un des cercles (o, $a + b$), (o, $a - b$) sur le cercle de rayon moitié, l'ellipse entraînée dans l'un ou l'autre de ces mouvements reste tritangente à un limaçon de Pascal et passe par le point double de ce limaçon.

Si l'on fait rouler le cercle (o, $a + b$) sur le cercle [o, $\frac{3}{2}(a + b)$], ou bien le cercle (o, $a - b$) sur le cercle [o, $\frac{3}{2}(a - b)$], l'ellipse entraînée dans l'un ou l'autre de ces mouvements reste tritangente à une hypocycloïde à trois rebroussements.

De là résulte entre l'ellipse, le limaçon de Pascal et l'hypocycloïde une relation curieuse :

Étant données une hypocycloïde à trois rebroussements H *et une ellipse* E, *on peut construire un limaçon de Pascal* L, *tangent à* H *aux mêmes points que* E. *En outre, si l'on fixe* H, *on peut déplacer* E *et* L *sans les déformer et de manière que les relations de contact des trois courbes soient conservées; l'ellipse* E *passera constamment par le point double de* L.

Appell (*Paul*). — Machine à déterminer les balourds. (151-162).

Théorie d'un appareil imaginé par M. Haffner pour déterminer la position et la masse des balourds.

Cahier X; 1905.

Maillet (*Edm.*). — Sur les fonctions monodromes d'ordre non transfini et les équations différentielles. (1-78).

I. L'auteur représente le symbole fonctionnel $y = e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^{x^\rho}}}}}$, où figure $k + 1$ fois le nombre e, par la notation $y = e_{k+1}(x^\rho)$. Pour $k \geqq 1$, on a une fonction entière d'ordre infini; on conviendra de dire que *cette fonction est d'ordre* (R, ρ).

Une fonction entière qui, pour x infini, croît plus vite que $e_k(x^\rho)$, quel que soit ρ fini, est *d'ordre* $\geqq (k, \varepsilon)$; si elle croît plus vite que $e_{k+1}(x^{\rho-\varepsilon})$, moins vite que $e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon})$, quelque petit que soit ε fini positif, *elle sera d'ordre* (R, ρ); si elle croît plus vite que $e_{k+1}(x^\rho)$, quel que soit R, la fonction sera dite *d'ordre transfini*. Ce cas est écarté dans tout le présent Mémoire, où il n'est question que des fonctions entières d'ordre non transfini.

II, III, IV. L'étude directe des fonctions entières d'ordre infini, mais non transfini, fondée sur la connaissance du mode de décroissance des coefficients, conduit à une classification nouvelle de ces transcendantes; de plus, elle permet de définir la *régularité* de leur croissance et fournit un critère de régularité analogue à celui que M. Maillet avait indiqué antérieurement pour les fonctions entières d'ordre fini. L'auteur est alors en mesure de généraliser divers résultats qu'il avait déjà obtenus, en les étendant aux solutions des équations différentielles.

La plupart de ces propriétés subsistent pour les fonctions quasi-entières et les fonctions monodromes ayant un point singulier essentiel isolé; de sorte que, si ces solutions ne sont pas d'ordre transfini aux environs d'un point cri-

tique, la détermination d'une valeur asymptotique du maximum du module d'une de ces solutions pour $|z| = r$ revient à celle d'une valeur asymptotique du coefficient d'une de ces solutions.

V. Avant d'en venir aux applications, l'auteur étudie les fonctions entières d'ordre zéro, qui forment une catégorie aussi étendue que celle des fonctions entières d'ordre > 0, fini ou non. Il esquisse une classification de ces fonctions, donne une valeur asymptotique du maximum du module pour $|x| = r$ et établit un critère pour la régularité de leur croissance.

VI. Comme premier exemple, M. Maillet considère les équations linéaires d'ordre k dont les coefficients sont des polynomes et dont la solution générale est une fonction entière; cette fonction est d'ordre fini et, quand les coefficients des polynomes sont rationnels, il y a k intégrales indépendantes qui sont d'ordre > 0 ou des polynomes.

VII. Ensuite sont étudiées les équations de la forme

$$Ay^{(k)} = \Phi[y^{(k-1)}, \ldots, y, x],$$

où A est un polynome en x et Φ un polynome en $y^{(k-1)}, \ldots, y, x$. Les solutions qui sont fonctions entières d'ordre non transfini ont leur croissance régulière; les solutions de la forme $\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)$, où ζ est une fonction entière d'ordre non transfini, sont telles que ζ a sa croissance régulière; c'est le cas de l'équation $y'' = 6y^2 + x$ étudiée par M. Painlevé.

VIII. Par l'extension d'une méthode due à M. Liapounoff, l'auteur obtient une limite de l'ordre de grandeur, dans le domaine de $t = \infty$, des solutions des systèmes linéaires homogènes du premier ordre entre n fonctions de t, quand les coefficients sont des fonctions quasi-méromorphes d'ordre non transfini pour $t = \infty$. Sauf dans le voisinage des pôles des coefficients, l'ordre de grandeur des solutions est au plus égal à celui de $e_{k+2}(|t|^{\rho+\varepsilon})$, ε étant aussi petit que l'on veut, mais fini, si l'ordre des coefficients est au plus égal à celui de $e_{k+1}(t^\rho)$.

Quand les coefficients des systèmes linéaires et homogènes sont des polynomes, les fonctions entières qui vérifient ces systèmes sont d'ordre fini et à croissance régulière.

Jouguet (*E.*). — Sur la similitude dans le mouvement des fluides. (79-115).

C'est à propos du mouvement des fluides que Newton a imaginé son célèbre théorème sur la similitude en Mécanique. Mais les applications qu'il en a faites à ce problème ne vont pas sans soulever des difficultés, car elles sont subordonnées à des hypothèses implicites sur la constitution des fluides. C'est ce que Bertrand et après lui Reech ont bien reconnu; mais ils n'ont pas réussi, suivant M. Jouguet, à s'affranchir entièrement des objections qu'on peut élever contre les raisonnements de Newton. C'est pourquoi l'auteur reprend la question de la similitude dans le mouvement des fluides, en se fondant sur les principes de la Thermodynamique.

L. R.

RENDICONTO DELLE SESSIONI DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA; Bologna, tip. Gamberini e Parmeggiani; in-8° (1).

1889-1890.

Razzaboni (*A.*). — [P 5]. Sur les représentations de l'espace sur lui-même, qui conservent les aires des surfaces correspondantes. (21-25).

Il n'y a que la similitude.

Gambioli (*D.*). — [D 2 *d*]. Sur les fractions continues. (33-55).

Étant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & q_2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & q_n \end{vmatrix},$$

la $n^{\text{ième}}$ réduite R_n de la fraction continue

$$N = \left(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \ldots \frac{1}{q_n}\right)$$

est donnée par

$$R_n = \frac{\partial l\,|\Delta_n|}{\partial q_1} = \frac{1}{|\Delta_n|}\,\frac{\partial\,|\Delta_n|}{\partial q_1},$$

$|\Delta_n|$ étant la valeur absolue de Δ_n. On a aussi

$$R_{n-s} = \frac{1}{\dfrac{\partial^s\,|\Delta_n|}{\partial q_n \partial q_{n-1}\ldots\partial q_{n-s+1}}}\;\frac{\partial^{s+1}\,|\Delta_n|}{\partial q_1 \partial q_n \partial q_{n-1}\ldots\partial q_{n-s+1}}.$$

Autres propriétés des réduites. Applications :

1° Au calcul des trois premières réduites de la fraction continue

$$\frac{1}{u_0} \dot{-} \frac{u_0^2 x}{u_0 x + u_1} \dot{-} \frac{u_1^2 x}{u_1 x + u_2} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{u_{n-1}^2 x}{u_{n-1} x + u_n} = \sum_0^n \frac{x^n}{u_n}.$$

2° Au calcul de la limite de

$$X = \frac{p_1}{p_1 - 1} \dot{-} \frac{p_2}{p_2 + 1} \dot{-} \frac{p_3}{p_3 - 1} \dot{-} \ldots$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XV$_2$, p. 136. Le Tome 1884-1885, qui n'apparait pas dans le compte rendu précédent, ne contient aucune Note de Mathématiques.

les p étant des nombres entiers et positifs (cette limite est $= 1$).

3° A la transformation en fraction continue de la fraction

$$N = \frac{\rho_0 e^{i\varphi_0}}{\rho e^{i\varphi}}.$$

On trouve

$$N = \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)}}{\rho_1} \dot{+} \frac{1}{\rho_3} \dot{+} \frac{1}{\rho_5} \dot{+} \ldots,$$

étant

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \rho_1 + \frac{\rho_2}{\rho_0}, \qquad \ldots.$$

Bortolotti (*E.*). — [Q 3 *a*]. Quelques observations sur la définition de connexion. (132-155, une planché).

Aperçu des travaux de Riemann (*Fondements d'une théorie générale des fonctions d'une variable complexe;* Göttingen, 1851) et de Listing (*Vorstudien zur Topologie;* Göttingen. Studien, t. I, 1847), avec des considérations comparatives sur les résultats, et des propositions ajoutées par l'auteur, destinées principalement à montrer que les indéterminations que l'on rencontre dans la méthode de Riemann aussi bien que dans celle de Listing, proviennent de ce que, parmi les propriétés de situation relatives à une aire limitée, on n'a pas distingué celles qui proviennent de la nature de la surface dont elle est une partie, de celles qu'entraîne la nature du contour. Par cela il propose de substituer au nombre de connexion l'*espèce* (m, n), m étant le nombre des lignes fermées que l'on peut décrire sans diviser la surface, et n celui des contours simples qui le limitent.

Retali (*V.*). — [M_1 1 *b* ref. P 4 *b*]. Sur les tangentes doubles de certaines courbes planes algébriques. (35-43).

Construction des tangentes doubles à deux courbes, $H^{2n}_{2(n+m)}$, S^{2n}_{2n+m}, que l'auteur a considérées dans son Mémoire : *Sur deux transformations planes quadratiques particulières* (*Memorie di Bologna,* t. X, 1889-1890, p. 653).

Gambioli (*D.*). — [D 2 *d*]. Sur les fractions continues. (43-62).

Première partie : Transformation d'une série en fraction continue.

Deuxième partie : Étude des systèmes récurrents à quatre termes, en employant un déterminant analogue au déterminant Δ_n de la Note précédente (1889-1890).

1891-1892.

Pincherle (*S.*). — [D 6 *f*]. Sur la généralisation des fonctions sphériques. (31-34).

Modifications apportées au Mémoire sur ce même sujet que l'auteur a publié dans les *Memorie di Bologna,* 5e série, t. I, 1890.

Gambioli (*D.*). — [D 2 *b* α]. Sur le développement, suivant les puissances croissantes de x, de la fraction algébrique $\dfrac{1}{\sum_0^n a_r x^r}$, où $a_0 = 1$. (39-44).

Ruffini (*F.-P.*). — [L_1 15 *a*]. Sur les foyers de la podaire d'une conique (60-63).

Communication de la détermination des foyers, faite par M. Retali. Les foyers quadruples de la podaire d'une conique à centre sont les milieux des segments (réels ou imaginaires) qui joignent le pôle aux foyers (réels ou imaginaires) de la conique.

1892-1893.

Pincherle (*S.*). — [Q 2]. Application à la géométrie d'une observation arithmétique. (17-22).

Si n est premier, le produit

$$(x+1, n-1) = (x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

est divisible par $\pi(n)$ lorsque l'est un de ses facteurs. Si

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots$$

et

$$\pi(n-1) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots,$$

en posant

$$\pi(n) = ts$$

avec

$$s = p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} p_3^{\alpha_3+\beta_3} \dots,$$

le produit $(x+1, n-1)$ est divisible par $\pi(n)$ alors, et alors seulement que l'on a

(1) $$(x+1, n-1) \equiv 0 \pmod{s}.$$

L'auteur observe aussi que, si $(x+1, n-1)$ est divisible par $\pi(n)$, le produit $(n+1, x-1)$ l'est aussi. Puis il donne une règle pour voir si un nombre x $(1 < x < s)$ satisfait à la condition (1).

Si l'on a une équation de degré m

(2) $$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$

entre les variables homogènes z et le système de q $(< n)$ équations linéaires

$$\begin{aligned} a_{11} z_1 + \dots + a_{1n} z_n + a_{10} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & , \\ a_{q1} z_1 + \dots + a_{qn} z_n + a_{q0} &= 0, \end{aligned}$$

dont la matrice ne soit pas nulle, on peut exprimer q des z (soient les $z_{n-q+1}\dots z_n$) par les autres. En substituant en (2) on a

$$R(z_1, z_2, \dots, z_{n-q}) = 0$$

avec $\binom{m+n-q}{m}$ termes. Les paramètres qui entrent dans les expressions des $z_{n-q+1}\dots z_n$ étant $q(n-q+1)$, il peut arriver que R soit identiquement nul si

$$q(n-q+1) \geqq \binom{m+n-q}{m},$$

et cela peut arriver d'un nombre fini ou infini de manières, suivant que l'on a le signe = ou >. Le cas de l'égalité se présente si

$$(3) \qquad \frac{(m+n-q)\dots(n-q+2)}{2.3\dots n} = q,$$

c'est-à-dire lorsque $(n-q+2, m-1)$ est divisible par $\pi(m)$, ou, par ce qui précède, lorsque $(m+1, n-q)$ est divisible par $n-q+1$. Pour tout nombre donné m on peut donc déterminer des couples de nombres n, q tels que l'égalité (3) soit satisfaite. Comme application géométrique l'auteur trouve la proposition suivante :

On peut toujours déterminer un espace linéaire S_n d'un tel nombre de dimensions que dans cet espace une variété $\sum_{n-1}^{m}$ contienne un nombre fini d'espaces linéaires d'ordre $n-q$. Ayant déterminé n et q, on conclut que dans S_n toute $\sum_{n-1}^{m'}$ pour $m' > n$ ne contient pas, en général, des S_{n-q}, et que toute $\sum_{n-1}^{m''}$ pour $m'' < n$ en contient un nombre infini.

1893-1894.

Fais (*A.*). — [H6*b*]. Sur quelques cas d'intégration des équations aux différentielles totales du premier ordre et du premier degré, à trois variables. (66-73).

Quelques cas où l'on peut trouver un facteur intégrant. Cas de l'équation homogène.

1894-1895.

Pincherle (*S.*). — [H11]. Sur le calcul fonctionnel. (34-37).

Indication sommaire des vues principales desquelles sont déduits les travaux sur le calcul fonctionnel, que l'auteur a publiés dans les *Memorie di Bologna*.

1895-1896.

Ruffini (*F.-P.*). — [R1c]. Sur les accélérations qui, dans le mouvement d'un système rigide, ayant un point fixe, sont dirigées à un même point donné quelconque. (23-31).

Le lieu des points où les accélérations se dirigent à un même point S est l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe passant par S avec un cône quadrique ayant S pour centre.

Ruffini (*F.-P.*). — [R8$a\alpha$]. Même titre. (51-52).

Addition relative au cas où l'axe de rotation est un axe permanent. Dans ce cas le lieu est la droite menée par S perpendiculairement à l'axe de rotation. Voir une deuxième Note à l'année 1897-1898, p. 25.

Pincherle (*S.*). — [H4 ref. H11]. Sur les équations différentielles linéaires non homogènes et sur les opérations fonctionnelles qu'elles définissent. (77-89).

L'auteur appelle ici *forme différentielle linéaire d'ordre m* l'expression

$$F(\varphi) = \pi_0 \frac{d^m \varphi}{dx^m} + \pi_1 \frac{d^{m-1} \varphi}{dx^{m-1}} + \ldots + \pi_{m-1} \frac{d\varphi}{dx} + \pi_m \varphi,$$

les π étant des fonctions analytiques de x. Cette opération sur φ est distributive et engendre une fonction analytique. Elle peut se représenter par

$$F = \Sigma \pi_i D^{(i)}, \tag{1}$$

en indiquant par $D^{(i)}$ le symbole de dérivation. En mettant une fonction particulière α au lieu de φ on dit que l'on donne à φ la *particularisation* α, et, en correspondance de cette particularisation, F prend une *détermination* β. Les formes différentielles ont plusieurs propriétés analogues à celles des fonctions rationnelles entières d'une variable, y inclus un développement analogue à celui de Taylor, et une décomposition en un produit de facteurs du premier ordre. L'opération inverse de F consiste dans l'intégration de

$$F(\psi) = \varphi, \tag{2}$$

qui est une opération à détermination multiple, la différence de deux quelconques de ses déterminations étant une intégrale de (2). Toutefois l'auteur, par une convention opportune, réduit l'opération F^{-1} à une détermination unique. Puis il considère les produits des opérations F, et démontre qu'ils sont toujours exprimables par une série de puissances entières négatives du symbole D, dont les coefficients peuvent se déduire des coefficients des formes données, seulement par des opérations rationnelles et de dérivation.

2ème Partie.

1896-1897.

Ruffini (*F.-P.*). — [L₁ 18*d* ref. N₁ 1*b*]. Recherche des coniques rencontrant à angle droit les coniques d'une série. (62-71).

Arzelà (*C.*). — [H 10*d*]. Sur le principe de Dirichlet. (71-84).

Soient C une courbe continue renfermant un champ A du plan, C_1 une courbe continue dans l'espace ayant C pour projection. Soit

$$u = u(x, y)$$

une variété de surfaces, ou fonctions, passant par C_1, continues avec leurs dérivées premières et secondes, restant en tout A inférieures à un nombre fini H, et leurs extrêmes oscillatoires restant aussi inférieures à un nombre fini K. La variété ainsi définie est continue et fermée, et il y a par cela dans cette variété une fonction

$$U = U(x, y)$$

rendant minimum l'intégrale

$$j(u) = \int\int_A \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2\right] dx\, dy,$$

et si les dérivées secondes de U sont toujours $< H' < H$ et leurs extrêmes oscillatoires $< K' < K$, la fontion U satisfait en tout A à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Pincherle (*S.*). — [H 11 ref. J 4*f*]. Aperçu sur la Géométrie de l'espace fonctionnel. (85-95).

L'auteur regarde comme un espace la totalité des fonctions analytiques de x (qui sont employées comme des points ou éléments dont les coefficients de la série seraient les coordonnées). Cela lui permet d'appliquer la théorie des groupes de transformations.

On représente par un même point de l'espace fonctionnel les fonctions α et $a\alpha$, a étant une constante, ce qui introduit l'homogénéité. L'ensemble

$$C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \ldots + C_n\alpha_n$$

est un espace linéaire à $n-1$ dimensions. Si la fonction α de x est aussi fonction de r autres variables $z_1, z_2, \ldots, z_r$, elle représente une variété à r dimensions; en particulier $\alpha(x, z)$ une courbe, dont toute valeur de z donne un point, et dont l'auteur définit la tangente, le plan osculateur, etc. Afin que la courbe $\alpha(x, z)$ appartienne à une variété linéaire de n dimensions, il suffit que

$$\frac{\partial^{n+1}\alpha}{\partial z^{n+1}}$$

s'exprime linéairement en fonction de $\alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial z}, \cdots, \frac{\partial^n\alpha}{\partial z^n}$; alors la fonction $\alpha(x, z)$

est de la forme

$$\alpha(x, z) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(z).$$

Si une opération A laisse invariable la courbe, point par point, il doit être

$$A[\alpha(x, z)] = \mu(z)\,\alpha(x, z).$$

L'auteur définit les transformations infinitésimales, les trajectoires d'un point pour les opérations d'un groupe, et résout quelques problèmes relatifs à l'invariance d'une courbe par les opérations du groupe, et aux trajectoires; par exemple : étant donnée une courbe $\alpha(x, z)$, trouver un groupe pour lequel elle est une trajectoire. Enfin, il applique les résultats précédents au cas du groupe des opérations

$$\varphi + D(\varphi)t + D^2(\varphi)\frac{t^2}{1.2} + \ldots,$$

D étant le symbole de dérivation; puis au cas de l'opération infinitésimale

$$A = x D(\varphi),$$

et enfin à celui où l'opération est une forme différentielle linéaire de l'ordre p

$$A = \pi_0 D^p \varphi + \pi_1 D^{p-1} \varphi + \ldots + \pi_p \varphi.$$

Dans le premier cas les trajectoires sont $\varphi(x+z)$, et la courbe des points invariants est e^{zx}. Dans le second, les trajectoires sont $\varphi(zx)$ et la courbe des points invariants x^z. Dans le troisième, les trajectoires sont

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n[\alpha(x)]\frac{z^n}{\Pi(n)};$$

les points invariants sont ceux des p courbes

$$\alpha_1(x, z) = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_p(x, z) = 0,$$

les α_i étant les intégrales de l'équation

$$A[\alpha(x, z)] = z\,\alpha(x, z),$$

et aussi ceux d'une combinaison linéaire quelconque des α_i.

Pincherle (S.). — [V9]. Commémoration de Ch. Weierstrass. (101-104).

1897-1898.

Ruffini (F.-P.). — [R1c]. Sur les accélérations qui dans le mouvement d'un système rigide sont dirigées à un même point donné quelconque. (25-32).

Note faisant suite à celle de l'année 1895-1896 [p. 23 (et addition, p. 51)]. Ici le système rigide est supposé libre. Le lieu, dans le cas le plus général, est encore l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe avec un cône du deuxième ordre.

Pincherle (*S.*). — [J 4 *g*]. Sur la notion de plan dans un espace d'un nombre infini de dimensions. (71-77).

L'auteur reprend le sujet traité dans sa Note de l'année 1896-1897 (p. 85), en cherchant d'établir la notion de plan et, en général, d'espace corrélatif d'un espace S_r dans l'espace S (fondamental). Il y réussit de la manière suivante :

Étant donnée une succession de nombres

$$(u) = u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,$$

telle que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^n}$$

soit convergente au dehors du cercle de centre O et de rayon $< r$, il considère l'opération C définie par

$$C(x^n) = u_n.$$

On appelle *plan* de l'espace fondamental S l'ensemble des racines de C. Les termes u_0, u_1, u_2, ..., de (u) sont les coordonnées du plan.

Pincherle (*S.*). — [D 4]. Sur la comparaison des singularités des fonctions analytiques. (77-88).

Deux fonctions (séries de puissances entières et positives de x) φ_1 et φ_2 ayant le même cercle de convergence (r) de centre O et de rayon r sont *également singulières* sur cette circonférence, s'il existe un nombre constant k, différant de o et de ∞, tel que la série $\varphi_1 - k\varphi_2$ soit convergente dans un cercle $> (r)$. Indiquons par S l'espace fonctionnel constitué par toutes les séries convergentes dans un cercle de rayon $> r$. On peut définir une opération par laquelle les séries de S donnent l'ensemble de celles qui sur (r) sont également convergentes avec une série donnée. Étant

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

une succession de nombres $\gtrless$ o et ayant la limite a pour $n = \infty$, posons $|a| = r$. Prenons l'opération distributive

$$A(x^n) = x^n(x - a_n);$$

alors la série

$$\sum_0^{\infty} k_n x^n$$

se transforme en

$$\sum_0^{\infty} (k_{n-1} - k_n a_n) x^n \qquad (k_{-1} = 0).$$

Pour une fonction φ, on a

$$A(\varphi) = (x - a_0)\varphi - \sum_1^\infty \frac{x^n}{\Pi(n)} \Delta^n a_0 D^n \varphi,$$

Δ étant le symbole de la différence finie par rapport à n, et D le symbole de dérivation. En appliquant cette opération à une série

$$\varphi = \sum k_n x^n,$$

on a

$$A(\varphi) = \sum g_n x^n$$

avec

$$\sum_{n=0}^\infty g_n a_0 a_1 \ldots a_{n-1} = 0,$$

et ces séries φ forment un plan $S^{(0)}$ (suivant la définition donnée dans la Note précédente) déterminé par la succession

$$(a) = 1,\ a_0,\ a_0 a_1,\ \ldots,\ a_0 a_1 \ldots a_{n-1},\ \ldots,$$

et l'opération A projette ainsi l'espace fonctionnel S sur un plan $S^{(0)}$. L'opération inverse A^{-1} appliquée à

$$\varphi = \sum g_n x^n$$

donne une série qui est convergente en (r), mais pas en général dans un cercle $<(r)$; elle n'appartient donc pas en général à S; la condition pour qu'elle appartienne à S est

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^\infty g_n a_0 a_1 \ldots a_{n-1} = 0.$$

Cette opération A^{-1} appliquée à toutes les séries de S, excepté celles qui appartiennent au plan (a), c'est-à-dire celles dont les coefficients satisfont à (1), donne un ensemble de séries ayant sur (r) égales singularités.

Pincherle (*S.*). — [J 4 *g*]. Sur l'opération adjointe. (130-139).

Soit S un ensemble de fonctions analytiques φ, φ_1, ... de x, tel qu'une combinaison linéaire à coefficients constants d'un nombre quelconque des φ appartienne à l'ensemble, et les produits $x\varphi_i$ y appartiennent aussi. Soit S' un ensemble f, f_1, ... relatif à une variable z et ayant les mêmes propriétés. Soit (φ, f) une opération quelconque entre les fonctions des deux ensembles, qui soit à détermination unique, distributive, et telle que l'égalité

$$(\varphi, f) = (\varphi_1, f)$$

entraîne $\varphi = \varphi_1$, et

$$(\varphi, f) = (\varphi, f_1)$$

entraîne $f = f_1$, et que l'on ait aussi

$$(x\varphi, f) = (\varphi, zf).$$

Une opération $\overline{A}$ s'appelle *adjointe* d'une autre A lorsqu'on a

$$[A(\varphi), f] = [\varphi, \overline{A}(f)].$$

L'auteur démontre des propriétés remarquables de cette opération adjointe.

Arzelà (*C.*). — [D 1 *b*ε ref. D 3]. Sur la représentation approchée des fonctions analytiques. (139-147).

Représentation approchée d'une fonction de variable complexe au moyen d'une fonction rationnelle et entière.

1898-1899.

Ruffini (*F.-P.*). — [R 2 *c*]. Recherches sur les moments d'inertie d'un système de points dépourvu de barycentre (17-40).

Distribution des axes ayant un moment d'inertie donné.

Pincherle (*S.*). — [D 4 *a* ref. J 4 *g*]. A propos d'un théorème récent de M. Hadamard. (67-74).

Le théorème de M. Hadamard est le suivant :

Étant données les deux fonctions analytiques

$$\alpha(x) = \sum_0^\infty a_n x^n, \qquad \beta(x) = \sum_0^\infty b_n x^n,$$

la fonction

$$\gamma(x) = \sum_0^\infty a_n b_n x^n$$

est une fonction analytique qui n'a d'autres points singuliers que les produits $x = uv$ des points singuliers de α et de β respectivement.

M. Borel, qui en a simplifié la démonstration, en relevant aussi un cas d'exception, a observé qu'en considérant $\alpha(x)$ comme fixe, $\gamma(x)$ est le résultat d'une certaine opération distributive effectuée sur $\beta(x)$. M. Pincherle étudie cette opération, qui est

$$U(x^n) = a_n x^n,$$

et qui, appliquée à β, donne précisément

$$U(\beta) = \sum a_n b_n x^n;$$

elle peut se mettre sous forme de série

$$U(\beta) = \sum_0^\infty \alpha_n(1) \frac{x^n}{\pi(n)} \frac{d^n\beta(x)}{dx^n},$$

étant

$$\alpha_n(1) = a_n - n a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0,$$

et il en déduit une autre expression analytique pour U,

$$(1) \qquad U(\beta) = \sum_0^\infty \alpha_n(z) \frac{x^n}{\pi(n)} \frac{d^n\beta\left(\frac{x}{r}\right)}{dx^n},$$

valable dans un champ plus étendu, et donnant la continuation analytique de la série $\sum a_n b_n x^n$. Suivent les conditions de convergence de (1) et des cas particuliers.

1899-1900.

Ruffini (*F.-P.*). — [$M_1 3k$]. Lignes radicales et points radicaux. (23-29).

En prenant deux courbes de même ordre $2k$,

$$f(x, y) = (x^2+y^2)^k + \varphi_{2k-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0 = 0,$$
$$f'(x, y) = (x^2+y^2)^k + \varphi'_{2k-1}(x, y) + \ldots + \varphi'_0 = 0,$$

ayant puissance (*voir* Mémoire du même auteur dans les *Mémoires de Bologne*, 4e série, t. X, p. 340) *par rapport à tout point du plan*, l'auteur cherche le lieu des points par rapport auxquels les deux courbes ont égale puissance. Ce lieu, en général de l'ordre $2k-1$, est la *ligne radicale*. Une définition analogue porte à considérer les *points radicaux* de trois courbes.

Donati (*L.*). — [T7*a*]. Relation générale entre les courants dans un réseau de fils conducteurs. (29-33).

Théorème de réciprocité. — Étant I, I′ les courants correspondant à deux systèmes différents de forces électromotrices E, E′, on a

$$\Sigma E' I = \Sigma E I'.$$

Lorsque le réseau n'est pas un système isolé, mais qu'il y a aussi des courants qui viennent du dehors, en indiquant par $\overline{V}$ les valeurs du potentiel aux points d'entrée, et par $\overline{I}$ les courants provenant du dehors, on a

$$\Sigma E' I + \Sigma \overline{V}' \overline{I} = \Sigma E I' + \Sigma \overline{V} \overline{I}'.$$

Donati (*L.*). — [T7*a*]. Théorème général relatif à la distribution du poetntiel dans un réseau de fils conducteurs, avec quelques applications. (65-68).

Étant α, β deux couples d'électrodes, $\lambda_{\alpha,\beta}$ le rapport de la différence de potentiel qui se produit en α à celle qui se produit en β lorsque le courant extérieur entre en β, et $\lambda_{\beta,\alpha}$ le rapport correspondant de la différence de potentiel en β à la différence en α lorsque le courant entre en α, et en appelant R_α, R_β la résistance du réseau entre les électrodes α et celle entre les β, on a

$$\frac{\lambda_{\alpha,\beta}}{R_\alpha} = \frac{\lambda_{\beta,\alpha}}{R_\beta}.$$

L'auteur obtient cette relation comme conséquence de celle de la Note précédente.

Arzelà (*C.*). — [C2*a*]. Sur l'intégration par substitution. (82-90).

Lorsque pour trouver $\int f(u)\,du$ on pose $u = u(x)$, et l'on trouve

$$\int f[u(x)]\,u'(x)\,dx = \psi(x),$$

pour déduire de là l'intégrale indéfinie $\int f(u)\,du$, la condition que $u = u(x$ puisse donner x comme fonction de u à une seule valeur est inutile.

Pincherle (*S.*). — [V9]. Commémoration de E. Beltrami. (91-99).

Pincherle (*S.*). — [D1*a*]. Sur la continuité des fonctions (99-101).

Étant donné un ensemble A de nombres, et une fonction finie et continue des points de cet ensemble, et étant A' l'ensemble dérivé de A, il y a une et une seule fonction finie et continue des points de A + A' qui coïncide avec la première aux points de A.

Ce théorème avait été donné par l'auteur dans les *Mémoires de Bologne*, 5e série, t. III, 1893, p. 293. Il le rappelle ici à l'occasion d'un théorème démontré par M. Steinitz [*Stetigkeit und Differentialquotient* (*Math. Ann.*, t. LII, 1899, p. 58)], qui coïncide avec le théorème cité.

Pincherle (*S.*). — [H5 ref. J4*g*]. Sur la décomposition d'une forme différentielle linéaire en un produit d'opérations. (101-105).

S. R.

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.
Serie 2ª; Torino, E. Lœscher, in-4° (¹).

T. XXXIX, 1889.

Segre (C.). — [Q3 ref. N ref. M_2 4, 6]. Sur les variétés cubiques de l'espace de quatre dimensions et sur certains systèmes de droites et certaines surfaces de l'espace ordinaire. (3-48).

Soit Γ une variété quelconque (à trois dimensions) de l'espace S_4. Un cône circonscrit à cette variété et ayant pour sommet un point P coupe un espace (linéaire) R (à trois dimensions) non passant par P, suivant une surface qui est appelée le *contour apparent de* Γ *par rapport au point* P. Lorsque Γ est cubique, le contour apparent est du sixième ordre (F^6) et se réduit au quatrième (F^4) lorsque P est sur Γ comme point simple. L'auteur développe des propriétés générales relatives aux variétés cubiques et à leurs contours apparents. Puis il vient à l'étude des cas particuliers remarquables, et il en déduit des propriétés relatives aux surfaces F^6 et F^4 de l'espace ordinaire, ainsi qu'aux systèmes de droites qui sont les projections sur l'espace ordinaire des systèmes de droites renfermés dans les variétés cubiques considérées. Les cas particuliers étudiés par l'auteur sont les suivants :

1° *Variétés cubiques renfermant des plans.*

Lorsque Γ a un (seul) plan π, elle a aussi quatre points doubles situés dans ce plan (par conséquent une variété cubique générale n'a pas de plans) et l'on peut l'engendrer par deux faisceaux projectifs d'espaces (linéaires) et d'espaces quadriques. L'étude de ces variétés peut aussi se réduire à celle des variétés biquadratiques d'un espace S_5, car Γ peut se regarder en S_5 comme une projection sur S_4 d'une variété biquadratique, intersection de deux variétés quadratiques à quatre dimensions. Il y a aussi une relation étroite entre ces variétés cubiques et les complexes quadratiques de l'espace ordinaire, puisque l'intersection d'une variété quadratique non dégénérée de S_5 avec une autre est bien un complexe quadratique, lorsqu'on regarde les droites de S_3 comme éléments de ces variétés; et Γ peut se considérer, sous un certain point de vue, comme une projection d'un tel complexe.

Des propriétés de ces Γ on déduit, par projection, des théorèmes relatifs à une F^4 ayant deux plans doubles, et à une F^6 à sextique cuspidale, ayant un plan double, ainsi qu'à certains systèmes de droites. Par exemple, la surface F^4 est focale de deux systèmes (4,10) et (8,16). Les tangentes doubles de F^6 se décomposent en deux systèmes (6,10) et (12,16). D'autres particularités se présentent lorsqu'on projette Γ du sommet d'un des cônes quadriques qu'elle contient, et aussi lorsqu'on suppose qu'elle ait des autres points doubles hors du plan π.

(¹) Voir *Bulletin*, XIII_2, p. 171.

2° *Variétés cubiques que l'on peut engendrer avec trois réseaux projectifs.*

Une telle variété a six points doubles indépendants, et ses droites forment trois systèmes, deux (1,6) et un (4,15). La projection donne naissance à des théorèmes relatifs à la F^4 à plan double et avec six autres points doubles indépendants, et à la F^6 à sextique cuspidale et avec six points doubles indépendants, ainsi qu'aux systèmes de droites dont elles sont les surfaces focales.

3° *Variétés cubiques à sept points doubles,*

4° *A huit,*

5° *A neuf,*

6° *A dix,*

7° *A points doubles d'espèce supérieure.*

Un point double est appelé d'espèce r lorsque le cône quadrique tangent en ce point a pour support un espace S_r. Un tel point double réduit en général de 3.2^{r-2} unités la *classe* d'une variété V_{n-1}^m de l'ordre m et à $(n-1)$ dimensions, située dans S_n, c'est-à-dire le nombre des S_{n-1} tangents qui appartiennent à un faisceau quelconque. Une variété cubique Γ de S_4 peut avoir des points doubles de première, deuxième, troisième et quatrième espèce. On en obtient, par projection, des F^4 et des F^6 à points doubles biplanaires, ou uniplanaires, ou à point triple.

8° *Variétés cubiques avec un nombre infini de points doubles.*

Pour une Γ ne peuvent être lignes doubles que les suivantes :

a. Une droite,

b. Deux droites incidentes,

c. Trois droites passant par un point mais non situées dans un même plan,

d. Une conique,

e. Deux coniques n'appartenant pas à un même espace mais ayant un point commun,

f. Une quadrique rationnelle normale de S_4.

Le cas où Γ a une surface double n'est qu'un seul, c'est-à-dire qu'elle ait un plan double.

Tous ces cas sont étudiés par l'auteur. Enfin, il montre que les variétés Γ, représentables univoquement sur l'espace ordinaire, servent à établir certaines transformations doubles et triples de cet espace. En considérant la représentation de Γ sur un espace R', et la représentation sur un espace double (ou triple) R, obtenue en la projetant d'un point P pris sur Γ (ou hors de Γ), et en faisant correspondre en R, R' deux points qui correspondent à un même point de Γ, on a une transformation double (ou triple) entre R, R'. L'étude de ces transformations conduit l'auteur à la question relative à la représentation plane des systèmes de droites considérés dans ce travail, c'est-à-dire les systèmes des tangentes doubles des F, ou ceux des droites des Γ, dont ils sont les projections. Il trouve que, si Γ a moins de cinq points doubles, le système de ses droites n'est pas rationnel, et qu'il l'est lorsque Γ a cinq points doubles indépendants.

Siacci (*F.*) — [V 9]. Notice nécrologique sur Angelo Genocchi lue le trentième jour après sa mort. (463-495).

Avec la liste des travaux de A. Genocchi (au nombre de 174), et avec des

lettres de MM. Hermite, Catalan, de Tilly, Kronecker, Brioschi, Tardy, Betti, Beltrami, Casorati.

T. XL, 1890.

Loria (*G.*). — [V 3]. La période d'or de la Géométrie grecque. Essai historique. (369-445, 2 planches).

Euclide, Archimède, Hératosthènes, Apollonius, Ypsicles, Nicomède, Dioclès, Perseus, Xénodore.

Guidi (*C.*). — [T 2*b*]. Sur la théorie de la poutre continue (447-468, 5 planches).

T. XLI, 1891.

Cappa (*S.*). — [S 3]. Sur les jets ascendants. (77-148, 3 planches).

T. XLII, 1892.

Castelnuovo (*G.*). — [M_1 1*f*]. Recherches générales sur les systèmes linéaires de courbes planes. (3-43).

Dans le but de donner une méthode applicable identiquement à des systèmes birationnellement identiques (c'est-à-dire tels qu'on puisse passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle) l'auteur profite d'une relation étroite qui a lieu entre la *géométrie sur une courbe* et la théorie des systèmes linéaires, déjà signalée par M. Segre (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. I). Ce qu'il y a surtout de particulier dans le travail de M. Castelnuovo, c'est l'usage méthodique du *système adjoint*, qui est le système formé par les courbes *adjointes* des courbes du système linéaire primitif. Il est à remarquer ce que l'auteur appelle *système adjoint pur;* c'est le système adjoint dont on a retranché les courbes fixes (s'il y en a) communes à toute courbe adjointe, d'ordre $n - 3$; la relation du système pur au système primitif est invariante pour des transformations birationnelles. De ce système pur l'auteur fait plusieurs applications, entre autres à la construction et à la classification des systèmes linéaires de genre donné. Voici quelques résultats :

Le genre *effectif* d'une courbe fondamentale ne peut dépasser la *surabondance* du système.

Si le système, pour lequel la série résidue de la caractéristique n'a pas de points fixes, possède une courbe fondamentale de genre effectif égal à la surabondance du système, cette courbe contient tous les points de base du système.

Tout système linéaire dont la dimension dépasse $3p + 5$ (p étant le genre)

se compose de courbes rationnelles et est transformable en un système de courbes d'un certain ordre m, à point base $(m-1)$-uple; exception faite pour le système de toutes les cubiques planes et ses transformés.

De Paolis (*R.*). — [P1*a*]. Les correspondances projectives dans les formes géométriques fondamentales de première espèce. (495-584).

La méthode Staudt (*Beiträge zur Geom. der Lage*) pour introduire des éléments réels comme représentants des éléments imaginaires, n'étant pas susceptible d'être étendue ultérieurement, le problème de rendre la Géométrie indépendante de l'Analyse se trouvait encore non résolu lorsque l'Académie de Berlin proposa ce problème pour le prix Steiner de 1884 et puis pour celui de 1886. Cette seconde fois un Mémoire de Kötter sur ce sujet fut couronné, et publié dans les *Mémoires de l'Académie* en 1887. Le professeur De Paolis, qui avait déjà fait des recherches sur ce même sujet, présenta en 1887, avant la publication du Mémoire de Kötter, un paquet scellé à l'Académie des Lincei, qui pût témoigner de l'indépendance de ses recherches; maintenant, en 1892, il publie son travail dans les *Mémoires de Turin*. Dans ce Mémoire, le problème est résolu pour les formes de première espèce, et l'auteur se propose d'appliquer aussi sa méthode aux formes de deuxième et de troisième espèce.

Il commence (§ I) par étudier en général les *systèmes fondamentaux* d'espèces ν (systèmes linéaires ∞^ν), en établissant pour ceux-ci le principe de dualité et en considérant (§ II) leurs correspondances projectives. Puis (§ III) il introduit les éléments impropres et imaginaires, et montre comment, par ces éléments, on étend les notions ordinaires de point, droite et plan, de manière que les formes géométriques F_1, F_2, F_3, de première, deuxième et troisième espèce, peuvent se regarder comme des systèmes fondamentaux (dans le sens le plus général) de première, deuxième et troisième espèce respectivement. Il démontre ensuite la continuité de toute correspondance projective entre deux formes F_1, F'_1, en en représentant les éléments, réels et imaginaires, par les points réels propres de deux sphères. Dans le § IV l'auteur étudie les *groupements projectifs* du deuxième ordre et dans les § V-X ceux de l'ordre n. Ici il prend n formes $F_1^{(1)}, F_1^{(2)}, \ldots, F_1^{(n)}$ et établit entre leurs éléments une correspondance n-univoque, par laquelle à $n-1$ éléments, appartenant à $n-1$ des $F_1^{(i)}$, correspond *un* élément appartenant à celle des formes qui n'est pas comprise parmi les $n-1$; cet élément est le *pôle* de ces $n-1$ éléments. Si au lieu de cela on prend $n-2$ des $F_1^{(i)}$, il résulte entre les deux formes, qui restent exclues, une correspondance biunivoque (correspondance *polaire* des $n-2$ éléments considérés chaque fois); et la correspondance n-univoque est appelée *projective* lorsque toutes les correspondances biunivoques polaires sont projectives. Dans une correspondance n-univoque il y a ∞^{n-1} groupes, chacun composé de n éléments, dont un est le pôle des autres $n-1$. Ces groupes G_n constituent ce que l'auteur appelle un *groupement projectif d'ordre n*, et qu'il indique par Ap_n, groupement que l'on représenterait analytiquement par une équation

$$A_{x^{(1)}x^{(2)}x^{(n)}} = a^{(1)}_{x^{(1)}} a^{(2)}_{x^{(2)}} \ldots a^{(n)}_{x^{(n)}} = 0$$

linéaire homogène par rapport aux coordonnées des éléments générateurs des $F_1^{(i)}$.

Les Ap_n sont x^{2^n-1} et constituent un système fondamental: et l'on peut, avec ces groupements, former des systèmes fondamentaux $S_{\nu,n}$ d'espèce $\nu < 2^n - 1$; en particulier, pour $\nu = 1$ et $\nu = 2$, des *faisceaux* et des *réseaux*. Des groupements

$$A^{(1)} = 0, \ldots, A^{(\nu+1)} = 0,$$

en nombre de $\nu + 1$, déterminent en général un système fondamental d'espèce ν

$$\lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_{\nu+1} A^{(\nu+1)} = 0$$

(les équations et les notations analytiques ne servent que pour mieux s'expliquer, mais elles n'entrent pour rien dans la méthode de l'auteur). Des cas particuliers de ces groupements sont ceux du deuxième ordre, constitués par les couples de points correspondants de deux formes projectives F_1, F'_1, et ils sont étudiés dans la géométrie projective élémentaire; les faisceaux et les réseaux de ces groupements ont été étudiés par Stephanos (*Math. Ann.*, t. XXII) et Segre (*Crelle*, t. 100); pour le groupement du troisième ordre, voir : August (*De superficiebus tertii ordinis.* Diss. inaug; Berolini, 1862), Schubert (*Math. Ann.*, t. XVII), Le Paige (*Mém. couronnés de Belgique,* t. XLII, 1879; et *Bulletin de l'Acad. de Belgique,* 3e série, t. V, 1883); Le Paige et Folie (*Mém. de l'Académie de Belgique,* t. LXIII, 1882; t. XLV, 1884); et Castelnuovo (*Atti del R. Istituto Veneto,* série 6a, t. V).

Deux groupements Ap^1_n, Ap^2_n, dont les équations soient

$$a^{(1)}_{x^{(1)}} \ldots a^{(n)}_{x^{(n)}} = 0, \qquad b^{(1)}_{x^{(1)}} \ldots b^{(n)}_{x^{(n)}} = 0,$$

sont *harmoniques* lorsque leur invariant (harmonisant)

$$(a^{(1)} b^{(1)})(a^{(2)} b^{(2)}) \ldots (a^{(n)} b^{(n)})$$

est nul. L'auteur étudie les groupements projectifs harmoniques en manière purement géométrique. Tout système $S_{\nu,n}$ en détermine un autre $S_{\nu',n}$, étant

$$\nu + \nu' = 2^n - 2,$$

de manière que tous les groupements de l'un sont harmoniques à tous ceux de l'autre; ce sont deux systèmes *harmoniques*. Si $\nu = 2^n - 2$ il y a un seul groupement Ap_n harmonique à tous ceux de $S_{\nu,n}$.

Ensuite (§ XI) il suppose que les F_i ne soient pas distinctes. En les supposant toutes superposées en F_1, il obtient certains groupements projectifs particuliers, tels que $n-1$ éléments quelconques de F_1 déterminent toujours un même pôle en les considérant d'une manière quelconque comme appartenant chacun à une des $n-1$ formes superposées. Ces groupements sont des *involutions projectives d'ordre n et de rang* $n-1$, indiquées par $Ip_{n,n-1}$. Une de ces involutions se représenterait analytiquement par

$$a_{x^{(1)}} a_{x^{(2)}} \ldots a_{x^{(n)}} = 0.$$

Toutes les $Ip_{n,n-1}$ d'une même F_1 forment un système fondamental d'espèce n. Tous les groupements d'un système $S_{\nu,n}$ déterminé par $\nu + 1$ de ces involutions, sont aussi des involutions. Tout système $S_{\nu,n}$ d'involutions en détermine un autre $S_{\nu',n}$ $(\nu + \nu' = n - 1)$ de manière que toutes celles d'un sys-

tème sont harmoniques à toutes celles de l'autre (*systèmes harmoniques*); il y a une seule involution harmonique à un système $S_{n-1,n}$. La condition analytique pour l'harmonicité de deux involutions est $(ab)^n = 0$. Les involutions projectives ont été étudiées par Thieme (*Zeitschrift für Math. und Physik*, t. XXIV) et Wiener (*Rein geometrische Theorie*, etc., Darmstadt, 1885).

Puis l'auteur (§§ XII-XIV) démontre qu'il y a toujours un groupe, et un seul, commun à n involutions $Ip_{n,n-1}$ données, d'ordre quelconque, et capables de déterminer un système $S_{n-1,n}$. Ce théorème est le substitut géométrique du théorème fondamental de l'algèbre, et l'on peut y fonder la théorie géométrique des courbes et des surfaces algébriques. L'auteur en développe plusieurs conséquences : une $Ip_{n,n-1}$ a toujours n éléments n-uples, et n seulement; ils forment le groupe commun à toutes les involutions harmoniques à l'involution donnée. Les n formes F_i contenant un groupement donné Ap_n soient superposées par groupes (§ XV) de $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respectivement à r formes $F_1'^1$, $F_1'^2, \ldots, F_1'^r$ $(m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n)$; alors si nous prenons $r-1$ éléments, un pour chacune de $r-1$ d'entre les $F_1'^i$, par exemple un pour chacune des $F_1'^1, F_1'^2, \ldots, F_1'^{r-1}$, ces éléments, comptés respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}$ fois, forment un groupe de $n - m_r$ éléments; tous les groupes de m_r éléments de $F_1'^r$, qui avec ces $n - m_r$ constituent un groupe de Ap_n, forment un groupement Ap_{m_r} qui a m_r éléments m_r-uples, *correspondant* aux $r-1$ que l'on avait pris d'abord. On a ainsi entre les éléments des $F_1'^i$ une *correspondance projective d'ordre n* et de *rang* $r-1$, que l'on indique par $[m_1, m_2, \ldots m_r]$. Toute correspondance projective d'ordre n peut être obtenue, et d'une infinité de manières, d'un groupement projectif d'ordre n. Tous les groupements projectifs qui donnent ainsi lieu à une correspondance projective forment un système fondamental, dont l'auteur détermine l'espèce. Si l'on représente les éléments des $F_1'^i$, réels ou imaginaires, par les points réels propres de r sphères σ_i on a entre celles-ci une correspondance $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ qui est *continue*; par cela toute correspondance projective est continue (§ XIV). Ensuite l'auteur définit une correspondance qu'il appelle *résultante* de deux correspondances projectives données, et qui est aussi continue; et puis il démontre géométriquement le *principe de correspondance de Chasles* (§ XV). Enfin (§ XVI) il donne dans toute leur généralité les propriétés des groupes polaires, des groupes harmoniques, du jacobien, du hessien, etc.

T. XLIII, 1893.

Rien.

T. XLIV, 1894.

Porro (F.). — [U]. Latitude de Turin déterminée par les méthodes de Guillaume Struve (89-170),

$$\varphi = 45°4'7'',920 \pm 0'',045$$

Enriques (F.). — [M_2 1 ref. M_1 2]. Recherches de Géométrie sur les surfaces algébriques (171-252).

Étude de *Géométrie sur une surface*. L'auteur étudie les *systèmes linéaires* ∞^k de courbes appartenant à une surface, c'est-à-dire les systèmes tels que k points de la surface déterminent une (seule) courbe du système, les courbes (éléments) du système pouvant se faire correspondre projectivement aux points d'un espace linéaire S_k. En supposant $k > 1$, par un point de la surface il passe toujours plus d'une courbe du système; par conséquent, on peut parler du nombre de points communs à deux courbes variables. Ce nombre D est le *degré* du système; le genre π des courbes est le *genre* du système. S'il arrive que les courbes passant par un point M de la surface passent en conséquence par un certain nombre, soit $m - 1$, d'autres points, variables avec M, on a sur la surface une *involution* I_m. Un système qui ne donne pas lieu à une telle involution, c'est-à-dire dans lequel le passage d'une courbe par un point n'entraîne pas le passage par d'autres points, est un système *simple*. Après quelques propriétés sur les systèmes réductibles, l'auteur définit les systèmes *normaux* et les systèmes *complets*. Un système est *contenu totalement* dans un autre lorsque toute courbe du premier l'est aussi du second; il l'est *partiellement* lorsqu'une courbe du premier, avec une autre courbe, constitue une courbe du second. L'auteur dit qu'un système linéaire est *normal* lorsqu'il ne peut être contenu dans un autre de même degré (et ici la manière *partielle* reste exclue, ainsi que l'auteur le démontre), *complet* lorsqu'il ne peut être contenu, pas même *partiellement*, dans un autre du même genre.

Cela posé, l'auteur démontre qu'un système linéaire de degré donné appartient à un système normal déterminé, de même degré. Il trouve aussi qu'une courbe appartient à un système complet de même genre, et il déduit de là une partie du *Restsatz*. Sur une courbe générale du système, les courbes du même système déterminent une série qui est appelée *série caractéristique*. L'auteur (§ II) considère les courbes qui donnent sur la courbe générale du système ∞^r (à courbes fondamentales distinctes) un groupe résiduel de la série caractéristique, et, sur la courbe générale du système ∞^{r-1} renfermé dans le premier, donnent un groupe contenu dans le résidu de la série caractéristique. De telles courbes, sur une surface d'ordre n en S_3, sont données par des surfaces adjointes d'ordre $n - 4$. Ces courbes (*canoniques*) forment un système linéaire et sont liées invariantivement à la surface. Elles conduisent à deux caractères invariants de la surface : le genre p, qui est la dimension du système canonique, augmentée de l'unité, et le *Curvengeschlecht* de Nœther $p^{(1)}$, qui est le genre du système canonique. Les systèmes appartenant à une surface se distinguent en *purs* et *impurs*. Dans les premiers les courbes canoniques déterminent sur la courbe générale un groupe résiduel de la série caractéristique; dans les seconds ils déterminent un groupe contenu dans un groupe résiduel. Les premiers, sur une surface convenablement transformée, n'ont pas de points de base, tandis que les seconds en ont. Cette distinction se rattache à la considération des *courbes exceptionnelles* (Nœther). Comme applications, on obtient que :

Sur une surface de genre > 0, une courbe appartient à un système complet déterminé. Le résidu d'une courbe par rapport à un système normal est toujours un système normal (s'il a un degré). Un système pur est nécessairement complet ($p > 0$).

Dans le § III, l'auteur définit le système *adjoint* d'un système linéaire (C) de dimension $r \geqq 2$; les courbes de ce système donnent sur la courbe générale de (C) un groupe canonique, et sur celle d'un système ∞^{r-1} contenu dans (C) elles en donnent un, qui est contenu dans un groupe appartenant à la série

somme de la série canonique et d'une autre série qui est la différence entre celle qui est donnée par (C) et la série caractéristique du système ∞^{r-1}. En indiquant par $\delta(C)$ le *défaut* de la série déterminée par le système adjoint sur la courbe générale de (C), c'est-à-dire la différence entre la dimension virtuelle du système adjoint et sa dimension effective, la dimension de ce dernier système est $p+\pi-1-\delta(C)$. Si (C) est un système pur *simple*, la quantité $\delta(C_1)$ relative à un système pur arbitraire C_1 est $\leq \delta(rC)$, (rC) étant le système r-uple de (C) pour r suffisamment grand. Or, si la surface a des singularités ordinaires, $\delta(rC)$ pour r croissant à l'infini a un *maximum* K, qui est un caractère invariant de la surface. Le cas $K=0$, qui a lieu lorsque $\delta(rC)=0$ (et réciproquement), indépendamment de toute restriction relative aux singularités, est particulièrement important. En employant le système adjoint, l'auteur démontre que tout système impur (à points de base distincts) peut, en ajoutant ses points de base, se déduire d'un système qui coïncide avec le résidu du canonique par rapport à l'adjoint, qui est pur, ou bien n'a que des points de base simples. Ce même Chapitre contient aussi la démonstration de la seconde Partie du *Restsatz* et des applications aux surfaces des genres 0, 1. Signalons la proposition :

Deux surfaces générales d'ordre $n \geq 4$ (dans S_3) ne peuvent se rapporter biunivoquement l'une à l'autre que lorsqu'elles sont projectives.

Le Chapitre IV est dédié aux systèmes purs. Leur série caractéristique est composée lorsque l'est celle du système canonique, et, pour ces systèmes, l'auteur donne une extension du théorème de Riemann-Roch. Indiquons par $i-1$ la dimension du système résiduel de (C) par rapport au canonique, par ω la *surabondance* du système (C), c'est-à-dire qu'en supposant la surface en S_3 et en coupant (C) par des adjointes, la dimension virtuelle ρ est telle que l'on ait

$$r-\rho=\omega-i,$$

r étant la dimension effective de (C). Alors, π étant le genre de (C) et n le degré, on a

$$\pi-1-n+r=p-\omega-i.$$

Dans le Chapitre V sont traitées les courbes fondamentales. Entre les caractères de (C),

$$\pi,\ r,\ n,\ \theta=r-\rho,$$

le genre II d'une courbe fondamentale, et les caractères

$$\pi',\ r',\ n',\ \theta'$$

du système (C') résiduel de K, il y a des relations desquelles on déduit

$$\theta-\theta'=\text{II},$$

c'est-à-dire

$$\omega-i-(\omega'-i')=\text{II}.$$

Un système est *régulier* lorsque $\omega=0$. Les systèmes réguliers ont des propriétés remarquables. Par exemple, un tel système de dimension $>p$ n'a pas de courbes fondamentales de genre >0. Lorsqu'il est de dimension p, il ne peut avoir d'autres courbes fondamentales de genre >0 qu'une (seule) courbe

de genre 1 (ayant pour résidu le système canonique). Relativement aux systèmes multiples d'un système donné, l'auteur trouve que, pour m suffisamment grand, le multiple (mC) d'un système pur (C), irréductible et n'ayant que des courbes fondamentales irréductibles de genre 0, est régulier. Il déduit de là la résolution d'un problème de postulation relatif aux variétés passant par une surface dans un hyperespace, et trouve que par une surface F d'ordre n en S_r, n'ayant pas de courbes exceptionnelles et ne possédant que des points multiples à cône osculateur de genre 0, passent L variétés V_m d'ordre m, linéairement indépendantes, étant

$$L = \binom{m-r}{r} + 1 - p - \frac{m(m+1)}{2} n - m(\pi - 1),$$

pour m suffisamment grand. Enfin, la considération des courbes fondamentales de genre 0 conduit l'auteur au théorème :

Une surface en S_3 peut acquérir, par une transformation, autant de points doubles isolés qu'il y a de points doubles isolés de la surface canonique correspondante. Le nombre de ces points doubles est un autre caractère invariant pour les surfaces de genre $p > 3$.

Le Chapitre VI et dernier est relatif aux involutions. L'auteur y donne une extension d'un théorème de M. Castelnuovo, relatif aux séries irrationnelles, en démontrant que :

Si les surfaces F, F′ sont en correspondance $[1, m]$, aux courbes canoniques de la première (supposée de genre > 0) correspondent des courbes spéciales de la seconde, qui composent des courbes canoniques avec la courbe de coïncidence de l'involution I_m, dont les groupes correspondent sur F aux points de F′.

Enfin, il forme une expression invariante relative aux involutions rationnelles, où entrent les caractères d'un réseau dont deux courbes se coupent en un groupe de l'involution.

Mollame (*V.*). — [A 4 *b*]. Sur les équations abéliennes réciproques dont les racines peuvent se représenter par x, θx, $\theta^2 x$, ..., $\theta^{n-1} x$. (293-334).

Ici $\theta^k x = \theta\theta^{k-1} x$ et $\theta^n x = x$, et cette fonction θx (fonction *génératrice* des racines) doit avoir la forme

$$\theta x = \frac{a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_0}{a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r}.$$

Les équations abéliennes réciproques peuvent être de deux classes. Il peut arriver que la réciproque de $\theta^k x$ soit $\theta^{k+\mu} x$, avec μ fixe, ou bien μ peut dépendre de k. L'auteur s'occupe des équations de la première classe. Elles sont de degré pair et pour toute racine on doit avoir

$$\theta^k x \, \theta^{\frac{n}{2}+k} x = 1.$$

L'auteur démontre aussi un théorème par lequel on a un moyen de former toutes les équations abéliennes de la première classe, en partant des équa-

tions

$$x\,\theta^{\frac{n}{2}}x = 1,$$

$$\theta x\,\theta^{\frac{n}{2}+1}x = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta^{\frac{n}{2}}x\,\theta^{n}x = 1,$$

auxquelles doivent être communes les n racines. Le cas où les $\frac{n}{2}$ dernières de ces équations deviennent des identités est aussi examiné. Après, il applique les résultats obtenus à la décomposition d'une équation à deux termes en équations abéliennes. Il trouve aussi, par incidence, quelques propriétés relatives à la théorie des nombres; par exemple :

Étant $r > 1$, on a que $\varphi(r^n+1)$ est divisible par $2n$. Si r^n+1 $(r>1)$ est premier, r^n est divisible par $2n$.

Fano (*G.*). — [$M_2 8$ ref. N_1]. Sur les courbes d'ordre donné et des genres maxima dans un espace quelconque. (335-382).

Halphen a demontré que, dans S_3, les courbes gauches d'un ordre donné n, dont le genre est maximum, sont sur des quadriques. Ce théorème a été généralisé par M. Castelnuovo (*Atti di Torino*, t. XXIV, *Ricerche di Geom. sulle curve algebriche*), qui a démontré que les courbes d'ordre n appartenant à un espace S_r et ayant genre maximum, sont sur une surface réglée rationnelle normale (d'ordre $r-1$), ou bien, pour $r=5$, sur la surface du quatrième ordre de Veronese; le genre est donné par

$$\pi = \chi\left(n - \frac{r+1}{2} - \chi\frac{r-1}{2}\right),$$

χ étant le plus petit entier $\frac{n-r}{r-1}$.

Ici l'auteur étudie la question analogue pour les courbes des genres $\pi-1$, $\pi-2,\ldots$, en déterminant chaque fois la dimension (minimum) du système de quadriques qui les renferment, et en trouvant, comme variétés de base de ce système, des surfaces renfermant ces courbes. Pour les genres $\pi-1$ et $\pi-2$, on trouve que les courbes sont sur des surfaces ou à sections (hyperplanaires) rationnelles, ou à sections elliptiques. La méthode est fondée principalement sur la théorie des séries linéaires de groupes de points sur une courbe.

Enfin, comme les résultats obtenus sont relatifs à des courbes ou surfaces, par lesquelles passe un système linéaire de quadriques de dimension donnée, il peut appliquer ces résultats à la *géométrie de la droite,* en représentant en S_5 l'une quelconque des quadriques du système par l'ensemble des droites de S_3. Il obtient ainsi des propriétés relatives à certaines surfaces réglées et à certaines congruences.

Ferraris (*G.*). — [B 12 ref. T 7]. Méthode pour la tractation des vecteurs rotatoires ou alternatifs, et application aux moteurs électriques à courants alternés. (382-404).

Un vecteur est *rotatoire* lorsque sa valeur scalaire est constante, et sa direction se meut autour d'un axe avec une vitesse constante. La composition de deux vecteurs rotatoires se fait avec la règle du parallélogramme, lorsqu'ils sont de sens égal. Cette composition, lorsqu'ils sont égaux et de sens contraires, donne naissance à un *vecteur alternatif*. L'auteur expose la théorie de ces grandeurs, et en fait l'application aux champs magnétiques, et aux moteurs électriques à courants alternés.

T. XLV, 1896.

Lauricella (*G.*). — [T2*a* ref. H9*f*]. Sur les équations du mouvement des corps élastiques. (295-330).

L'intégration des équations du mouvement élastique dépend de celle d'un système d'équations indéfinies, que l'on obtient des équations de l'équilibre élastique en substituant, aux composantes des forces qui agissent sur les points du corps, les fonctions inconnues multipliées par un paramètre arbitraire; avec des conditions au contour, que l'on peut obtenir aussi de celles de l'équilibre en supposant nulles les tensions. La question est analogue à celle des vibrations transversales des membranes. Tout revient à démontrer l'existence d'une série indéfinie de valeurs (*exceptionnelles*) du paramètre arbitraire, pour lesquelles les équations indéfinies peuvent s'intégrer. M. Poincaré est parvenu à la considération des valeurs exceptionnelles, en admettant que l'expression

$$-\int_S \varphi\, dS$$

(φ étant le potentiel des forces élastiques), considérée comme fonction des déplacements, assujettis à certaines conditions, ait un minimum: mais l'existence des valeurs exceptionnelles dépend de celle de ce minimum, qui n'est pas démontrée. L'auteur, en suivant une voie tenue par Schwarz, Picard et Poincaré même dans la question des membranes élastiques, a pu parvenir à la détermination des valeurs exceptionnelles et des intégrales correspondantes (*solutions exceptionnelles*), lorsque les déplacements au contour sont nuls, et aussi, sous certaines hypothèses, lorsque les tensions sont nulles.

T. XLVI, 1896.

Giudice (*F.*). — [F8*b*]. Sur l'équation du cinquième degré (31-64).

Étude des méthodes de résolution. — Ce Mémoire fait suite à la Note du même auteur : *Sulla soluzione dell' equaz. algebrica di* 5° *grado* (*Atti di Torino*, t. XXVIII).

L'auteur donne les équations typiques, résolubles algébriquement, et qu'on peut directement identifier avec les transformées de l'équation du cinquième degré. Toute pareille identification donne une méthode de résolution, et l'irra-

tionalité transcendante qu'on doit correspondamment ajouter est celle qui sert pour l'identification. Aux équations résolubles connues, l'auteur en ajoute deux nouvelles. L'irrationalité qu'on doit ajouter est mise par l'auteur sous diverses formes; elle est exprimée par une équation à deux variables, puis avec les intégrales elliptiques, et ensuite par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

Lauricella (*G.*). — [T 2 *a* δ ref. H 9]. Sur l'équation des vibrations des plaques élastiques enchâssées (65-92).

L'auteur commence par l'intégration de l'équation

$$(1) \qquad \Delta^2(\Delta^2 u) = f(x, y).$$

Il établit une formule analogue à celle de Green et prouve que, pour trouver une fonction satisfaisant à (1), il suffit de donner au contour les valeurs de cette fonction et de sa dérivée normale. La construction d'une telle intégrale peut se faire dépendre d'une fonction analogue à celle de Green. Il fait une application au cas où le contour est une droite indéfinie. Puis il passe à l'intégration de l'équation

$$(2) \qquad \Delta^2(\Delta^2 u) = ku,$$

en se fondant sur la détermination d'une série indéfinie de solutions exceptionnelles correspondant aux valeurs exceptionnelles du paramètre k.

Fano (*G.*). — [P 6 ref. J 4 *f*]. Sur les variétés algébriques avec un groupe continu non intégrable de transformations projectives en elles-mêmes. (187-218).

Un groupe continu $\infty^r(G_r)$ est *intégrable* lorsqu'il y a une série de sous-groupes $G_i(i = r - 1, \ldots, 2, 1)$, dont chacun a i paramètres essentiels, et tels que chacun est un sous-groupe invariant du précédent G_{i+1} (et G_{r-1} de G_r). Un groupe *non intégrable* doit avoir au moins trois paramètres essentiels. M. Engel a démontré qu'un groupe continu est intégrable seulement lorsqu'il ne contient aucun groupe ∞^3 *simple* (n'ayant pas de sous-groupe invariant). Par cela les groupes non intégrables sont ceux qui contiennent un tel groupe simple ∞^3 (ou bien qui sont eux-mêmes simples ∞^3), et la question de déterminer les variétés mentionnées dans le titre du Mémoire est ramenée à la détermination des variétés admettant des groupes projectifs ∞^3 de transformations en elles-mêmes. Ces groupes sont étudiés par l'auteur dans le § 2, où il démontre que dans S_r les seuls groupes projectifs de cette espèce, qui ne transforment pas en lui-même aucun espace subordonné, sont ceux qui transforment en elle-même une courbe rationnelle normale de S_r. S'il y a des espaces unis, ceux de ces espaces dans lesquels il n'y a pas d'autres espaces unis, doivent être indépendants deux à deux et former un système appartenant à S_r, c'est-à-dire qu'on doit avoir $m(\geqq 2)$ espaces unis indépendants de dimensions $h_1, h_2, \ldots, h_m$ $(0 \leqq h_i \leqq r - 1)$, de manière qu'il soit

$$\sum_i (h_i + 1) = r + 1.$$

Ce théorème est ensuite complété en démontrant que tout groupe projectif simple ∞^3 de S_r transforme en elles-mêmes un certain nombre de courbes rationnelles normales, d'ordre $\leq r, C^{h_1}, C^{h_2}, \ldots$, appartenant à des espaces indépendants, et dont les ordres, augmentés de 1, donnent pour somme $r+1$. Les types des groupes projectifs simples ∞^3 dans S_r peuvent ainsi être déterminés. En représentant sur les courbes rationnelles C^{h_1}, $C^{h_2}, \ldots$ certaines formes binaires f_x, $f_y, \ldots$ des ordres h_1, $h_2, \ldots$ respectivement, on a que la recherche de toute variété algébrique M_{r-1} de S_r, admettant un groupe simple ∞^3, est ramenée à celle des invariants des différents systèmes de ces formes binaires.

L'application à l'espace ordinaire fait retrouver les quadriques, le cône quadrique et la développable circonscrite à une cubique gauche. L'application à l'espace S_4 donne quatre surfaces et sept variétés à trois dimensions.

Jadanza (*N.*). — [V 7]. Pour l'histoire de la lunette. Contribution à l'histoire de la méthode expérimentale en Italie (253-280).

Porro (*F.*). — [U.]. Observations d'étoiles variables, faites à Turin et à Superga (281-336).

T. XLVII, 1897.

Almansi (*E.*). — [T 2*a* ref. H 9 *f*]. Sur la déformation de la sphère élastique. (103-125).

L'auteur s'appuie principalement sur la propriété qu'une fonction Φ satisfaisant à l'équation

$$\Delta^2 \Delta^2 = 0$$

peut se représenter au moyen de deux fonctions φ, χ satisfaisant à l'équation

$$\Delta^2 = 0,$$

par la formule

$$\Phi = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\,\varphi + \chi,$$

R étant constant. Il en déduit que, si

$$\Delta^2 u = \frac{\partial K}{\partial x}, \qquad \Delta^2 v = \frac{\partial K}{\partial y}, \qquad \Delta^2 w = \frac{\partial K}{\partial z},$$

et $\Delta^2 K = 0$, on a

$$u = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda,$$

$$v = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu,$$

$$w = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu,$$

φ, λ, μ, ν étant harmoniques, et étant aussi

$$\frac{1}{2}\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4}\text{K}.$$

Sur ce théorème l'auteur fonde sa méthode d'intégration relative au problème de la sphère élastique, dans le cas où l'on connaît les déplacements à la surface, et dans celui où l'on connaît les tensions.

Naccari (*A.*). — [V 9]. Galilée Ferraris. Commémoration (143-154).

Avec la liste des trente-deux publications de G. Ferraris, relatives principalement à l'électrotechnique et à la géométrie vectorielle.

Tedone (*O.*). — [T 2*a* ref. Q 2]. Sur les vibrations des corps solides, homogènes et isotropes. (181-258, une page d'errata).

Pour l'intégration des équations relatives aux vibrations, l'auteur emploie la méthode des *variétés caractéristiques*. Il envisage les coordonnées x, y, z et le temps t comme coordonnées d'un point dans un espace de quatre dimensions, et étudie dans cet espace les équations différentielles dont il s'agit. Tout point de cet espace détermine deux variétés réelles à trois dimensions, qui sont les variétés caractéristiques; ce sont, pour le point (x, y, z, t), la variété conique de rotation autour de la parallèle à l'axe t

$$\frac{b(t_1 - t)}{\pm r} = 1,$$

et l'autre

$$\frac{a(t_1 - t)}{\pm r} = 1,$$

étant

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

et a, b deux constantes (vitesse de propagation des ondes transversales et des ondes longitudinales respectivement). Ces variétés ont, par rapport aux équations des vibrations, un usage analogue à celui des *lignes caractéristiques* introduites par Riemann relativement aux équations aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables indépendantes. L'auteur trouve les valeurs des composantes des déplacements en tout point de l'hyperespace, au moyen des valeurs de ces quantités aux points d'une portion d'une variété à trois dimensions, limitée par les variétés caractéristiques, et des valeurs des forces de masse dans une partie de S_4, déterminée aussi par les variétés caractéristiques. Ensuite il particularise les formules de manière à pouvoir les considérer comme valables dans l'espace ordinaire, et trouve pour les solides isotropes en général des formules semblables à celles données par Kirchhoff pour exprimer le principe de Huygens sur la propagation des ondes longitudinales dans un fluide élastique. Dans le Chapitre III et dernier, il y a la déduction des formules par voie directe et sans la considération des hyperespaces.

Ferraris (*G.*). — [B 12 ref. T 5, 6, 7]. Théorie géométrique des

champs vectoriels, comme introduction à l'étude de l'électricité, du magnétisme, etc. (259-338).

Exposition des fondements de la théorie. Vecteurs, leurs produits scalaires et vectoriels, flux, divergence; représentation d'un champ solénoïdal, circuitation, rotation. Puis : intégrale suivant une ligne; potentiel; vecteurs newtoniens, couches, doubles couches, distributions *circuitales* (celles où la rotation n'est pas nulle dans tout le champ). Enfin des considérations sur deux manières différentes de définir et de traiter le champ d'un vecteur.

T. XLVIII, 1899.

Pieri (*M.*). — [K 7]. Les principes de la Géométrie de position, composés en système logique déductif. (1-62).

L'auteur rassemble ici, en les complétant et en y portant aussi des modifications en quelques endroits, les résultats obtenus par lui dans les Mémoires qu'il avait publiés dans les *Atti di Torino*, t. XXX, XXXI et XXXII, et dans la *Rivista di Matematica*, t. VI.

Il réduit les notions fondamentales à deux seules : le *point projectif* et la *forme joignant deux points projectifs*. Le contenu de ces notions est tout à fait arbitraire; elles ne sont sujettes à d'autres déterminations que celles que leur imposent les postulats que l'auteur donne successivement. Ces postulats sont au nombre de 19 pour la Géométrie projective ordinaire et de 17 pour celle de l'espace général.

Au moyen de ces seules notions et de ces postulats l'auteur réussit à établir la *relation harmonique*, les notions de *segment*, de *sens*, de *séparation*, et enfin le théorème de Staudt.

Ovazza (*E.*). — [T 2 *b*]. Calcul graphique des poutres élastiques, sollicitées par flexion et par tranchant. (63-81, 2 planches).

Levi (*B.*). — [M_3 1 *a*]. Sur la variété des cordes d'une courbe algébrique. (83-142).

Parmi les cordes d'une courbe algébrique il y en a qui s'appuient à la courbe en un seul point; ce sont (outre les tangentes) des droites issues des points multiples, où elles forment des faisceaux et peuvent se regarder comme limites des droites joignant deux points d'une même branche ou de deux branches distinctes. L'auteur les appelle *cordes impropres* et les étudie en supposant la courbe dans un espace quelconque. La considération des cordes impropres peut aussi s'appliquer à la résolution des points singuliers.

Fano (*G.*). — [P 4 *c*, *d* ref. J 4]. Les groupes de Jonquières généralisés. (221-278).

Les groupes continus de transformations crémoniennes de l'espace ont été

étudiés par MM. Fano et Enriquez dans les *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. XXVI; les types birationnellement distincts de ces groupes sont :

a. Les groupes projectifs;

b. Ceux des transformations conformes;

c. Ceux que les auteurs appellent *de Jonquières généralisés*, c'est-à-dire qui transforment en lui-même un faisceau de plans, ou en elle-même une étoile de droites ;

d. Deux groupes ∞^3 simples, transitifs, bien déterminés, du troisième ou du septième ordre.

Pour compléter cette classification en déterminant tous les types distincts appartenant à a, b, c, l'auteur montre d'abord que la question se réduit à la détermination de ces types pour c, puis il fait cette détermination en trouvant douze types.

Rizzo (*G.-B.*). — [U.]. Sur les mesures récentes de la « constante solaire ». (319-357, 2 planches).

T. XLIX, 1900.

Levi-Civita (*T.*). — [R 5*a*]. Types de potentiel qui peuvent se faire dépendre de deux seules coordonnées. (105-152).

L'auteur observe que les potentiels admettant des transformations infinitésimales en eux-mêmes doivent être indépendants d'une coordonnée. Il est ainsi amené à considérer les transformations infinitésimales de l'équation de Laplace

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0,$$

qui sont celles du groupe G_7 des similitudes. Pour chacune de ces transformations il prend un système de coordonnées curvilignes ρ_1, ρ_2, ρ_3, les $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const. étant les trajectoires de la transformation infinitésimale, et ayant exprimé le $\Delta_2 u$ par ρ_1, ρ_3, ρ_3 il trouve les formes caractéristiques des potentiels correspondants en y posant

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_3} = 0.$$

Il obtient ainsi cinq catégories de potentiels binaires, à savoir (en les dénominant suivant la congruence des lignes où ils ont une valeur constante) :

1. Cylindriques, ou logarithmes ;
2. Circulaires, ou symétriques ;
3. Hélicoïdaux (dépendant d'un seul paramètre);
4. Coniques ;
5. Spiraux (dépendant d'un paramètre).

La cinquième catégorie n'était pas connue. Ensuite il cherche s'il y a d'autres potentiels binaires outre les cinq précédents. Dans ce but il forme les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions ξ^1, ξ^2, ξ^3 des va-

riables x_1, x_2, x_3 afin que la congruence

$$\frac{dx_1}{\xi^{(1)}} = \frac{dx_2}{\xi^{(2)}} = \frac{dx_3}{\xi^{(3)}}$$

soit formée par des lignes équipotentielles, et par l'application des méthodes de M. Ricci, auxquelles sont dédiés, comme digression, les paragraphes 4-5, il établit le système d'équations intrinsèques (E) pour les congruences équipotentielles; puis il trouve les équations intrinsèques (E_1) pour les congruences constituées par les trajectoires d'un groupe réel de ∞ similitudes. Après il établit les conditions d'intégrabilité des (E) et trouve que ce système ou coïncide avec celui des congruences isotropes ou bien il comprend les (E_1); conséquemment toute congruence équipotentielle ou est rectiligne isotrope ou bien elle est constituée par les trajectoires d'un groupe de ∞ similitudes; et les potentiels réels correspondants ne peuvent être qu'isotropes ou bien symétriques, hélicoïdaux ou spiraux. La comparaison de ces types, faite par la méthode de M. Cotton [*Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables* (*Comptes rendus,* novembre 1896)] donne que les potentiels isotropes sont tous équivalents aux logarithmiques; les hélicoïdaux, leur paramètre n'étant pas essentiel, forment une catégorie unique. Les spiraux forment une catégorie à part, et même ils ne s'équivalent pas pour des valeurs différentes du paramètre.

Jadauza (*N.*). — [U]. Le téléobjectif et son histoire. (153-172).

Pieri (*M.*). — [K]. Sur la Géométrie élémentaire comme système hypothétique déductif. Monographie sur le point et le mouvement. (173-222).

Avec les seules notions primitives de *point* et de *mouvement* (en entendant ce dernier comme une représentation de point sur point) et avec vingt postulats l'auteur montre qu'on peut développer toute la Géométrie élémentaire.

§ 1. Généralités sur le point et sur le mouvement. La relation d'alignement entre points. On introduit la droite, le plan, la sphère.

§ 2. Rabattement d'une droite sur elle-même. Centre d'un couple de points. Rabattement d'un plan sur lui-même. Relation d'orthogonalité entre trois points, ou entre deux droites incidentes.

§ 3. Rabattement d'un plan sur un autre. Orthogonalité entre droites et plans. Propriétés diverses relatives aux droites, plans, sphères.

§ 4. Points intérieurs ou extérieurs à une sphère. Segments, rayons, semiplans, angles, etc.

§ 5. Relation de plus grand et de plus petit entre deux segments ou entre deux angles. On introduit le triangle. Congruence des triangles et autres propositions du Ier et du IIIe Livre d'Euclide.

§ 6. Somme de deux segments. Autres propriétés des triangles, cercles, etc. Continuité de la droite.

S. R.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Troisième série, Tome XXIII, 1906 (¹).

Borel (*Émile*). — Sur les principes de la théorie cinétique des gaz. (9-32).

La théorie cinétique des gaz et ses applications et extensions diverses sont encore loin, dit l'auteur, d'être acceptées sans difficulté par tous. En particulier, les applications du calcul des probabilités aux calculs statistiques concernant les molécules excitent beaucoup de défiance chez certains esprits. Bien peu sans doute en sont restés à la boutade de Joseph Bertrand, disant que ces problèmes de probabilité ressemblent au problème célèbre de l'*âge du capitaine,* qu'on propose de déterminer, connaissant la hauteur du grand mât. Mais, sans aller jusque-là, on doit reconnaître que l'énoncé même des problèmes manque souvent de précision et que les déductions par lesquelles on arrive à la solution manquent parfois de rigueur.

En faisant cette constatation, je tiens à dire qu'elle ne diminue en aucune manière mon admiration pour les créateurs de la théorie. La route était difficile, et ils ont eu raison de ne pas s'attarder aux premiers obstacles; le plus pressé était d'arriver à des résultats susceptibles de vérification expérimentale; ces résultats sont un encouragement à persévérer dans la voie ouverte par Maxwell.

Mais cette vérification en quelque sorte *a posteriori* ne satisfait pas tous les esprits et il ne me paraît pas inutile de reprendre les principes de cette théorie cinétique pour chercher à lui donner une base rigoureuse au point de vue mathématique.

Cette tentative n'a pas grand intérêt pour les adeptes convaincus; ils vont de l'avant avec succès; ils perdraient leur temps en retournant en arrière, et je serais le dernier à le leur conseiller.

Aussi c'est à ceux qui jusqu'ici ont plus ou moins partagé sur la théorie cinétique des gaz l'opinion de Joseph Bertrand que je voudrais m'adresser. Leurs scrupules sont légitimes à certains égards; mais il ne me paraît pas impossible de les satisfaire.

Tel est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès *réel* à la théorie, au point de vue du physicien; mais elles auront peut-être pour résultat de convaincre quelques mathématiciens de son intérêt et, en augmentant le nombre des chercheurs, contribueront peut-être indirectement à son développement. S'il en est ainsi, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique qui s'attache à une construction logique.

Leau (*L.*). — Étude sur les fonctions entières orientées, d'ordre réel non entier. (33-120).

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXX_2, p. 114.

Introduction. — En ces dernières années, les fonctions entières ont été l'objet de travaux nombreux et féconds. Depuis ceux qui ont été analysés ou critiqués dans le Livre de M. Borel, il convient de citer principalement ceux de MM. Jensen, Ernst Lindelöf, P. Boutroux et Maillet.

Ce n'est qu'exceptionnellement qu'on y suppose une certaine régularité dans la distribution des zéros; or une telle hypothèse, en même temps qu'elle est très naturelle au point de vue pratique, s'impose absolument si, après avoir obtenu des théorèmes d'un caractère très général, on veut recueillir des renseignements plus détaillés, établir des propriétés très précises; c'est une seconde étape qu'il faut inévitablement franchir.

Étant donnée une fonction entière $F(z)$ dont le produit canonique est de genre k, je me suis proposé, on va voir dans quel but, de déterminer, abstraction faite d'un certain voisinage des racines, des valeurs asymptotiques de F et de $\frac{F'}{z^{k-1}F}$, ou à leur défaut le signe et l'ordre de grandeur soit de la partie réelle, soit du coefficient de i. Dans ce dessein, j'ai fait, au sujet de la distribution des racines, les hypothèses que la méthode d'approximation qui s'offrait rendait strictement nécessaires. Convenons de dire d'une suite illimitée de racines ($a_n = r_n e^{i\alpha_n}$) qu'elle est

alignée, si α_n a une limite α;

dirigée, si elle est alignée et si, posant

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 + \frac{l_n}{n},$$

l_n a une limite l;

orientée, si elle est dirigée et si $(\alpha_n - \alpha)$ et $(l_n - l)\log n$ ont pour limite *zéro.*

Il s'agira de fonctions dont les racines forment une ou plusieurs suites *orientées;* ceci exclut le cas d'un ordre réel nul (cas certainement plus simple et qui demande à être traité séparément); on admettra en outre que cet ordre n'est pas *entier.* C'est, comme on voit, un cas douteux, à laisser d'abord de côté.

Une notion est utile à introduire : celle de la *densité* relative de deux suites de racines (quelconques); on entendra par là la limite, si elle existe, du rapport des nombres de racines de ces deux suites, contenues à l'intérieur d'un cercle infiniment grand, dont le centre est à l'origine.

$F(z)$ étant une fonction à orientation simple, de genre k, d'ordre ρ ($k < \rho$), l'équation $F(z) + 1 = 0$ se prête à une étude approfondie, grâce aux connaissances acquises sur F et sur $\frac{F'}{z^{k-1}F}$. On classe ces racines en plusieurs suites, *dirigées,* dont on déterminera les *densités* par rapport à la suite des zéros de F; ces densités dépendent de la différence $\rho - k$, qui joue un rôle important dans toutes ces questions et que j'appelle *ordre excédent;* s'il est inférieur à $\frac{1}{2}$, on voit apparaître une suite orientée formée de racines infiniment voisines de celles de F. Tous ces résultats s'étendent en général à l'équation

$$F(z) + G(z) = 0,$$

G étant une fonction entière d'ordre inférieur à celui de F et dont les racines sont d'ailleurs arbitrairement distribuées.

La recherche des racines de la dérivée d'une fonction orientée $F(z)$ est l'objet d'une seconde application des Chapitres préliminaires. L'expression $\frac{F'}{z^{k-1}F}$ permet en quelque sorte de sonder les diverses régions du plan; elle décèle la présence des zéros de F', et l'on obtient les propriétés que voici : en général, *la dérivée d'une fonction orientée est une fonction orientée;* la différence des nombres de racines des deux fonctions dans un cercle infiniment grand, dont le centre est à l'origine, est finie; les racines de F' et de F se groupent en plusieurs suites deux à deux associées, et dans un couple de suites elles se correspondent une à une; à partir d'un module assez grand, b_n à a_n, en sorte que $\left|\frac{b_n - a_n}{a_{n+1} - a_n}\right|$ ait une limite finie et que l'on peut déterminer. Ces faits précis prouvent que la définition des fonctions orientées n'est pas seulement inspirée par des nécessités de calcul, mais qu'elle est dans la nature même des choses.

La méthode qui m'a servi dans le problème précédent s'applique, convenablement modifiée, à des fonctions dont les zéros sont réels, leurs modules se suivant d'une manière quelconque. On ne doit pas en être surpris; ici l'argument des racines est constant : ce que l'on perd en variation de l'argument, on le gagne dans l'irrégularité du module. Laguerre a établi, comme on sait, un théorème concernant les racines de la dérivée d'une fonction entière (réelle) du genre fini, ayant un nombre limité de racines imaginaires. J'ai précisé ce théorème sur un point qu'il laissait douteux et je l'ai étendu, dans des cas fréquents, à des fonctions possédant des racines imaginaires en nombre infini.

Curtiss (*D.-R.*). — Sur la théorie des fonctions hypergéométriques. (121-143).

Le Mémoire fondamental de Riemann sur les fonctions hypergéométriques laisse de côté des cas particuliers dont l'examen est intéressant, et certaines de ses conclusions sont inexactes. C'est pourquoi M. Curtiss revient sur ce sujet, après M. Schilling, par des méthodes qui généralisent celles de Riemann.

Au lieu de définir les *familles hypergéométriques* par l'équation différentielle de Gauss, on peut, d'après Riemann, les définir par les quatre conditions suivantes :

I. Toute fonction de la famille est holomorphe dans tout le plan, sauf en trois points a, b, c.

II. Trois branches quelconques P', P'', P''' appartenant à la famille sont liées par une relation linéaire et homogène à coefficients constants.

III. Il existe des nombres λ' et λ'' *dont la différence n'est pas un entier,* et des branches $P_{\lambda'}$, $P_{\lambda''}$ représentées aux environs du point a par les séries

$$P_{\lambda'} = (x-a)^{\lambda'} \sum_{n=0}^{n=\infty} g'_n (x-a)^n \qquad (g'_0 \neq 0),$$

$$P_{\lambda''} = (x-a)^{\lambda''} \sum_{n=0}^{n=\infty} g''_n (x-a)^n \qquad (g''_0 \neq 0).$$

De plus, il y a des branches ayant des développements analogues autour de b avec les exposants μ', μ'', et des branches ayant des développements analogues autour de c avec les exposants ν' et ν''.

IV. Les nombres λ', λ'', μ', μ'', ν', ν'' sont liés par la relation

$$\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 1.$$

Afin d'admettre les cas où $\lambda' - \lambda''$, $\mu' - \mu''$, $\nu' - \nu''$ sont des entiers, M. Curtiss remplace les conditions III et IV par celles-ci :

III'. Il existe deux branches linéairement indépendantes P' et P'' et un nombre α tel que, pour $x = a$,

$$\lim (x - a)^{\alpha} P' = 0, \qquad \lim (x - a)^{\alpha} P'' = 0.$$

IV'. En tout point différent de a, b, c, aucune branche de la famille n'a un zéro d'ordre supérieur à 1.

Des conditions I, II et III' il résulte que chaque branche s'exprime par une fonction linéaire et homogène, à coefficients constants, de deux branches linéairement indépendantes, et que toute expression de cette espèce représente une branche de la famille. L'ensemble de deux pareilles branches est appelé un *système fondamental*. Un raisonnement classique établit l'existence du groupe de monodromie d'une telle famille, et c'est à l'étude de ce groupe que l'auteur s'attache principalement.

Après avoir soigneusement précisé ce qu'il faut entendre par le terme *familles ayant le même groupe*, M. Curtiss recherche comment il faut modifier l'énoncé de Riemann d'après lequel les exposants déterminent le groupe de monodromie. Sa conclusion est qu'*il n'est pas permis de dire que deux familles ont toujours le même groupe si leurs exposants correspondants ne diffèrent que par des entiers;* mais que, *si deux familles différentes pouvaient avoir les mêmes exposants, elles auraient le même groupe.*

Sous le bénéfice de cette observation, on peut répéter les calculs que Riemann fait dans les paragraphes 4 et 6 de son Mémoire, et l'on arrive à ces résultats fondamentaux : *une famille est uniquement déterminée par ses exposants; des branches correspondantes de trois familles ayant le même groupe sont liées entre elles par une équation linéaire homogène à coefficients rationnels.*

Nielsen (*Niels*). — Sur les séries de factorielles et la fonction gamma. (145-168).

Dans cette Lettre, adressée à M. de Sonin, l'auteur donne la suite de ses recherches sur les séries de factorielles (*Annales de l'École Normale*, 1904) et leur représentation asymptotique, dont il fait une application à la fonction Γ. Le signe $\sim$ indiquera toujours une égalité asymptotique, exacte pour $|x| = \infty$ et $R(x)$ la partie réelle de x.

M. Nielsen commence par rappeler un théorème qu'il a démontré dans le travail précité sur la fonction

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} f(z) e^{-zx} dx.$$

supposée développable en série de factorielles et qui s'exprime par la relation

$$\Omega(x) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_s}{x^{s+1}}.$$

Il complète ce résultat en prouvant que la série asymptotique précédente peut être différentiée ou intégrée terme à terme et que les séries ainsi obtenues sont certainement valables pourvu que l'argument de x soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

De nouvelles propriétés de la représentation asymptotique de $\Omega(x)$ permettent d'étudier $\Omega(u+iv)$ pour u et v réels : *si la fonction génératrice de $\Omega(x)$ est entière, ou n'admet à distance finie que le seul point singulier $t=0$, la fonction $\Omega(u+iv)$ est développable en séries de factorielles relativement aux variables u, v et r, r étant le module de $u+iv$; ces séries sont convergentes toutes les trois, pourvu que l'argument de $u+iv$ soit compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Comme premier exemple de cette théorie, l'auteur considère la fonction

$$\Psi(x) = D_x \log\Gamma(x),$$

qui ne peut être développée ni en série de factorielles, ni en série asymptotique; il donne le développement en série de factorielles

$$\Psi(x) - \Psi(x-y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{y(y+1)\ldots(y+s)}{(s+1)x(x+1)\ldots(x+s)}$$

convergente pourvu que $R(x-y) > 0$, et en déduit une série asymptotique pour $\Psi(x) - \Psi(x-y)$, valable quand $|y|$ est fini, $|x|$ très grand et son argument compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Ensuite vient une évaluation nouvelle de la série de Stirling, à l'aide de la fonction de Binet

$$\omega(x) = \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log\sqrt{2\pi}.$$

Le travail se termine par quelques remarques sur la fonction $\Gamma(u+iv)$, où u et v sont supposés réels.

Duhem (P.). — Recherches sur l'élasticité. (169-223).

Cette quatrième Partie des Recherches de M. Duhem sur l'élasticité traite des *propriétés générales des ondes dans les milieux visqueux et non visqueux.*

Chapitre I : Théorie générale de la propagation des ondes au sein des milieux dénués de viscosité. — I. Quelques lemmes de Cinématique. — II. Propagation d'une onde au sein d'un milieu dénué de viscosité. Composantes de l'élongation rapportées au milieu primitif. — III. Propagation des ondes au sein d'un milieu dénué de viscosité. Perturbation de la vitesse. — IV. Propagation

des ondes dans les milieux dénués de viscosité. Composantes de l'élongation rapportées au milieu déformé. — V. Propagation des ondes au sein d'un milieu dénué de viscosité et très peu déformé. — VI. Propagation des ondes au sein d'un milieu vitreux très peu déformé.

Chapitre II : Théorie des ondes au sein des milieux doués de viscosité. — I. Des ondes de premier ordre par rapport aux composantes de la vitesse, au sein des milieux vitreux doués de viscosité. — II. Des ondes du second ordre par rapport aux composantes de la vitesse dans les milieux vitreux doués de viscosité. — III. Intersection d'une onde-cloison et de la surface libre du milieu.

Chapitre III : Continuité de l'état liquide et de l'état vitreux.

Boussinesq (*J.*). — Propagation du mouvement autour d'un centre, dans un milieu élastique, homogène et isotrope. (225-261).

Poisson et Ostrogradsky ont étudié les premiers, vers 1830, le mouvement que fait naître, au sein d'un solide élastique indéfini, homogène et isotrope, une rupture instantanée de l'équilibre, limitée initialement à une petite sphère de rayon ε (*région d'ébranlement*). Ce mouvement consiste en une onde sphérique mobile ayant pour centre le centre d'ébranlement, et dont le rayon extérieur est $At + \varepsilon$, le rayon intérieur $at - \varepsilon$ (A, a, *vitesses de propagation* constantes).

Poisson montra, de plus, que le mouvement est presque entièrement localisé dans les deux couches, chacune d'épaisseur 2ε, qui limitent l'onde totale; qu'il est *longitudinal* (comme dans l'onde propagée par un fluide élastique) dans la couche *extérieure, transversal* (comme dans l'onde lumineuse de Fresnel) dans la couche *intérieure*.

M. Boussinesq publie la solution qu'il donne, dans son enseignement, de cet important problème, parce qu'elle est directe et naturelle et qu'elle apporte des simplifications utiles. En voici les principaux résultats :

Dans l'onde à mouvements longitudinaux, le petit déplacement éprouvé par chaque particule est dirigé sensiblement suivant le rayon R qui joint sa position primitive au centre d'ébranlement : il se transmet de particule à particule avec la vitesse de propagation A, mais en éprouvant le lent décroissement exprimé par l'inverse de la distance R. Dans l'onde à mouvements transversaux, le déplacement particulaire se propage, le long du rayon R prolongé, avec la vitesse a, sauf encore le lent décroissement du facteur $1 : R$.

La dilatation cubique et la rotation moyenne sont identiquement nulles, la première en dehors de l'onde à mouvements longitudinaux, la seconde en dehors de l'onde à mouvements transversaux, de sorte qu'elles se réduisent à zéro dans l'intervalle des deux ondes. Néanmoins, les particules comprises dans cet intervalle se meuvent *uniformément* en sens divers, *suivant des lignes droites,* avec des vitesses de l'ordre de grandeur de $1 : R^3$.

Le Mémoire se termine par la démonstration d'une loi d'*appel vers les vides,* qui se déduit des mêmes formules et qui est analogue à celle de l'attraction newtonienne. M. Boussinesq l'avait remarquée dès 1870 dans les liquides; il a reconnu en 1882 qu'elle s'étend non seulement aux gaz, mais encore aux solides élastiques isotropes.

Maillet (Edm.). — Sur les zéros des fonctions entières, des fonctions monodromes, des fonctions à ν branches. (263-338).

Ce Mémoire fait suite à divers autres que M. Maillet a publiés de 1902 à 1905 sur les fonctions entières et les fonctions monodromes. Il est divisé en trois Parties, dont voici le résumé d'après l'auteur lui-même :

Première Partie. — Je commence par définir, avec une précision suffisante pour ce qui suit, le *produit canonique* de facteurs primaires d'ordre infini non transfini, et j'en conclus une relation entre la densité des racines et l'ordre de grandeur maximum du module de ce produit pour $|z| = r$ (z étant la variable). Ceci me permet de parler de l'*ordre réel* et de l'*ordre apparent* des fonctions entières d'ordre infini non transfini, et d'indiquer quelques propriétés de ces ordres et de la multiplication ou de la division des produits canoniques les uns par les autres.

Je m'occupe ensuite de trouver une limite inférieure du module d'une fonction entière d'ordre > 0, mais non transfini, en dehors de cercles de rayons assez petits ayant pour centres les zéros, ou de couronnes circulaires concentriques d'épaisseur assez petite dont le centre est à l'origine. J'étends et je généralise, aussi bien pour l'ordre fini que pour l'ordre infini non transfini, les résultats connus pour les fonctions entières d'ordre fini. Je démontre une série de propriétés corrélatives; ainsi, $F(z)$ étant une fonction entière d'ordre (k, ρ),

$$F(z) = \Phi(z) e^{G(z)},$$

où $\Phi(z)$ est un produit canonique d'ordre $\leqq (k, \rho)$, $G(z)$ une fonction entière d'ordre $\leqq (k-1, \rho)$ (quand $k = 0$, G est un polynome de degré $\leqq \rho$), Φ ou G est d'ordre (k, ρ). J'établis une condition nécessaire et suffisante pour que la croissance d'une fonction entière d'ordre fini ou infini non transfini, donnée par son développement taylorien, soit régulière.

Deuxième Partie. — Je signale que les propriétés précédentes s'étendent en partie aux fonctions monodromes aux environs d'un point singulier essentiel isolé où elles n'ont pas de pôles (c'est-à-dire aux fonctions quasi-entières aux environs de ce point). Ceci me permet de définir l'*ordre apparent,* l'*ordre réel des zéros,* l'*ordre réel des pôles,* l'*ordre réel proprement dit,* qui est le plus grand des deux précédents pour les fonctions méromorphes et quasi-méromorphes d'ordre > 0, mais non transfini, aux environs d'un point singulier essentiel isolé, c'est-à-dire pour les fonctions monodromes d'ordre > 0, mais non transfini, aux environs de ce point essentiel isolé où elles peuvent avoir des pôles; j'établis alors, pour les fonctions $u(z)$ à ν branches définies par

$$u^{\nu} + u^{\nu-1} A_1(z) + \ldots + A_{\nu}(z) = 0,$$

où $A_1, \ldots, A_{\nu}$ sont quasi-méromorphes aux environs du point singulier essentiel isolé $z = \infty$ et d'ordre > 0, mais non transfini, l'extension de résultats connus pour le cas où $\nu = 1$ (théorèmes de MM. Picard et Borel).

Enfin, j'étudie la relation entre la croissance d'une fonction entière d'ordre infini non transfini et la distribution de ses zéros au point de vue de la régularité et de l'irrégularité. Les résultats sont, pour la plupart, analogues à ceux qu'on possède pour le cas de l'ordre fini.

Troisième Partie. — Je m'occupe du système

$$\frac{dx_1}{dz} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dx_n}{dz} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n,$$

où $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sont des fonctions quasi-méromorphes d'ordre > 0, mais non transfini, aux environs de $z = \infty$. Je donne une limite supérieure de la croissance des solutions. Il resterait à trouver des cas aussi étendus que possible où cette limite supérieure est exacte ou à peu près, comme cela a lieu pour certains systèmes particuliers.

Enfin, je termine en indiquant quelques sujets d'étude.

Castelnuovo et *Enriquez.* — Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions. (339-366).

Dans ce Mémoire est poursuivie avec succès l'analogie que des travaux récents ont établie entre le *genre* d'une courbe algébrique plane et l'*irrégularité* d'une surface algébrique, c'est-à-dire le nombre des intégrales distinctes de différentielles totales de première espèce que possède cette surface. Cette analogie subsiste, en effet, d'une façon inattendue dans les questions qui se rapportent à la connexion linéaire.

Après un lemme aux termes duquel *une courbe algébrique ne peut jamais posséder une série continue de systèmes linéaires d'intégrales abéliennes réductibles,* vient le théorème fondamental que voici :

L'irrégularité d'une variété algébrique à trois ou plusieurs dimensions est égale au nombre des intégrales simples de première espèce attachées à une surface section de la variété.

On peut, pour l'étude des intégrales, de leurs périodes, remplacer toujours la variété par la surface section, ce qui n'est plus permis quand il s'agit des intégrales d'une surface algébrique à deux dimensions et des intégrales abéliennes attachées à ses sections planes.

L'*irrégularité* d'une surface à deux dimensions est un nombre invariant relativement aux transformations birationnelles; on est parvenu à démontrer que ce nombre est égal à la différence $p_g - p_a$ entre les genres géométrique et arithmétique de la surface. Ce résultat est étendu aux variétés algébriques à trois dimensions : *leur irrégularité est égale à la différence* $P_g^{(1)} - P_{(a)}^{(1)}$ *entre les deux genres superficiels, géométrique et arithmétique, de la variété, pourvu qu'il y ait au moins* ∞^2 *surfaces canoniques* ($P_g > 2$) *se coupant deux à deux suivant des courbes variables irréductibles.* Une propriété analogue subsiste pour les variétés à plus de trois dimensions.

Ces caractères de connexion du continuum (de Riemann) à $2d$ dimensions, relatif à une variété à d dimensions, fournissent des invariants de la variété (Picard). Mais le nombre des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans

le continuum ne donne pas un nouvel invariant des variétés à d dimensions, car les auteurs démontrent que *l'irrégularité d'une variété est égale, quel que soit d, à la moitié du nombre des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans le continuum relatif à cette variété.*

On sait que les surfaces irrégulières d'irrégularité q sont caractérisées (Enriquez) par cette propriété qu'elles contiennent des systèmes ∞^q de courbes parmi lesquels il n'y en a pas ∞^2 appartenant à une série linéaire. La même propriété subsiste aussi pour les variétés algebriques à $d > 2$ dimensions.

A la fin de leur Mémoire, les auteurs reviennent sur le théorème fondamental énoncé plus haut pour en déduire diverses conséquences. Ainsi, *dans notre espace, il n'existe aucun système linéaire, de dimension supérieure à* 1, *dont la surface générale soit irrégulière,* sauf dans le cas où la courbe intersection variable de deux surfaces du système est réductible.

La dernière conséquence, plus remarquable, fournit la solution d'une question dont l'analogue, relative aux courbes algébriques, est encore en suspens. On sait qu'on peut écrire le Tableau des $2p^2$ périodes des p intégrales abéliennes normales attachées à une courbe de genre p, dès que l'on connaît $\frac{p(p+1)}{2}$ de ces périodes. Mais on ne peut choisir arbitrairement ces dernières quand p surpasse 3, car $3p-3$ seulement d'entre elles sont indépendantes. Au contraire, les auteurs démontrent qu'*on peut toujours construire une surface algébrique ayant p intégrales simples, distinctes, de première espèce, dont $\frac{p(p+1)}{2}$ périodes sont données arbitrairement*, de façon pourtant à satisfaire aux inégalités qui assurent la convergence des séries θ correspondantes.

Rémoundos (*Georges*). — Sur quelques points de la théorie des nombres. (367-386).

On sait que M. Lindemann a démontré que, *si les nombres α_i et A_i sont algébriques, l'égalité*

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_n e^{\alpha_n} = 0$$

entraîne la nullité de tous les coefficients A_i. D'autre part, un théorème dû à M. Borel apprend, en particulier, que, *si les fonctions $P_i(z)$ et $H_i(z)$ sont des polynomes, l'identité*

$$P_1(z)e^{H_1(z)} + P_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + P_n(z)e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne la nullité de tous les coefficients P_i.

L'analogie de ces deux énoncés a frappé M. Rémoundos et l'a conduit à étendre le premier par la méthode d'élimination qui lui avait permis de généraliser le second.

Il considère d'abord un polynome entier en u et du degré ν,

$$q(u) = \gamma_1 K_1(u) + \gamma_2 K_2(u) + \ldots + \gamma_n K_n(u) + K(u),$$

où les γ sont n nombres *transcendants* algébriquement distincts, les $K_i(u)$ des polynomes à coefficients *algébriques,* et prouve qu'*il ne peut exister plus de $\nu - n$ valeurs de u pour lesquelles le nombre $q(u)$ soit algébrique.*

M. Rémoundos montre ensuite que, *s'il y a des valeurs algébriques de u, pour lesquelles $q(u)$ soit un nombre transcendant de la forme Ae^{α}, les A et les α étant des nombres algébriques, le nombre de ces valeurs ne dépasse jamais ν.*

Enfin, *il ne peut exister 2ν nombres algébriques $a_1, a_2, \ldots, a_{2\nu}$, tels que les équations*

$$\varphi(z) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2\nu)$$

admettent des racines de la forme Ae^{α}, les A et les α etant des nombres algébriques.

Ces résultats rappellent l'extension du théorème de M. Picard et de ses généralisations aux fonctions multiformes, précédemment faite par M. Rémoundos.

Quittant un instant la théorie des nombres pour celle des fonctions, l'auteur obtient des résultats qui lui permettent les généralisations suivantes :

I. *Les équations de la forme $q(u) = a + Ae^{\alpha}$ qui admettent des racines algébriques, les nombres a, A et α étant algébriques, sont exceptionnelles et leur nombre ne peut dépasser $2\nu - \mu - 1$, si ν est le degré du polynome $q(u)$ et μ le nombre des coefficients de q algébriquement distincts.*

II. *Il ne peut exister $\nu + 1$ équations de la forme*

$$q(u) = a_{i,0} + A_{i,1}e^{\alpha_{i,1}} + A_{i,2}e^{\alpha_{i,2}} + \ldots + A_{i,\nu}e^{\alpha_{i,\nu}} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu),$$

admettant des racines algébriques s'il y a au moins un exposant non commun à deux des seconds membres.

III. *S'il existe une infinité d'équations de la forme précédente, admettant des racines algébriques, leurs seconds membres ne peuvent contenir qu'un nombre fini d'exponentielles distinctes.*

IV. *Étant donnée une fonction algébrique $Q(u)$*

$$Q(u) = \sigma_0(u) + \gamma_1\sigma_1(u) + \ldots + \gamma_n\sigma_n(u),$$

où les γ sont des nombres transcendants, algébriquement et linéairement distincts, les σ des fonctions algébriques multiformes de u, le nombre des valeurs algébriques de u pour lesquelles $Q(u)$ est de la forme

$$A_1e^{\alpha_1} + A_2e^{\alpha_2} + \ldots + A_me^{\alpha_m} \qquad (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \neq 0)$$

est nécessairement fini.

Le Mémoire se termine par une intéressante comparaison du théorème de M. Lindemann avec le théorème de M. Borel, considéré dans toute sa généralité.

Raffy (L.). — Recherches sur les surfaces isothermiques. Seconde Partie. (387-428).

Ce Mémoire fait suite à celui que l'auteur a publié sous le même titre dans le Volume précédent des *Annales de l'École Normale* (1905). Il a pour objet

principal la détermination systématique de surfaces isothermiques dépendant de fonctions arbitraires. Or, d'après un théorème que M. Raffy avait déjà fait connaître, les arguments des fonctions arbitraires ne peuvent être que les paramètres des lignes de courbure et ceux des lignes de longueur nulle.

Pour rapporter une surface (x, y, z) à ses lignes de longueur nulle ($\alpha =$ const., $\beta =$ const.), on peut introduire les deux coordonnées isotropes $x + iy = \xi$, $x - iy = \eta$. Désignant par p, q, r, s, t les dérivées de ξ, par p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 celles de η, on a immédiatement

$$(1)\quad d\xi = p\,d\alpha + q\,d\beta, \qquad d\eta = p_1\,d\alpha + q_1\,d\beta, \qquad i\,dz = \sqrt{pp_1}\,d\alpha + \sqrt{qq_1}\,d\beta.$$

L'intégrabilité de dz s'exprime par la condition

$$(2)\qquad \frac{s}{\sqrt{pq}} = \frac{s_1}{\sqrt{p_1 q_1}},$$

dont il suffit de tenir compte pour que les formules (1) fournissent la solution la plus générale du problème.

Soit $2\sqrt{\tau}$ la valeur commune des rapports (2); on peut choisir *arbitrairement* la fonction τ. Les identités

$$(3)\qquad \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\frac{\partial\sqrt{q}}{\partial\alpha},$$

$$(4)\qquad \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta}$$

donnent alors, par élimination de q,

$$(5)\qquad \frac{\partial^2\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\tau'_\alpha}{2\tau}\,\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta} - \tau\sqrt{p} = 0,$$

équation à laquelle doit satisfaire aussi p_1. On détermine ensuite q et q_1 par l'identité (4) que vérifient également q_1 et p_1.

Tout revient donc à intégrer l'équation (5). Par analogie avec une dénomination employée par Ampère, l'auteur appelle *surfaces de première classe* les surfaces telles que les différentielles de leurs coordonnées s'expriment explicitement au moyen de fonctions arbitraires de α et β et de dérivées, en nombre limité, de ces fonctions arbitraires : les surfaces de première classe sont celles pour lesquelles l'intégrale de l'équation (5) s'exprime de cette même manière.

Or, on sait que, pour les équations du type linéaire auquel appartient l'équation (5), la méthode de M. Darboux se confond avec celle de Laplace : la détermination des surfaces de première classe se ramène donc à la formation et à l'intégration de toutes les équations (5) pour lesquelles la suite de Laplace se termine dans les deux sens. La solution de ce dernier problème résulte de travaux dus à M. Goursat. Dans un premier Mémoire (*Bull. Soc. math.*, t. XXV, 1897, p. 36), M. Goursat démontre que, si la suite de Laplace relative à l'équation (5) se termine dans un sens après n transformations, elle se termine dans l'autre sens après $n - 1$ transformations. Il suffit dès lors de consulter *une seule* des deux suites d'invariants, dont les premiers termes sont

$$\tau, \qquad \tau_1 = \tau - \frac{\partial^2 \log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \qquad \tau_2 = \tau_1 - \frac{\partial^2 \log\tau_1\sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

A chaque fonction τ vérifiant soit l'équation $\tau = 0$, soit l'une des équations $\tau_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ correspond pour l'équation (5) une intégrale p qui s'exprime de la façon voulue. Dans un travail subséquent (*Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 1), M. Goursat indique le moyen d'intégrer de proche en proche les diverses équations $\tau_n = 0$.

Les surfaces de première classe se répartissent d'une façon naturelle en divers genres, d'après le rang de l'invariant τ_n à l'évanouissement duquel elles correspondent. Ainsi, les surfaces pour lesquelles τ est nul forment un genre; celles pour lesquelles τ_1 est nul forment un genre, et ainsi de suite. Mais la classification peut être poussée plus loin. M. Raffy a déjà fait observer qu'il y a lieu de considérer comme une équation de Laplace, relativement à la fonction φ, l'équation

$$(rt - s^2)\varphi - 2ps\varphi'_\alpha - 2qs\varphi'_\beta + 4pq\varphi''_{\alpha\beta} = 0$$

dont O. Bonnet a fait dépendre la détermination des surfaces qui ont pour élément linéaire $4\varphi^2(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$. Cette *équation de déformation* admet deux séries d'invariants h, h_1, h_2, $\ldots$, k, k_{-1}, k_{-2}, $\ldots$, qui jouissent des propriétés suivantes :

Si τ est nul, h et k sont nuls.

Si h est nul ou si k est nul, τ_1 est nul.

Si τ_1 est nul, on a soit $h = k = 0$; soit $h_1 = 0$, si $h \neq 0$; soit $k_{-1} = 0$, si $k \neq 0$; soit enfin $h_1 = k_{-1} = 0$, si $hk \neq 0$.

Si h_1 est nul ou si k_{-1} est nul, τ_2 est nul.

Si τ_2 est nul, on a soit $h_1 = k_{-1} = 0$; soit $h_2 = 0$, si $h_1 \neq 0$; soit $k_{-2} = 0$, si $k_{-1} \neq 0$; soit enfin $h_1 = k_{-2} = 0$, si $h_1 k_{-1} \neq 0$.

D'après ces théorèmes et leurs analogues relatifs aux invariants de rang plus élevé, les surfaces du genre défini par l'hypothèse $\tau_{n+1} = 0$ se subdivisent en trois espèces, suivant que les invariants h_n et k_{-n} sont nuls tous les deux, ou qu'un seul est nul, ou qu'ils sont tous les deux différents de zéro.

Cette division en espèces est celle que l'auteur suit dans la recherche des surfaces isothermiques de première classe. Il commence par établir l'*équation fondamentale* à laquelle satisfait toute coordonnée isotrope ξ d'une surface isothermique, considérée comme fonction de α et β. Cette équation aux dérivées partielles du quatrième ordre *admet comme caractéristiques les lignes de longueur nulle et les lignes de courbure*. La condition d'isothermie des lignes de courbure étant

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{A_0(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right) = \frac{1}{B_0(\beta)} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right),$$

l'équation fondamentale prend, grâce à l'introduction des invariants h et k, la forme remarquable

$$\text{(F)} \qquad q \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{pk}{A_0 q}\right) = p \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{qh}{B_0 p}\right).$$

Connaissant une solution de cette équation, pour trouver les surfaces isothermiques qui lui correspondent, on doit intégrer un système complet, dont l'intégrale générale est une fonction linéaire et homogène de deux constantes arbitraires; elle se détermine par une quadrature dès qu'on a pu obtenir une intégrale particulière.

2de Partie -

Après ces généralités, l'auteur procède à la recherche des surfaces de première classe pour lesquelles τ est nul ou τ_1 est nul, en s'attachant à distinguer soit au moyen de la condition d'isothermie (I), soit au moyen de l'équation fondamentale (F) celles qui sont isothermiques. Voici les résultats obtenus :

Le genre défini par l'hypothèse $\tau = 0$ se compose exclusivement des surfaces minima, qui sont isothermiques.

La propriété commune à toutes les surfaces pour lesquelles τ_1 est nul consiste en ce que leur élément linéaire devient celui d'une sphère de rayon 1 quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne. Les surfaces isothermiques pour lesquelles $\tau_1 = 0$ exigent une discussion assez longue : elles se répartissent en trois espèces et forment plusieurs variétés.

L'espèce pour laquelle les invariants h et k sont nuls tous les deux comprend les sphères et les surfaces (B) de Bonnet qu'on déduit des surfaces minima par double inversion singulière.

L'espèce pour laquelle un seul des invariants h et k se réduit à zéro est constituée par les surfaces (Θ) de M. Thybaut, surfaces dont les sphères harmoniques sont tangentes à un même plan (non isotrope).

Enfin l'espèce pour laquelle les deux invariants h et k sont différents de zéro comprend deux variétés, savoir les transformées par normales parallèles (transformation de Bour-Christoffel) des inverses des surfaces minima et des inverses des surfaces (Θ).

Goursat (*E.*). — Sur les intégrales infiniment voisines des équations aux dérivées partielles. (429-501).

Introduction. — La notion de l'*équation auxiliaire* d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes a été introduite par M. Darboux, qui l'a appliquée à diverses questions de Géométrie infinitésimale. Les travaux de M. Poincaré ont montré toute l'importance de cette notion dans l'étude des solutions infiniment voisines de certaines solutions particulières supposées connues dans les équations différentielles ordinaires. Je me suis proposé d'étendre les théorèmes de M. Poincaré aux équations aux dérivées partielles. Il y a une différence essentielle entre les deux problèmes. En effet, dans le cas d'un système d'équations différentielles ordinaires, le système auxiliaire est un système d'équations différentielles *linéaires* à une seule variable indépendante et l'on connaît, *a priori*, les points singuliers possibles pour les intégrales. Il n'en est plus de même, en général, pour une équation linéaire aux dérivées partielles; pour éviter cette première difficulté, j'ai dû supposer l'intégrale particulière, que l'on connaît, rapportée à ses *lignes caractéristiques*. La convergence des développements ne peut non plus s'établir par les méthodes employées pour les équations différentielles ordinaires et il m'a fallu user d'autres artifices.

Les équations du premier ordre sont traitées par deux méthodes, dont l'une offre une application de la théorie des caractéristiques; la seconde méthode, qui est indépendante de cette théorie, s'étend aux équations du second ordre à deux variables indépendantes. Je me borne, d'ailleurs, dans ce Mémoire, aux théorèmes généraux, réservant les applications pour un autre travail.

J'ai dû d'abord reprendre l'exposition de quelques théorèmes relatifs à la théorie des fonctions implicites, pour mettre les énoncés sous une forme mieux adaptée aux applications que je devais en faire.

Picard (*Émile*). — Sur une formule relative au potentiel de simple couche et son application à la recherche des fonctions harmoniques satisfaisant à certaines conditions. (503-508).

Soient S une surface fermée et

$$V = \int\int \frac{\rho}{r}\, d\sigma$$

un potentiel de simple couche relatif à cette surface, $d\sigma$ étant l'élément superficiel de S, ρ la densité et r la distance de l'élément $d\sigma$ au point A pour lequel on prend le potentiel. On mène en un point m de la surface la normale intérieure n et l'on représente par $\frac{dV}{dn}$ et $\frac{dV'}{dn}$ les valeurs limites des dérivées de V prises suivant la direction n en un point *intérieur* et en un point *extérieur* de la surface, infiniment voisins de m sur la normale.

On a les deux formules

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn}\right) = 2\pi\rho_m, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn}\right) = \int\int \rho \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\sigma, \end{cases}$$

ψ étant l'angle que fait avec n la droite qui joint le point m à l'élément $d\sigma$.

La première de ces formules est classique. Pour la retrouver et pour obtenir en même temps une démonstration simple de la seconde, M. Picard établit, en s'inspirant d'un raisonnement dû à Robin et qu'il complète, la formule fondamentale

$$(\beta)\qquad \int\int \rho \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\sigma - \frac{dV}{dn} = 2\pi\rho_m.$$

Une analyse toute semblable conduit à la relation analogue

$$(\gamma)\qquad -\int\int \rho \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\sigma + \frac{dV'}{dn} = 2\pi\rho_m.$$

Il n'y a qu'à ajouter et à retrancher les équations (β) et (γ) pour retrouver les relations (α).

M. Picard applique la formule (β) à la solution du problème qui consiste à *trouver une fonction harmonique* V *continue à l'intérieur d'une surface fermée* S *et telle qu'en tout point de la surface on ait*

$$aV + b\frac{dV}{dn} = F,$$

a, *b et* F *étant trois fonctions données du point.* Si l'on cherche à exprimer V par un potentiel de simple couche, la densité ρ, qui est l'inconnue du problème, est déterminée par la condition que

$$\rho - \int\int \frac{\rho}{2\pi r}\left(\frac{a}{b} + \frac{\cos\psi}{r}\right) d\sigma$$

soit une fonction donnée sur S. C'est là une équation de Fredholm, et l'on n'est

certainement pas dans un *cas singulier* si a et b conservent toujours les mêmes signes sur la surface, *ces signes étant contraires* : un exemple de cette circonstance est fourni par un corps en équilibre de température avec rayonnement.

Picard (Émile). — Sur la solution du problème généralisé de Dirichlet, relatif à une équation linéaire du type elliptique, au moyen de l'équation de Fredholm. (509-516).

La difficile recherche de la fonction u, continue dans un contour C, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f,$$

où a, b, c, f sont des fonctions de x et y, et prenant des valeurs données sur C, se ramène, dans tous les cas, comme le montre M. Picard, à une équation de Fredholm, savoir

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\int\left[\frac{\partial(aG)}{\partial\xi}+\frac{\partial(bG)}{\partial\eta}-cG\right]u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+\psi(x,y),$$

où G désigne la fonction classique de Green $G(\xi,\eta;x,y)$ et $\psi(x,y)$ l'intégrale double

$$-\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi,\eta)\,G(\xi,\eta,x,y)\,d\xi\,d\eta.$$

La fonction $u(x,y)$ tirée de cette équation admet des dérivées partielles du premier ordre finies dans C et sur C, et dans C elle a des dérivées du second ordre.

Il n'y a exception que si l'on se trouve dans un cas singulier ; mais ces cas d'exception sont précisés par l'analyse de l'auteur.

Merlin (Émile). — Sur certaines familles de réseaux concourants. (517-568).

Généralisant la notion de réseaux parallèles, l'auteur dit que *deux réseaux correspondants* de l'espace E_n à n dimensions *se coupent*, lorsque, en deux points correspondants quelconques, les tangentes aux courbes correspondantes des deux réseaux se coupent. Des *réseaux* de E_n, en nombre quelconque, sont dits *concourants* quand, aux points correspondants, les tangentes aux courbes correspondantes des réseaux sont concourantes. Un réseau conjugué, découpé sur une surface par les développables d'une congruence, est dit *conjugué à la congruence*.

Avant d'aborder l'objet principal de sa recherche, M. Merlin fait connaître diverses propositions, relatives aux congruences et aux réseaux conjugués de l'espace E_n. Voici la première :

Étant donnés deux réseaux (M) *et* (M$_1$) *qui se coupent et une surface* Σ *telle que, aux points d'intersection de* Σ *avec les droites* MM$_1$ *qui joignent deux points correspondants de* (M) *et de* (M$_1$), *le plan tangent passe par*

la droite commune aux plans tangents à (M) *en* M *et à* (M_1) *en* M_1, *les développables de la congruence des droites* MM_1 *déterminent sur* Σ *un réseau* (M_2) *qui, avec* (M) *et* (M_1), *forme un système de trois réseaux concourants.*

Suivent diverses propriétés des congruences dont l'une des nappes focales se réduit à une courbe, ou qui admettent parmi leurs réseaux conjugués au moins un réseau dont une des familles de lignes conjuguées se compose de courbes de contact de cônes circonscrits.

Après ces préliminaires, l'auteur étudie (Section I) les propriétés des coefficients h et l des équations

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = h\frac{\partial x_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial v} = l\frac{\partial x_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

qui lient les coordonnées homogènes ($x_1, \ldots, x_{n+1}$) et ($y_1, \ldots, y_{n+1}$) de deux réseaux concourants (M) et (N).

Il se propose ensuite (Section II), de *déterminer les familles de réseaux concourants, conjugués à une même congruence, qui renferment au moins un réseau conjugué à invariants égaux*. Si les x_i sont les coordonnées homogènes d'un premier réseau (M) et les y_i celles d'un second réseau (N) d'une famille de réseaux concourants conjugués à une même congruence, les coordonnées homogènes z_i d'un troisième réseau, d'ailleurs quelconque, de la famille, seront de la forme

$$(2) \qquad z_i = y_i + \lambda x_i \qquad (\lambda = \text{const.}).$$

Des relations (1) et (2) on déduit l'équation de Laplace

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + \frac{l+\lambda}{h+\lambda}\,\frac{h_v}{h-l}\,\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{h+\lambda}{l+\lambda}\,\frac{l_u}{l-h}\,\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

propre au réseau (P). Du point de vue où se place l'auteur, les familles pour lesquelles les fonctions h et l sont les mêmes ne suffisent pas essentiellement : c'est pourquoi il les désigne par le nom générique de *familles* (h, l). Il convient en outre de dire que deux familles (h, l), (h', l'), *se ramènent l'une à l'autre* lorsqu'on peut faire correspondre chaque réseau de l'une à un réseau de l'autre, de telle manière que les équations de Laplace relatives à deux réseaux correspondants aient les mêmes invariants, à l'ordre près. Il résulte alors des théorèmes de la Section précédente que les familles $\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{l}\right)$, ($l$, h), ($\alpha h + \beta$, $\alpha l + \beta$), où α et β désignent des constantes, *se ramènent* à une famille (h, l).

La recherche des réseaux (P), pour lesquels l'équation (3) a des invariants égaux, comporte quelques cas particuliers.

I. Si la congruence conjuguée aux réseaux P est formée de droites concourantes, c'est-à-dire si l'on suppose $h = l$ (ce qui entraîne $h = l = $ const.), ou bien tous les réseaux sont à invariants égaux, ou bien aucun n'est tel.

II. Si les deux nappes focales de la congruence se réduisent à des courbes, tous les réseaux sont à invariants égaux. On trouve ainsi les familles pour lesquelles $h = V(v)$, $l = U(u)$, $h - l \neq 0$.

III. Une seule nappe focale se réduit à une courbe. Voici les résultats relatifs à cette hypothèse :

1° Si la famille (P) est (U_1, U_2) ou (V_1, V_2), les U désignant des fonctions quelconques de u, les V des fonctions quelconques de v, tous les réseaux sont à invariants égaux et se composent de courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits;

2° Si la famille (P) est $(-U-uv,\ uU'-U)$ ou $(vV'-V,\ -V-uv)$, un seul réseau est à invariants égaux; il se compose de courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits;

3° Si la famille (P) n'appartient à aucun des deux types précédents, elle ne contient aucun réseau à invariants égaux.

Dans la Section III, l'auteur traite le cas général où la congruence conjuguée aux réseaux cherchés n'a point de nappe focale réduite à une courbe. En exprimant l'égalité des invariants de l'équation (3) il obtient une équation qui est algébrique et du quatrième degré par rapport à la constante λ. Donc dans une famille de réseaux concourants, conjugués par rapport à une même congruence, il n'existe, en général, *aucun* réseau à invariants égaux. Il peut y en avoir *un, deux, trois* ou *quatre*; s'il y en a *plus de quatre, tous* les réseaux de la famille sont à invariants égaux. Dans l'énoncé des résultats qui vont suivre, U et V désigneront respectivement, comme plus haut, des fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v :

1° Tous les réseaux seront à invariants égaux si la famille est (U, V) et réciproquement.

2° Quatre réseaux et quatre seulement seront à invariants égaux si la famille est

$$\left(a+\frac{bU}{U+V},\ a+\frac{bV}{U+V}\right),$$

a, b étant des constantes, et réciproquement.

3° Trois réseaux et trois seulement seront à invariants égaux, si la famille est

$$\left(\frac{\sin 2U\sin(U+V)+a\cos(U-V)}{\sin 2U\sin(U+V)+b\cos(U-V)},\ \frac{\sin 2V\sin(U-V)+a\cos(U-V)}{\sin 2V\sin(U+V)+b\cos(U-V)}\right),$$

a, b étant des constantes, et réciproquement.

4° Deux réseaux au moins seront à invariants égaux; la famille sera alors

$$\left(\frac{U+a'e^{\varphi-\chi}}{U+b'e^{\varphi-\chi}},\ \frac{V+a'e^{\varphi-\chi}}{V+b'e^{\varphi-\chi}}\right);$$

quand U et V ne se réduisent pas à des constantes, on a

$$\varphi=\frac{\partial^2\pi}{\partial u\,\partial v},\qquad \chi=\frac{v}{u}\,\frac{\partial^2\pi}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{u}\,\frac{\partial^2\pi}{\partial u}=\frac{u}{v}\,\frac{\partial^2\pi}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{v}\,\frac{\partial\pi}{\partial v},$$

π étant une solution quelconque de l'équation fournie par l'identification des deux expressions de χ, et qui se ramène à l'équation bien connue

$$E\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)=0.$$

Si $V = \text{const.} = 1$, on a

$$\varphi = \frac{U_1 V_1}{\sqrt{U_1^2 - 1}} + U', \qquad \chi = \frac{V_1}{\sqrt{U_1^2 - 1}} - U_1 U' - U$$

(U_1 fonction arbitraire de u, V_1 fonction arbitraire de v).

Si U et V se réduisent respectivement à deux constantes a et b, on a

$$\varphi = a V_1 - b U_1, \qquad \chi = b V_1 - a U_1.$$

5° Un réseau au moins est à invariants égaux; la famille est

$$\left(\frac{h + a}{h + b}, \quad \frac{l + a}{l + b}\right),$$

h et l étant solutions des équations suivantes,

$$\frac{h'_v}{l - h} = P, \qquad \frac{l'_u}{h - l} = Q,$$

où P et Q sont les dérivées θ'_u et θ'_v d'une fonction quelconque $\theta(u, v)$.

L. R.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXI.



TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXI; 1907. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta mathematica. T. XXII, 1899. — 54-69.
Annales scientifiques de l'École Normale. 3e série, T. XXIII, 1906. — 193-210.
Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXXIV, 1906. — 141-157.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXLII-CXLIII, 1906. — 127-141.
Journal de l'Ecole Polytechnique. 2e série, Cah. IX, 1904. — 157-163.
Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. X, 1904. — 5-17.
Mathematische Annalen. T. XLVIII-LI, 1897-1899. — 69-127.
Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. 2e série, T. XXXIX-XLIX, 1889-1900. — 176-192.
Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. 3e série, T. I-IX; 1867-1900. — 50-54.
Rendiconti della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. 1889-1900. — 164-175.
Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischer Classe der K. Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München. 1903-1905. — 17-49.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXI.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
41113 Quai des Grands-Augustins, 55.